5.- Transformaciones Lineales

5.1Definición transformación lineal de núcleo ó kernel, e imagen de una transformación lineal y sus propiedades

Se denomina **transformación lineal** a toda función, *T*, cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales y se cumplan las siguientes condiciones:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(ku) = kT(u)$ donde k es un escalar.

Transformación lineal nula

$T : V \to W / T(x) = O_W \; \forall x \in V$

Transformación lineal identidad

$T : V \to W / T(x) = x \; \forall x \in V$

Homotecias

$T : R^n \to R^n / T(x) = kx$ con $k \in \Re$

Si $|k| > 1$ se denominan dilataciones
Si $|k| < 1$ se denominan contracciones

Propiedad de la transformaciones lineales

1. $T : V \to W / T(0_V) = 0_W$

Transformación de núcleo ó kernel

Sea $T : V \to W$ *una transformación lineal. Se define el* Kernel *o* Núcleo *de la transformación lineal* T*, denotado por* $\ker T$*, al conjunto de las preimágenes del vector nulo, es decir*

$\ker T = \{v \in V \quad / \quad T(v) = 0\}$

Si $T : V \to W$ es lineal, se define el **núcleo** y la **imagen** de *T* de la siguiente manera:

$\mathrm{Nu}(T) = \{\, x \in V : T(x) = 0_W \,\}$

Es decir que el núcleo de una transformación lineal está formado por el conjunto de todos los vectores del dominio que tienen por imagen al vector nulo del codominio.
El núcleo de toda transformación lineal es un subespacio del dominio:

1. $0_V \in Nu(T)$ dado que $T(0_V) = 0_W$
2. Dados $u \wedge v \in V : T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_W + 0_V = 0_W \Rightarrow u + v \in Nu(T)$
3. Dados $u \in V \wedge k \in \Re : T(ku) = kT(u) \wedge T(ku) = k0_W = 0_W \Rightarrow ku \in Nu(T)$

   Se denomina **nulidad** a la dimensión del núcleo. Nulidad(T) = dim(Nu(T))

$$\mathrm{Im}(T) = \{y / y \in W \wedge \exists x \in V / (x, y) \in T\}$$

O sea que la imagen de una transformación lineal está formada por el conjunto de todos los vectores del codominio que son imágenes de al menos algún vector del dominio.

La imagen de toda transformación lineal es un subespacio del codominio.

El rango de una transformación lineal es la dimensión de la imagen.

rg(T) = dim(Im(T))

ejemplo

Una transformación lineal de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$

$T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$. por ejemplo tenemos $T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

$$T = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} x_1 + y_2 \\ x_1 - y_2 \\ 3y_1 \end{pmatrix} . + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$ pero $\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} . = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} . = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Así $T = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] . = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

De manera similar

$$T = \left[\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - \alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} . = \alpha \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrices como transformaciones lineales

Definición 2.1.1 Dados **V, W** espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ una *transformación lineal* entre V y W es una función

$T : V \longrightarrow W$

Que satisface la siguiente condición, para todo , $x, y \in V \quad a, b \in \mathbb{R}$

$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

Ejercicio 1 : Si T es lineal, entonces , y . $T(ax) = aT(x) \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$

$T(0_V) = 0_W$

ejemplo:

Si $S : V \longrightarrow W$ satisface $S(ax) = aS(x)$, $S(x + y) = S(x) + S(y)$, entonces S es una transformación lineal.

Definición 2.1.2 Dada $A_{m\times n}$, definimos a T_A como la función multiplicación por A", es decir,

$T_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$T_A(\vec{a}) = A\vec{a}$ con $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

Teorema 2.1.3 *Sea* $A_{m\times n}$ *una matriz, y* $T_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *su transformación lineal asociada Entonces:*

1. $Ker(A) = T_A^{-1}(\vec{0}_m) \preceq \mathbb{R}^n$.
2. $R_A \preceq \mathbb{R}^n$.
3. $v(A) + \rho(A) = n$.
4. $C_A = Im(A) = Im(T_A) = T_A[\mathbb{R}^n] = \{A\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \preceq \mathbb{R}^m$.
5. $Dim(R_A) = Dim(N(A)) = \rho(A)$.

