# 2.- Sistemas de ecuaciones Lineales

### 2.1.- Definición, Clasificación de los sistemas lineales y tipos de solución. Definición

Una ecuación lineal con las variables $x_1,...,x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Donde b y los coeficientes $a_1,...,a_n$ son números reales ó complejos.

### Clasificación

- **Sistema incompatible** si no tiene ninguna solución.
- **Sistema compatible** si tiene alguna solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - **Sistema compatible determinado** cuando tiene un número finito de soluciones.
  - **Sistema compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones

### Tipos de solución

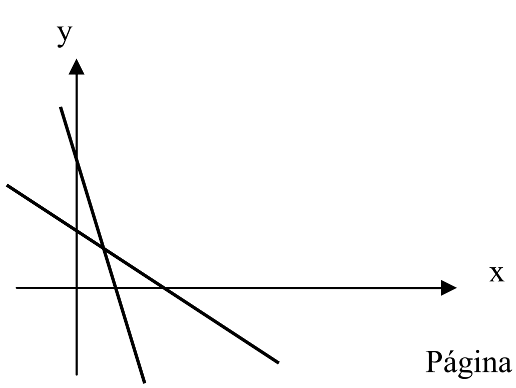
Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas *x* y *y*

$$a_{11}x + a_{12}x = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}x = b_2$$

A partir del tipo de solución tendremos:

### 2.2. Interpretación geométrica de las soluciones

1. Un sistema con una solución única

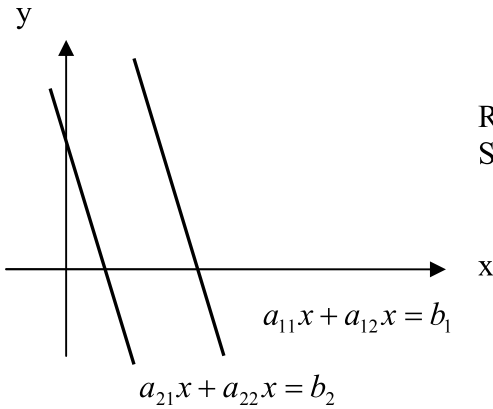



Rectas no paralelas;
Un punto de intersección

$$a_{11}x + a_{12}x = b_1$$

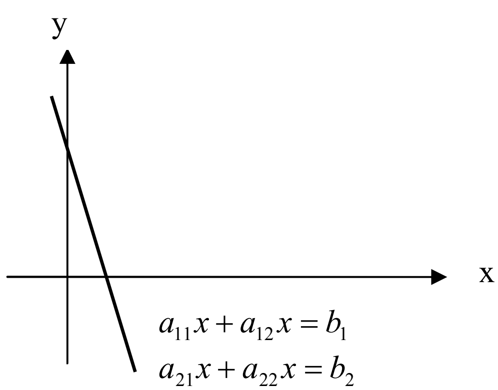
2. Un sistema con un número infinito de soluciones

$$a_{21}x + a_{22}x = b_2$$




Rectas paralelas;
Sin punto de intersección

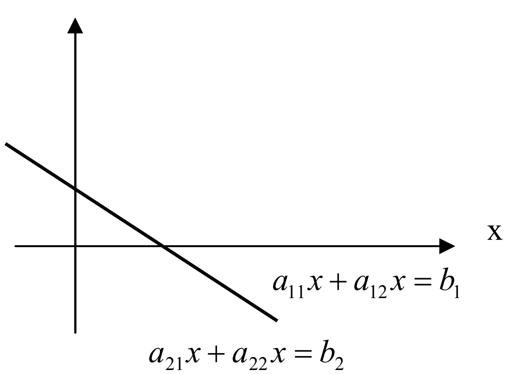
3. Un sistema sin solución




Rectas que coinciden;
Un número infinito de puntos de intersección

### 2.3. Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

### Método gráfico



En este método se grafican las ecuaciones y el en punto de intersección se encontrará la solución de existir

**Método por sustitución**

Observe el siguiente sistema de ecuaciones

$$x-2y+3z=9 \qquad ......(1)$$
$$y+3z=5 \quad . \qquad ......(2)$$
$$z=2 \qquad ......(3)$$

