4. Espacios Vectoriales

4.1. Definición de espacio , subespacio vectorial y sus propiedades

un vector es una magnitud que consta de módulo, dirección y sentido . Algunos sin embargo; más teóricos, explicarían que **un vector es una entidad tal que para ser expresada necesita de *n* escalares (números); siendo n cualquier número natural.**

Definición de espacio vectorial y propiedades

Un espacio vectorial es un conjunto no vacio de V objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares(números reales), sujetas a diez axiomas(o reglas) que se dan a continuación. Los axiomas deben valer para todos los vectores **u, v,** y **w** en V y todos los escalares *c y d.*

1. La suma de **u** y **v**, denotada por **u** + **v**, está en V
2. **u** + **v** = **v** + **u**
3. (**u** + **v**)+ **w** = **u** + (**v** + **w**)
4. Existe un vector 0 en V tal que **u** + **0** = **u**
5. Para cada **u** en V, existe un vector –u en V tal que **u** + (**-u**) = **u.**
6. El múltiplo escalar de **u** por *c*, denotado *c***u**, está en V
7. *c*(**u** + **v**) = *c***u** + *c***v**
8. (**c**+ **d**) **u =** *c***u** + *d***u**
9. *c*(*d***u**) = (*cd*)**u**
10. *1***u**=**u**

Los espacios de $\Re^n$ con $n \geq 1$, son los ejemplos principales de espacios vectoriales. La intuición geométrica desarrollada para $\Re^3$ nos ayudará a entender y a visualizar muchos conceptos durante el capitulo.

Subespacio vectorial y propiedades

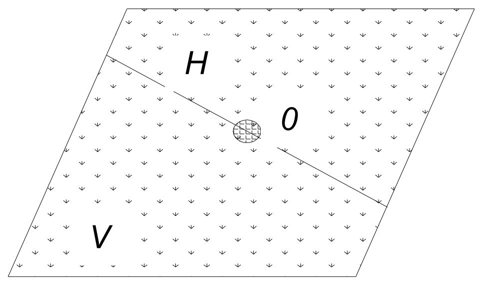
Definición.

Un subespacio vectorial *V* es un subconjunto H de V que tiene tres propiedades:

a. El vector cero de *V* está en H^2
b. *H* es cerrado bajo la suma de vectores. Esto es, para cada **u** y **v** en *H,* la suma **u** + **v** está en *H*

c. *H* es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Esto es, para cada **u** en *H* y cada escalar *c*, el vector *c***u** está en *H*

Ejemplo.
El conjunto que consta únicamente de un vector cero en un espacio vectorial *V* es un subespacio de *V* llamado subespacio cero se escribe $\{0\}$



Ejemplo de subespacio de V

4.2 Propiedad de Vectores , Combinación Lineal, dependencia e independencia lineal

Propiedades.

Cuales quiera que sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ en $\mathbb{R}^3$:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, (anticonmutatividad)
2. $\langle \vec{a}, (\vec{a} \times \vec{b}) \rangle = \langle \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}) \rangle = 0$ (el producto vectorial es perpendicular a cualquiera de los factores),
3. Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$ entonces $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} || \vec{b}$ (el producto cruz de dos vectores paralelos es cero).
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
5. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}$

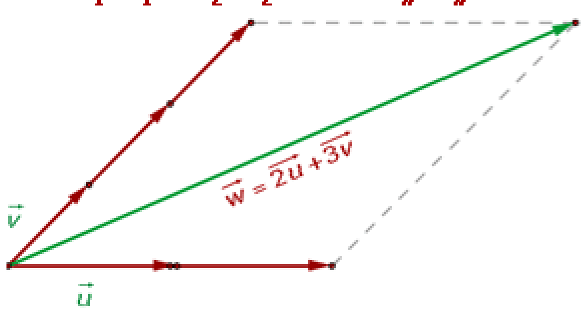
Otras propiedades [editar]
Continuando con los vectores del apartado anterior y con la norma vectorial habitual:

- $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$. El valor absoluto de esta operación corresponde al volumen del paralelepípedo formados por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$. A esta operación se la conoce como **producto mixto**, pues combina producto escalar y producto vectorial.

- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$, siendo θ el ángulo menor entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$; esta expresión relaciona al producto vectorial con el área del paralelogramo que definen ambos vectores.
- El vector $\vec{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$ es el vector normal al plano que contiene a los vectores $\vec{a}$ y

Dados **dos vectores**: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y **dos números**: **a** y **b**, el **vector** $a\,\vec{u} + b\vec{v}$ se dice que es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Una **combinación lineal** de dos o más vectores es el **vector** que se obtiene al **sumar** esos **vectores multiplicados** por sendos **escalares**.

$$V = a_1\,\vec{V_1} + a_2\,\vec{V_2} + \cdots + a_n\,\vec{V_n}$$



Cualquier **vector** se puede poner como **combinación lineal** de otros dos que tengan **distinta dirección**.

$$\vec{w} = \overrightarrow{2u} + \overrightarrow{3v}$$

Esta combinación lineal es única.

Dados los vectores $\vec{x} = (1,\ 2)$ e $\vec{y} = (3,\ -1)$, hallar el **vector combinación lineal** $\vec{z} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$

$$\vec{z} = 2(1,\ 2) + 3(3,\ -1) = (2,\ 4) + (9,\ -3) = (11,\ 1)$$

El vector $\vec{z} = (2,\ 1)$, ¿se puede expresar como **combinación lineal** de los vectores $\vec{x} = (3,\ -2)$ e $\vec{y} = (1,\ 4)$?

$$(2,\ 1) = a(3,\ -2) + b(1,\ 4)$$

$$(2,\ 1) = (3a,\ -2a) + (b,\ 4b)$$

$$(2,\ 1) = (3a + b,\ -2a + 4b)$$

$$\begin{cases} 2 = 3a + b \\ 1 = -2a + 4b \end{cases} \qquad a = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

Dependencia e Independencia lineal

Definición:

Sean $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m \in V$. Diremos que son LINEALMENTE DEPENDIENTES si al menos uno de ellos se puede escribir como combinación lineal del resto.

ejemplo

Consideremos los siguientes vectores

$\bar{u}_1 = (3,-1,0,4)$

$\bar{u}_2 = (1,0,0,0)$

$\bar{u}_3 = (0,1,0,-1)$

$\bar{u}_4 = (5,0,0,3)$

¿Se puede expresar el vector $\bar{u}_4$ como combinación lineal de los tres primeros vectores? . Para resolver esta, primero definimos estos vectores

```
u1 := [3, -1, 0, 4]

u2 := [1, 0, 0, 0]

u3 := [0, 1, 0, -1]

u4 := [5, 0, 0, 3]
```

y a continuación planteamos la ecuación vectorial

```
u4 = a·u1 + b·u2 + c·u3
```

que una vez simplificada nos proporciona el sistema de ecuaciones

```
[5 = 3·a + b, 0 = c - a, 0 = 0, 3 = 4·a - c]
```

Si obtenemos una solución para a,b,c, habremos obtenido una combinación lineal de los tres primeros vectores, gracias a la cual obtendremos el cuarto vector. Si resolvemos el sistema anterior, resulta

```
[a = 1, b = 2, c = 1]
```

lo cual nos indica que

$\bar{u}_4 = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3$

es decir que el vector $\bar{u}_4$ se puede expresar como combinación lineal de los tres primeros vectores. La DEPENDENCIA que tiene este vector respecto del resto se traduce en la existencia de una DEPENDENCIA LINEAL en el conjunto de los cuatro vectores.

Independencia Lineal

Definición:

Sean $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m \in V$. Diremos que son LINEALMENTE INDEPENDIENTES si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes.

ejemplo

Si tenemos los vectores (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0), podríamos intentar ver si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los dos restantes. Para efectuar esta comprobación en DERIVE, primero definiríamos nuestros tres vectores

```
u1 := [1, 1, 1]

u2 := [1, 1, 0]

u3 := [1, 0, 0]
```

- Intentemos ver si u1 se puede expresar como combinación lineal de u2 y u3. Para ello, primero editamos la ecuación vectorial

$$u1 = a \cdot u2 + b \cdot u3$$

cuyo sistema de ecuaciones viene dado por

```
[1 = a + b, 1 = a, 1 = 0]
```

que si intentamos resolver luego esta primera combinación lineal no es posible.
Intentemos ver si u2 se puede expresar como combinación lineal de u1 y u3, efectuando

$$u2 = a \cdot u1 + b \cdot u3$$

al simplificar nos da

```
[1 = a + b, 1 = a, 0 = a]
```

sistema claramente sin solución.