5.2 Representación lineal de una transformación lineal

Sea T: V → W una transformación lineal, donde V y W son espacios vectoriales. Sean e_1 = (1, 0, 0, …, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0, …, 0), e_3 = (0, 0, 1 , 0, …, 0) , …, e_n = (0, 0, 0, …, 0, 1). Suponga que {e_1, e_2, e_3, …, e_n} es una base de V. Ahora, sea

$T(e_1) = w_1$, $T(e_2) = w_2$, $T(e_3) = w_3$, …, $T(e_n) = w_n$. Llamamos a A_T la matriz cuyas columnas son $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$.
Entonces a la **matriz A_T se le llama la representación matricial de T.**

Ejemplo
Encuentre la matriz de transformación A_t correspondiente a la proyección de un vector en R^3 sobre el plano *xy*.

Solución aquí $T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. En particular, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Así $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ observe que $A_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

5.3. Transformaciones y sistemas de ecuaciones lineales

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales que podemos escribir de forma tradicional así:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Un sistema así expresado tiene "**m**" ecuaciones y "**n**" incógnitas, donde a_{ij} son números reales, llamados **coeficientes del sistema**, los valores b_m son números reales, llamados **términos independientes** del sistema, las incógnitas x_j son las **variables** del sistema, y la solución del sistema es un conjunto ordenado de números reales $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tales que al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se verifican **a la vez** las "m" ecuaciones del sistema.

Este mismo **sistema de ecuaciones lineales** en notación matricial tiene esta forma:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes — Matriz de incognitas — Matriz de terminos indep.

Donde :

- Llamamos **matriz del sistema** a la matriz de dimensión $m \times n$ formada por los coeficientes del sistema, y la designamos por A.
- Designamos por X a la matriz columna formada por las incógnitas.
- Denotamos por B a la matriz columna formada por los términos independientes.

y llamamos **matriz ampliada** de dimensión $m \times (n+1)$ a la matriz que se obtiene al añadir a la matriz del sistema (= matriz de coeficientes) la columna de los términos independientes, y la denotamos por A^*, es decir

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

donde *A* es una matriz *m* por *n*, **x** es un vector columna de longitud *n* y **b** es otro vector columna de longitud *m*. El sistema anteriormente mencionado de eliminación de Gauss-Jordán se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes.

Si el cuerpo es infinito (como es el caso de los números reales o complejos), entonces solo puede darse una de las tres siguientes situaciones:

- el sistema no tiene solución (en dicho caso decimos que el sistema está sobredeterminado o que es incompatible)
- el sistema tiene una única solución (el sistema es compatible determinado)
- el sistema tiene un número infinito de soluciones (el sistema es compatible indeterminado).

La ecuación $2x - 3 = 0$ se llama ecuación lineal de una variable. Obviamente sólo tiene una solución.

La ecuación $-3x + 2y = 7$ se llama ecuación lineal de dos variables. Sus soluciones son pares ordenados de números. Tiene infinitas soluciones que se obtienen despejando una variable y dando valores cualesquiera a la otra.

La ecuación $x - 2y + 5z = 1$ se llama ecuación lineal de tres variables. Sus soluciones son ternas ordenadas de números. Tiene infinitas soluciones que se obtienen despejando una variable y dando valores cualesquiera a las otras dos.

En general, una ecuación lineal de "n" variables es del tipo :

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ [1]

los valores $a_1, a_2, \dots$ son los **coeficientes**

el valor b es el **término independiente**

y $x_1, x_2, x_3, \dots$ son las **incógnitas**

- Las soluciones son las secuencias de números $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ que hacen verdadera la igualdad [1]
- Si los coeficientes valen 0 y el término independiente no, la ecuación se llama **incompatible**. No tiene solución y también se denomina ecuación imposible, proposición falsa o igualdad absurda.
- Si los coeficientes y el término independiente son nulos, se dice que la ecuación es una identidad.

