ALGEBRA LINEAL

OBJETIVO GENERAL:

EL ALUMNO ANALIZARÁ Y ADQUIRIRÁ LOS CONOCIMEINTOS DEL ÁÑGEBRA LINEAL Y LOS PALICARÁ COMO UNA HERRAMIENTA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS PRÁCTICO DEL ÁREA DE INGENOERÍA.

TEMAS Y SUBTEMAS

1. NÚMERO COMPLEJOS

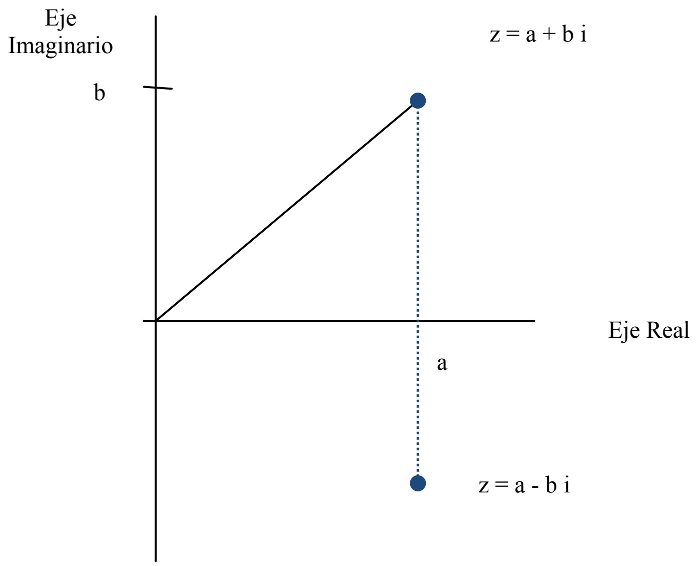
OBJETIVO PARICULAR:

El alumno conocerá los fundamentos conceptuales de los números complejos

1.1. DEFINICIÓN Y ORIGEN Y OPRACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo es un número escrito de la forma $z = a + bi$ donde a y b son números reales e i es el símbolo formal que satisface la relación i^2 = -1. Se considera que un número real es un tipo especial de número complejo, identificándose a con a + 0i **.** Más aún las operaciones aritméticas con números reales pueden extenderse al conjunto de números reales.

Interpretación geométrica



El conjugado complejo es una imagen reflejada

Operaciones fundamentales con números complejos

Suma y multiplicación de números complejos.

(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (b + d) i................(1)

(a + bi) (c + di) = (ac + bd) + (ad + bc) i............(2)

Estas reglas se reducen a la suma y multiplicación comunes de números reales cuando b y d son ceros en (1) y (2).

La resta de números complejos se define como.

$$Z_1 + z_2 = z_1 + (-1)\, z_2$$

El conjugado de z = a + bi es un número complejo $\bar{z}$ (zeta testada) obtenemos

$\bar{z}$ cambiando el signo de la parte imaginaria

$\bar{z} = a - bi$

1.2 Potencias de “i” modulo ó Valor absoluto de un número complejo

Potencias de la Unidad Imaginaria:

$$i^1 = \sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 . i = -1 . i = -i$$

$$i^4 = i^2 . i^2 = -1 . (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 . i = 1 . i = i$$

$$i^6 = i^4 . i^2 = 1 . i^2 = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 . i^3 = 1 . i^3 = i^3 = -i$$

$$i^8 = i^4 . i^4 = 1 . i^4 = i^4 = 1$$

Valor absoluto

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.3. forma polar y exponencial de un número complejo

Forma Polar

Sea $wz = |w||z|[\cos(\vartheta + \varphi) + isen(\vartheta + \varphi)]$

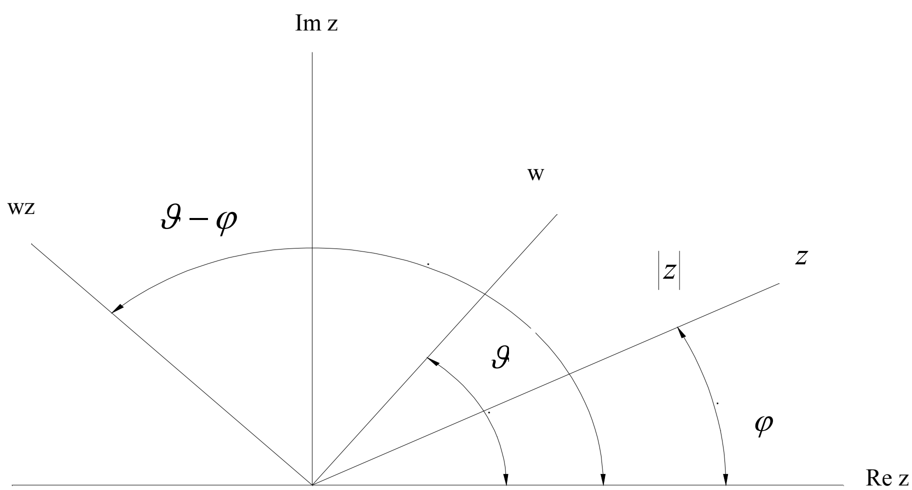


Figura 1.1

El producto de dos número complejos diferente de cero está dado en la forma polar por el producto de sus valores absolutos y la suma de sus argumentos. El cociente de dos números complejos diferentes de cero está dado por el cociente de sus valores absolutos y la diferencia de sus argumentos.