- Por último para ver si u3 se puede expresar como combinación lineal de u1 y u2 editamos la ecuación

```
u3 = a·u1 + b·u2
```

es decir, el sistema de ecuaciones

```
[1 = a + b, 0 = a + b, 0 = a]
```

que nuevamente es incompatible.

En esta situación, podemos decir que los tres vectores son INDEPENDIENTES de combinaciones lineales, es decir son LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

4.3 Base y dimensión de un espacio vectorial

Base de un vector

Si un espacio vectorial *V* tiene una base con **n** vectores , entonces toda base de *V* tiene **n** vectores

Base <un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, v_{3.}, ..., v_n\}$es una base para un espacio vectorial de V si

I. $\{v_1, v_2, v_{3.}, ..., v_n\}$es linealmente independiente

II. $\{v_1, v_2, v_{3.}, ..., v_n\}$genera a V

Todo conjunto de **n** vectores linealmente independientes en $\Re^n$ es una base de $\Re^n$

Propiedades

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces todas las bases de V tienen el mismo número de elementos. El espacio vectorial {0} tiene dimensión 0 por definición. Cuando un espacio vectorial no es de dimensión finita, se dice que es de dimensión infinita.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, cualquier conjunto de n+1 o más vectores son linealmente dependientes.

Dimensión de un espacio vectorial

Si un espacio vectorial *V* tiene una base que consta de **n** vectores , entonces el número **n** se denomina dimensión de *V* y se denota por dim(*V*)=n. Si *V* consta solamente del vector cero, entonces la dimensión de V se define como cero.

Dimensión de vectores espaciales

dimensión

Vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n

Matrices $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$ mn

Polinomios $a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_1x_n$ n + 1

4.4 Espacio vectorial con producto interno y sus propiedades

Espacios con producto interno

Un espacio complejo *V* se llama espacio vectorial con producto interno si para cada par ordenado **u** y v en *V*, existe un número complejo único(**u, v**), llamado producto interno de **u** y **v**, tal que si **u, v** y **w** están en *V* y $\alpha \in$ **C,** entonces:

i. (**v,v**) ≤ 0
ii. (**v,v**) = 0 si y solo si **v** = 0
iii. (**u, v + w**) =(**u , v**) + (**v , w**)
iv. (**u+ v , w**) =(**u , w**) + (**v , w**)
v. $(v.u) = \overline{(v,u)}$
vi. $(\alpha v.u) = \alpha(u,v)$
vii. $(v, \alpha u) = \overline{\alpha}(u,v)$

La barra en las condiciones 5 y 7 denota el conjugado complejo además si $(v.u)$ es real , entonces $\overline{(v,u)} = (v.u)$ y se puede eliminar la barra en (v).

Ejemplo

Producto interno de dos vectores en C^3

En C^3 sean x=(1+i,-3,4-3i) y y=(2-i,-i,2+i) entonces

$$(x,y) = (1+i)\overline{(2-i)} + (-3)\overline{(-i)} + (4-3i)\overline{(2+i)}$$

$$= (1+i)(2+i) + (-3)(i) + (4-3i)(2-i)$$

$$(x, y) = (1+3i) - 3i + (5-10i) = 6-10i$$

4.5 Cambio de base, base ortonormal, proceso de ortonormalización Gram-Schimdt

Cambio de base de un vector

Sea x un vector que en base B_1 (de vectores unitarios u_1, u_2, ...) será igual a $m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 + ...$

El mismo vector, utilizando otra base B_2 (de vectores unitarios v_1, v_2, ...) será

$n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 + ...$

Supongamos que u_1, u_2, ... se representan en la base B_2 de esta forma:

$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n$
$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n$
....
$u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n$

Por lo tanto, sustituyendo estas ecuaciones en la fórmula original nos queda:

$x = m_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n) + m_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n) + ...$

Reordenando queda:

$x = (m_1a_{11} + m_2a_{12} + ... + m_na_{1n})v_1 + ... + (m_1a_{n1} + m_2a_{n2} + ... + m_na_{nn})v_n$

Comparando con la fórmula $x = n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 + ...$ deducimos que
:
$n_1 = m_1a_{11} + m_2a_{12} + ... + m_na_{1n}$
$n_2 = m_1a_{21} + m_2a_{22} + ... + m_na_{2n}$
....
$n_n = m_1a_{nn} + m_2a_{n2} + ... + m_na_{nn}$

Esto se puede expresar de forma matricial:

$n_1 \quad a_{11} + a_{12} + ... + a_{1n} \quad m_1$
$n_2 = a_{21} + a_{22} + ... + a_{2n} \quad m_2$

....

n_n $a_{2n} + a_{n2} + ... + a_{nn}$ m_n

Llamando A a la matriz de coeficientes, X' al vector en la base B_2 y X al vector en la base B_1 nos queda:

X' = AX despejando X nos queda: $X = A^{-1}X'$

Base Ortonormal

Son ortogonales si

i. u y v si (u,v)=0

ii. la norma de **u**, denotada por $\|u\|$ esta dada por

$$\|u\| = \sqrt{(u\ ,\ u)}$$

Nota. Aquí se usa doble barra para evitar confusión con el valor absoluto.

Ejemplo.

Dos vectores ortogonales en C^2.
En C^2 los vectores (3,-i) y (2,6i) son ortogonales porque

$$((3,-i),(2,6i)) = 3\cdot\overline{2} + (-i)(\overline{6i}) = 6 + (-i)(-6i) = 6 - 6 = 0$$

Además $\|(3,-i)\| = \sqrt{3\cdot 3 + (-i)(i)} = \sqrt{10}$.

Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea H un subespacio de dimensiones **m** de R^n .Entonces H tiene una base ortonormal.

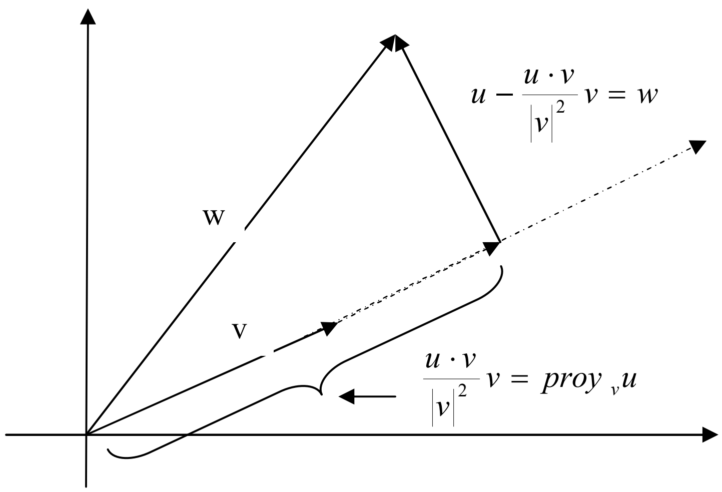
Paso 1.-Elección del primer valor unitario sea.

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \quad \text{entonces} \quad u_1\cdot u_1 = \left(\frac{v_1}{|v_1|}\right)\cdot\left(\frac{v_1}{|v_1|}\right) = \left(\frac{1}{|v_1|^2}\right)(v_1\cdot v_1 = 1)$$

De manera que $|u_1| = 1$.

Paso 2.- Elección del segundo vector ortogonal a u_1

Sabiendo que R^n el vector $w = u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$ es ortogonal a v. En este caso $\frac{u \cdot v}{|v|^2} v$ es la proyección de u sobre v. Esto se ilustra el la siguiente figura



El vector $w = u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$ es ortogonal a v

EJERCICIO

El alumno:

*cambiar de base el siguiente vector
Sea β = { (1, 1); (2, -1)} β' = {(1,3); (2,1)}

*Construya una base ortogonal en R^3comenzando con la base

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

**Investigar sobre Homotecias*

**Hallar el conjunto de las preimágenes del vector nulo para la transformación lineal*

$$\begin{array}{llll} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (2x + 3y + z, x - 3y - z) \end{array}$$