Aplicando el método tenemos sustituyendo z=2 en (1) y (2)

$$x-2y=5 \qquad ......(4)$$
$$y=-2 \qquad ......(5)$$

Sustituyendo (5) en (4)

$$x-2(-2)=5)$$
$$x=1$$

**Método por eliminación**

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$x-2y+3z=9$$
$$-x+3y=-4$$
$$2x-5y+5z=17$$

Existen varias formas de empezar
Sumamos la primera ecuación a la segunda

$$x-2y+3z=9$$
$$y+3z=5$$
$$2x-5y+5z=17$$

Al sumar -2 a la primera ecuación se obtiene la tercera nueva ecuación

$$x-2y+3z=9$$
$$y+3z=5$$
$$-y-z=-1$$

Ahora que todo se ha eliminado de la primera columna, excepto la primera x, se procede con la segunda.
Al sumar la segunda ecuación a la tercera se obtiene una nueva tercera ecuación

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Al multiplicar por $\frac{1}{2}$ la tercera ecuación se obtiene una nueva tercera ecuación

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que $x = 1, y = -1, z = 2$

**Método de eliminación Gauss-jordan**

**Operaciones elementales de renglones**

I. Multiplicar(o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
II. Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
III. Intercambiar renglones.

Resolver el siguiente sistema de ecuación por el método de eliminación Gauss Jordan

$$\begin{aligned} 2y + \quad z &= 4 \\ x + \quad y + 2z &= 6 \\ 2x + \quad y + \quad z &= 7 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Usaremos el símbolo $\longrightarrow$ para indicar que la matriz presedente ha cambiado debido a una operación especifica; la matriz resultante mostrara el resultado de dicha operación.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} (r2) \\ (r1) \\ \phantom{x} \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (r3) + (-2 * r1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right] \begin{array}{l} (r1)+(-\frac{1}{2}*r2) \\ \\ (r3)+(\frac{1}{2}*r2) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} (r1)+(\frac{3}{5}*r3) \\ (r2)+(\frac{2}{5}*r3) \\ \\ \end{array} \qquad \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right]$$

En este punto tenemos un coeficiente diagonal de la matriz. .el paso fina del método es hacer que cada valos de la diagonal se 1. Para hacer esto dividimos cada renglón de la matriz argumento por el elemento diagonal en cada renglón..

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{14}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (r2)*(-\frac{1}{2}) \\ (r3)*(-\frac{2}{5}) \end{array} \qquad \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{array}\right]$$

Por lo tanto

$$x = \frac{7}{5},\ y = \frac{11}{5},\ \text{and}\ z = \frac{6}{5}.$$

**Eliminación Gaussiana.**

Considerar un sistema lineal.

1. Construya una matriz argumentada del sistema.
2. Use operaciones elementales en los renglones para transformar la matriz argumentada en una triangular
3. Escriba abajo el nuevo sistema lineal para cada matriz asociada al a matriz argumentada.
4. Resuelva el nuevo sistema. Quizás necesites asignar algunos valores para métricos a algunos desconocidos y entonces aplicar el método de sustitución para resolver el nuevo sistema.

Como se puede observar ambos métodos de gauss son en si una variación uno de otro.

Ejemplo

$$\begin{cases} x - y & = & 4 \\ 2x - 2y & = & -4 \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz argumentada será

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

Mantenemos el primer renglón y sustraemos el primer renglón multiplicando por 2 el segundo renglón y obtenemos.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -12 \end{array} \right).$$

Esta es la matriz triangular. El sistema asociado será

$$\begin{cases} x & - & y & = & 4 \\ & & 0 & = & -12 \end{cases}$$

Y observamos que el sistema no tiene solución

**Ejercicios**

El alumno:

- Resolver el sistema por eliminación gaussiana

$$\begin{cases} 2x- & 3y - z+ & 2w & +3v & = & 4 \\ 4x- & 4y - z+ & 4w & +11v & = & 4 \\ 2x- & 5y - 2z+ & 2w & -v & = & 9 \\ & 2y + z & & +4v & = & -5 \end{cases}$$

- Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por medio de eliminación gauss jordan

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 30$$