3.- Matrices y determinantes.

3.1. Definición de matriz, notación y orden.

Se define una matriz A de orden *m x n*, a una reunión de m x n elementos colocados en ‘m’ filas y ‘n’ columnas. Cada elemento que forma la matriz A se denota como a*ij* donde *i* corresponde a la fila del elemento y *j* a la columna.

Notación

Se denomina **matriz columna** a la matriz que tiene *m x 1* elementos, y se llama **matriz fila** a la matriz de *1 x m* elementos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3.2 Clasificación de matrices y operaciones

Orden de una matriz A(m x n), *m* x *n*: indica el número de filas, *m*, y de columnas, *n*, de una matriz

A es una **matriz cuadrada** si el número de filas es igual al número columnas, es decir, n = m. Se dice, entonces que la matriz es de **orden n**. La diagonal principal de una matriz cuadrada es la formada por los elementos a*ii* de la matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \text{ Matriz cuadrada de orden 3}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Matriz identidad de orden 3}$$

La matriz nula es aquella matriz cuyos elementos son todos 0.

Se define la **matriz identidad *I*** como una matriz cuadrada que cumple la propiedad de ser el elemento neutro del producto de matrices, es decir, que el producto de cualquier matriz por la matriz identidad, siempre que ese producto esté definido, como otro día veremos, no tiene ningún efecto. En la matriz identidad, los elementos de la diagonal principal son 1, y los elementos fuera de la diagonal principal son 0.

Operaciones con Matrices

Definición de Multiplicación Escalar

Si $A = \lfloor a_y \rfloor$ es una matriz de $m \times n$ y c es escalar. Entonces el múltiplo escalar de A por C es la matriz $m \times n$ definida por

$cA = \lfloor ca_y \rfloor$

Producto Escalar
$(a_1, a_2, \ldots a_n) \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$

Suma de Matrices

Suma de matrices, A + B: matriz que resulta de sumar los elementos de A y B que están situados en la misma fila y columna. Si A = (a_{ij}) y B = (b_{ij}), matrices del mismo orden m x n,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma de Matrices

1ª *Conmutativa*: A + B = B + A

2ª *Asociativa*: (A + B) + C = A + (B + C)

3ª *Elemento neutro*: 0 (matriz cero o matriz nula).

0 + A = A + 0 = 0

4ª *Elemento simétrico*: - A (matriz opuesta de A).

A + (-A) = (-A) + A = 0

La opuesta de la matriz A se obtiene cambiando de signo todos los elementos de la matriz A: - (a_{ij}) = ($-a_{ij}$).

Diferencia de Matrices

La diferencia de matrices es un caso particular de la suma. Restar dos matrices es lo mismo que sumarle a la primera la opuesta de la segunda:

A - B = A + (-B).

Producto de una matriz con un número real

Dado un número real **k** y una matriz **A = (a_{ij})** de dimensión **m x n**, se define el producto del número real **k** por la matriz **A**, como otra matriz **P = (p_{ij})** de la misma dimensión que **A**, de modo que cada elemento **p_{ij}** de **P** se obtiene como: **$p_{ij} = k.a_{ij}$.**

Producto de dos Matrices

El producto de matrices no está definido en todos los casos. Para que dos matrices se puedan multiplicar es necesario que el ***número*** de ***columnas*** de la ***primera*** matriz coincida con el ***número*** de ***filas*** de la ***segunda*** matriz, es decir, si la matriz **A = (a_{ij})** tiene dimensión **m x n** y la matriz **B = (b_{ij})** tiene dimensión **p x q**, para que se pueda efectuar el producto **A . B** es necesario que **n = p**. Por otra parte, la matriz producto **P = (p_{ij})** tendrá por dimensión **m x q**, es decir, el ***número*** de ***filas*** de la matriz **A** y el ***número*** de ***columnas*** de la matriz **B**. Cada elemento **p_{ij}** de la matriz **P** se obtiene multiplicando la fila **i** de la matriz **A** por la columna **j** de la matriz **B**, siguiendo el procedimiento descrito en el punto anterior.