5.3.-TRANSFORMACIONES LINEALES

Una **transformación lineal** es un conjunto de operaciones que se realizan sobre un vector para convertirlo en otro vector. En ocasiones trabajar con vectores es muy sencillo ya que pueden ser fácilmente interpretados dentro de un contexto gráfico, lamentablemente no siempre ocurre y es necesario transformar a los vectores para poderlos trabajar más fácilmente.

Por otra parte, trabajar con sistemas lineales es mucho más sencillo que con sistemas no lineales, ya que se puede utilizar una técnica llamada superposición, la cual simplifica de gran manera gran variedad de cálculos, por lo que es de gran interés demostrar que un proceso puede ser reducido a un sistema lineal, lo cual solo puede lograrse demostrando que estas operaciones forman una transformación lineal.

Se denomina **transformación lineal**, **función lineal** o **aplicación lineal** a toda aplicación cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales y se cumplan las siguientes condiciones:

Sean *V* y *W* espacios vectoriales sobre el mismo campo *K*, y *T* una función de *V* en *W*. *T* es una transformación lineal si para cada par de vectores de *u* y *v* pertenecientes a *V* y para cada escalar *k* perteneciente a *K*, se satisface que:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(ku) = kT(u)$ donde k es un escalar.

Representación matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = b$$

Representacion vectorial

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones que tienen n incógnitas, las cuales podemos representar en una notación matricial, se puede utilizar una técnica llamada superposición, la cual simplifica de gran manera gran variedad de cálculos, por lo que es de gran interés demostrar que un proceso puede ser reducido a un sistema lineal, lo cual solo puede lograrse demostrando que estas operaciones forman una transformación lineal.

A partir de una ecuación lineal podemos hacerle las transformaciones lineales para tener como resultado escalares.

Por ejemplo

T: $R^2 \longrightarrow R^2$ dado por T(X, Y)= (2X, X+2Y). Suponiendo que A (2,2) Y B (1,2). Determinar la T(A+B)

T(A+B)= (2+1, 2+2)

= 2(2)+2(1), 2+2(2)+ 1+2(2)

$= (4 + 2 , \quad 6 + 2)$

$= (6 \quad , \quad 11)$

5.5 Algebra de la Transformaciones lineales

Suma

Se define la suma C=A+B donde A y B son transformaciones lineales para hace la función C(x)=A(x)+B(x). Puede facilmente verificarse que es tambien yna transformacion lineal. Puede verificar que se dan dos transformaciones lineales A y B, tales que

1. A+B=B+A
2. (A+B)+C=C+(B+A)
3. A+0=A
4. A+(-A)=0

donde 0 es el operador cero, -A es la función -A(x) el cual puede fácilmente verificar que se ha dado una transformacion lineal.

Multiplicacion escalar

Dada una transformación a, definida por la función μA donde μ es un elemento de un campo para hacer la función $(\mu A)(x) = \mu(A(x))$.
Usted puede verificar fácilmente que dado las transformaciones lineales A y B y unos elementos del campo μ, μ_1, y μ_2, tales que

1. $\mu_1(\mu_2 A) = (\mu_1\mu_2)A$

2. $1A = A$

3. $(\mu_1 + \mu_2)A = \mu_1 A + \mu_2 A$

4. $\mu(A + B) = \mu A + \mu B$

Esto implica la forma lineal de las transformaciones en un espacio de vector
.