Forma exponencial

A veces, y por simple comodidad se prefiere trabajar con la forma trigonometrica en vez de con la forma binomica:

Sea Z un número complejo cualquiera su representación prdra experesarse de las sigueientes maneras:

$$z = x + iy = \rho(COS\theta + i \cdot sen\theta) = \rho \bullet e^{i\theta}$$

Forma binomica	Forma trigonometrica	Forma exponencial

Donde $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot sen\theta \end{cases}$

Y $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \sqrt{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho sen\theta)^2} = \sqrt{\rho^2 \underbrace{\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right)}_{\cos^2\theta + sen^2\theta = 1}} = \rho$

Y $\tan\theta = \frac{y}{x}$

1.4. Teorema DeMoivre , potencias y extracción de raíces de un número complejo.

Teorema de DeMoivre y Potencias

De la figura 1.1. tenemos dada la representación polar de un número complejo

Donde la formula se usa cuando $z = w = r(\cos\ \varphi + isen\ \varphi)$ en este caso

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + isen\varphi)$$, y

$$\begin{aligned} z^3 &= z \cdot z^2 \\ &= r(\cos\varphi + isen\varphi)\cdot r^2(\cos 2\varphi + isen2\varphi) \\ &= r^3(\cos 3\varphi + isen3\varphi) \end{aligned}$$

En general, para cualquier entero positivo k.

$$z^k = r^k(\cos k\varphi + isenk\varphi)$$

a esto se le conoce como **Teorema de DeMoivre** aplicable así mismo a las potencias de números complejos

Raíces de un número complejo

Dado un número complejo que se define tal que $i^2 = -1$. Utilizando esta notación podemos pensar en i como la raíz cuadrada de −1, pero notamos que también tenemos $(-i)^2 = i^2 = -1$, así que (−i) es también una raíz cuadrada de −1. Semejantemente a los números reales, decimos que la raíz cuadrada principal de −1 es i, o, en general, si x es cualquier número real positivo, entonces en la raíz cuadrada principal de −x se cumple la siguiente igualdad:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{-1}\sqrt{x} = i\sqrt{x}$$

es decir, la raíz cuadrada de un número negativo es necesariamente imaginario. Eso es debido a que $i^2 = -1$, por lo que entonces:

$$\left(i\sqrt{x}\right)^2 = i^2\sqrt{x}^2 = (-1)x = -x$$

Si se desea encontrar la raíz de un número imaginario es posible demostrar la igualdad

$$\sqrt{\pm ix} = \sqrt{\frac{x}{2}} \pm i\sqrt{\frac{x}{2}}$$

Por los argumentos dados, *i* no puede ser ni positivo ni negativo. Esto crea un problema: para el número complejo *z*, no podemos definir $\sqrt{z}$ para ser la raíz cuadrada "positiva" de *Z*.

Para cada número complejo diferente a cero z existen exacto dos números W tales que $w^2 = Z$. Por ejemplo, las raíces cuadradas de *i* son:

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

y

$$-\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

La definición general de $\sqrt{z}$ está introduciendo el siguiente punto de rama: si $z = r\,e^{i\varphi}$ es representado en coordenadas polares con $-\pi < \varphi \le \pi$, después fijamos el valor principal a:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\,e^{\frac{i\phi}{2}}$$

Así definido, la función de la raíz es holomorfa en todas partes excepto en los números reales no positivos, donde no es incluso continua. La antedicha serie de Taylor para $\sqrt{1+x}$ sigue siendo válida para el resto de los números complejos *x* con $|x| < 1$.

En general, para un número complejo expresado en forma rectangular, se obtiene:

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{|x+iy|+x}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|x+iy|-x}{2}}$$

Donde

$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ (el valor absoluto o módulo del número complejo), y el signo de la parte imaginaria de la raíz coincide con el signo de la parte imaginaria del radicando.

1.5 Ecuaciones Polinómicas

Los números complejos surgen ante la imposibilidad de hallar todas las soluciones de las ecuaciones polinómicas de tipo

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Dados los valores apropiados de los coeficientes a_n a a_0 , esta ecuación tendrá n soluciones reales s_i que permitirán reescribir el polinomio de la siguiente forma:

$$(x - s_n)(x - s_{n-1}) \cdots (x - s_1) = 0$$

Sin embargo, ecuaciones incluso tan sencillas como $x^2 + 1 = 0$ desafían esta regla, ya que su solución, que teóricamente vendría dada por

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

que no existe en el campo de los reales ya que la raíz cuadrada no está definida para argumentos negativos.

Los números complejos sin embargo permiten ampliar aún más el concepto de "*número*", definiendo la *unidad imaginaria* o *i* como i = $\sqrt{-1}$, lo que significaría que la ecuación anterior sí tendría dos soluciones, que serían **x_1= i** y **x_2= - i.**

La introducción de los números complejos permite probar el *teorema fundamental del álgebra*, que dice que cualquier ecuación polinómica de grado n tiene exactamente n soluciones complejas.

De esta manera, se define genéricamente un número complejo como un número compuesto por dos partes, una parte real *a* y una parte imaginaria *b*, escribiéndose como sigue:

$$z = a + bi$$

Por ejemplo, 2-3i, 4+8i, 3-πi, etc.

Con los números complejos se opera como se operaría con productos de sumas ordinarios, teniendo en cuenta siempre que $i^2 = -1$:

$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad+bc)i$.

La división es un poco más sofisticada debido a la necesidad de eliminar la unidad imaginaria del de nominador de la fracción:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2-(di)^2)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

EJERCICIO

El alumno:

•Elaborará una lista de las propiedades de los números complejos
•investigará la operación de división de números complejos.
•Dado la ley donde $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ demuestre de acuerdo a esta que -1=1