Propiedades del productos de Matrices

Sean **A**, **B** Y **C** matrices. Siempre que sea posible efectuar los productos indicados, de acuerdo con la condición anterior, se verifica:

1ª *Asociativa*: (A . B) . C = A . (B . C)

2ª *Elemento neutro*: **I** (matriz identidad o unidad) A . **I** = **I** . A = A

3ª *Distributiva respecto de la suma de matrices*: A . (B + C) = A . B + A . C

4ª *El producto de matrices no es, en general, conmutativo*: A . B ≠ B . A

5ª *Matriz Inversa*: Dada una matriz cuadrada A, si existe otra matriz B que verifique A . B = B . A = **I** (matriz identidad), entonces se dice que B es la matriz inversa de A y se representa por A^{-1}. ($A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$)

3.3 Calculo de una matriz Inversa

La inversa de una matriz $m \times n$. Suponga que

$AB = BA = I$

Entonces B se llama inversa de A y se denota A^{-1} Entonces se tiene

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ donde **I** es la matriz identidad

Sean A y B dos matrices de

Si existe la matriz inversa de **A**, se dice que la matriz **A** es ***inversible*** o r***egular***. En caso contrario, se dice que la matriz **A** es ***singular***.

Una matriz **A** de ***orden*** **n** (n filas y n columnas) tiene inversa cuando su **rango** es **n**, es decir, cuando el ***rango*** de dicha matriz coincide con su **orden**.

Básicamente hay dos procedimientos para calcular la inversa de una matriz. Son los siguientes:

- ✓ Por el ***método de Gauss***.
- ✓ Por ***determinantes y adjuntos*** (que describiremos en la unidad de determinantes).

Método de Gauss.

Para calcular la ***inversa*** de una matriz cuadrada **A**, aplicando el ***método de Gauss***, construimos, en primer lugar, la matriz **(A | I)**, siendo **I** la matriz identidad del mismo orden que **A**. Después de realizar diversas operaciones sobre las filas de ésta nueva matriz, tendremos que conseguir que se transforme en la siguiente **(I | B)**. La matriz **B** será la ***inversa*** de la matriz **A**, es decir: **B = A^{-1}**.

Las operaciones que podemos realizar con las filas de la citada matriz son:

a) Multiplicar o dividir una fila por un número distinto de cero.

b) Sumarle a una fila otra fila multiplicada por un número distinto de cero.

3.4. Definición y propiedades de Determinante de una Matriz

El *determinante* de una matriz **A**(n,n), es un escalar o polinomio, que resulta de obtener todos los productos posibles de una matriz de acuerdo a una serie de restricciones, siendo denotado como **|A|**. El valor numérico es conocido también como modulo de la matriz.

(Nota: En matrices de segundo y tercer orden suele ser utilizado el método conocido como regla de Sarrus.)

A continuación vamos a ver una de las formas de obtener el determinante (método cofactores).

Algoritmo:

$$|A| = a_{11} \quad [si\ n = 1]$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\ |A_{ij}|\ (-1)^{i+j} \quad [si\ n>1]$$

siendo n igual al número de columnas, y Aij es el resultado de eliminar la fila i y la columna j de la matriz original.

Si la matriz fuese del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} +1 & -3 & -2 \\ +4 & -1 & +0 \\ +4 & +3 & -5 \end{bmatrix}$$

el determinante es de tercer orden, siendo desarrollo en un primer momento:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & +0 \\ +3 & -5 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -4 & +0 \\ +4 & -5 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} +4 & -1 \\ +4 & +3 \end{vmatrix}$$

después de lo cual resolveríamos el siguiente nivel, resultando ...

$$\begin{vmatrix} -1 & +0 \\ +3 & -5 \end{vmatrix} = -1|-5| - 0|3| = 5$$

$$\begin{vmatrix} -4 & +0 \\ +4 & -5 \end{vmatrix} = 4|-5| - 0|4| = -20$$

$$\begin{vmatrix} +4 & -1 \\ +4 & +3 \end{vmatrix} = 4|3| - (-1)|4| = 16$$

y por tanto ...

|A| = 1(5)-(-3)(-20)+(-2)(16) = -87

3.5. Inversa de una matriz a través de la adjunta

Si Aes una matriz invertible de $m \times n$, entonces es cierto que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$$

Si A es una matriz de 2x2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces la adjunta simplemente será

$$adjA = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Además A es invertible , se tiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{ad - bc} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3.6.- Solución de un sistema de ecuaciones lineales a través de la inversa y por la regla de Cramer.