Multiplicación

Dado una transformación linear A de X a Y y una transformación linear B de Y a Z, entonces defina la función AB de X a Z para ser la composición de las dos funciones.
Puede verificarse fácilmente de que esto sea también una transformación lineal. Aquí están algunas relaciones útiles que pueden ser verificadas fácilmente:

1. μ(*AB*) = (μ*A*)*B*
2. (*A* + *B*)*C* = *AC* + *BC*
3. *C*(*A* + *B*) = *CA* + *CB*
4. (*AB*)*C* = *A*(*BC*).
5.

5.5.. Aplicación de transformaciones lineales

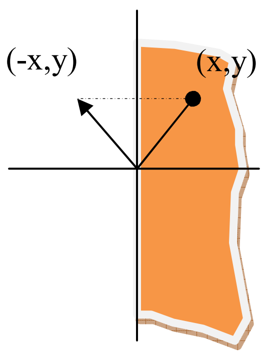
Las transformaciones lineales son útiles en la graficas por computadora. Estas interpretaciones geométricas se son representadas por matrices elementales de 2 x 2. A continuación se hace un resumen de los diversos tipos de matrices elementales 2x2 .

Matrices elementales de transformaciones lineales en un plano

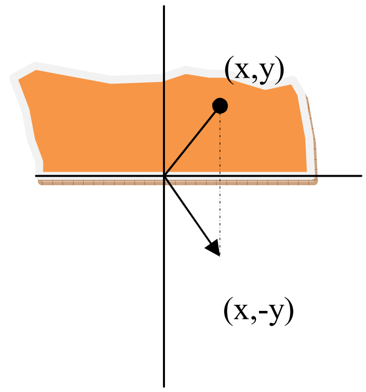
<table>
<tr>
<td colspan="2">Reflexión en el eje y
$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td colspan="2">Reflexión en el eje x
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$</td>
<td colspan="2">Reflexión en el eje y=x
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Expansión Horizontal(k>1)
ó Contracción (0<k<1)
$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td colspan="3">Expansión vertical(k>1)
ó Contracción (0<k<1)
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Desplazamiento Horizontal
$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$</td>
<td colspan="3">Desplazamiento vertical
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$</td>
</tr>
</table>

Ejemplo

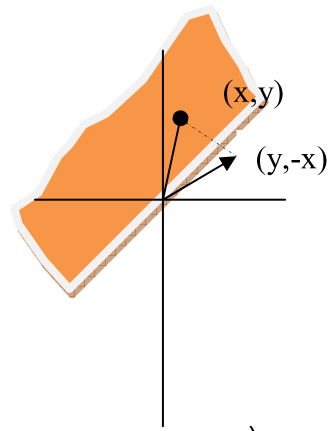
Las matrices definidas por las siguiente transformaciones se denomina reflexiones. Las reflexiones tiene el efecto de mapear un punto del plano xy Con su imagen "especular¨"con respecto al os ejes de de coordenadas o a la recta definida x=y. Como se muestra en la siguiente figura.



a) .



b).



c).

a) Reflexión en el eje y:

$$T(x,y)=(-x,y)$$
$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x\\ y\end{bmatrix}$$

b) Reflexión en el eje x:

$$T(x,y)=(x,-y)$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix}$$

c) Reflexión en el eje y=x:

$$T(x,y)=(y,x)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ x\end{bmatrix}$$

EJERCICIO

El alumno:

*Determinar el kernel de la siguiente transformación lineal

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \rightsquigarrow & (x - 2y + z, 2x + 3y + 2z) \end{array}$$

*Un hecho fundamental es que T_A es una transformación lineal entre los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n$

*Investigar los teoremas de las Transformaciones lineales

*determinar la matriz estándar de una transformación lineal

$T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por T(x,y,z)=(x-2y,2x+y)

- Las transformaciones definidas por los siguientes matrices son deslizamientos.

  $T(x, y) = (x + ky, y)$ $\qquad$ $T(x, y) = (x, y + kx)$

  $\begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$

  Establezca el deslizamiento horizontal el cual está definido por T(x,y)=(x+2y,y)