Solución de un sistema de ecuaciones a través de la Inversa

Un procedimiento rápido para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices es el llamado **método de la matriz inversa**. Esta técnica consiste en multiplicar por la izquierda los dos miembros de la expresión matricial del sistema de ecuaciones por la matriz inversa de la de los coeficientes (si existe). De este modo:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Cuando la matriz de los coeficientes no es inversible, el sistema no tiene solución (es incompatible).

$$\mathbf{A \cdot X = B} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Regla de Cramer

Un sistema de ecuaciones lineales recibe el nombre de sistema de Cramer cuando se cumplen las dos condiciones siguientes:

- El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
- El determinante de la matriz de los coeficientes (matriz del sistema) es distinto de cero (**det (A) # 0**)

Sea A una matriz $m \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $Ax = b$ está dada por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

La solución de acuerdo al regla de Cramer será

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

por lo tanto se tiene

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

3.7- Aplicación de Matrices y determinantes

Aplicaciones de las matrices

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar
valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo: Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0'04	0'08	0'12
Color F	0'03	0'05	0'08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

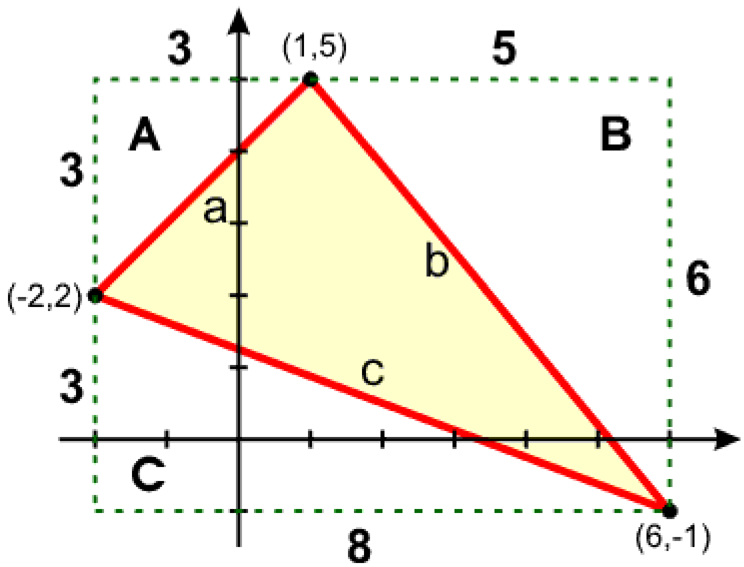
Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).
Nos piden que organicemos la información anterior en dos matrices de tamaño concreto. Si nos fijamos en las tablas, es sencillo obtener las matrices:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\text{ ud} & 5\text{ ud} & 10\text{ ud} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ N \\ F \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\_04 & 0\_03 \\ 0\_08 & 0\_05 \\ 0\_12 & 0\_08 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2\text{ usd} \\ 5\text{ usd} \\ 10\text{ usd} \end{array}$$

Estas matrices se denominan *matrices de información*, y simplemente recogen los datos numéricos del problema en cuestión.
Otras matrices son las llamadas *matrices de relación*, que indican si ciertos elementos están o no relacionados entre sı. En general, la existencia de relación se expresa con un 1 en la matriz y la ausencia
de dicha relación de expresa con un 0.
Estas matrices se utilizan cuando queremos trasladar la información dada por un *grafo* y expresarla numéricamente.

Aplicación de determinantes

Consideremos el siguiente gráfico



PODEMOS ENCONTRAR EL AREA DEL TRIANGULO USANDO LOS DETERMINATES

	x	y	1
point 1	-2	2	1
point 2	1	5	1
point 3	6	-1	1

Elaborando de esta tabla los determinantes tenemos

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = +(-2)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -2 (5 + 1) - 1 (2 + 1) + 6 (2 - 5) = -2 (6) - 1 (3) + 6 (-3) = -12 - 3 - 18 = -33.$

Es posible que consiga un determinante negativo, como hicimos aquí. Don' No se preocupe. Esto es por la selección del orden de los puntos y puede ser cambiado fácilmente apenas cambiando dos filas del determinante. El área, por una parte, no pude ser negativo, así que si usted consigue un negativo, solo cambie el signo. Finalmente, divídalo por 2 para encontrar el área.

EJERCICIO

El alumno:

•Investigará la forma de la matriz identidad I
•Investigara las diferentes tipos de matrices
•Demostrar que si una matriz A es invertible entonces su inversa es única.
•Demostrar que si A y B son matrices invertible de $m \times n$ entonces AB es invertible.
*Investigará las Propiedades de las matrices
*Resuelverá por la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 2x_2 &= 10 \\
3x_1 - 5x_2 &= 11
\end{aligned}
$$