6.Valores y Vectores Característicos

6.1 Definición de valores y vectores característicos de una matriz cuadrada

El cálculo de los valores propios y de los vectores propios de una matriz simétrica tiene gran importancia en las matemáticas y en la ingeniería, entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz, el cálculo de los momentos de inercia y de los ejes principales de inercia de un sólido rígido, o de las frecuencias propias de oscilación de un sistema oscilante.

Se denominan valores propios o raíces características de una matriz cuadrada *A*, a los valores de a_{nm} tales que.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{00} - \lambda & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ a_{n-10} & a_{n-11} & \dots & a_{n-1n-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante tenemos un polinomio de grado *n*. Trataremos de encontrar los coeficientes del polinomio, y luego aplicaremos un método de hallar las raíces del polinomio. Este procedimiento es apropiado cuando se presentan valores propios que no son reales sino complejos.

Una vez hallados los valores propios, para hallar el vector propio *X* correspondiente al valor propio λ es necesario resolver el sistema homogéneo

$AX = \lambda X$ donde λ es el valor característico y A,*X* son los vectores característicos

donde el vector *X* es $X = \{x_0, x_1, \dots x_{n-1}\}$ Siempre podemos tomar x_0 como 1, y hallar las otras *n-1* incógnitas. De las *n* ecuaciones podemos tomar *n-1*, y resolver el sistema lineal.

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n-1}x_{n-1} = -a_{10} \\ &a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots a_{2n-1}x_{n-1} = -a_{20} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n-11}x_1 + a_{n-12}x_2 + \dots (a_{n-1n-1} - \lambda)x_{n-1} = -a_{n-10} \end{aligned}$$

Ejemplo:

Dada $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ comprobar que $x_1=(1,0)$ es un vector característico de A correspondiente al valor característico $\lambda_1=2$, y que $x_2=(0,1)$ es un valor característico de A correspondiente al valor característico de $\lambda_2=-1$

Solución

$AX_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ entonces $AX_1=\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

Por otro lado tenemos

$AX_2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ entonces $AX_2=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

Se comprueba el texto

6.2 polinomio característico y ecuación característica

polinomio característico $\Delta(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ y encontrar sus raíces. Cada raíz de $\Delta(\lambda)$ será un valor propio de $\mathbf{A}$. Los vectores propios pueden obtenerse directamente . Debido a que los valores propios resultan ser las raíces del polinomio característico, éstos pueden ser reales o complejos, diferentes o repetidos.

Consideremos una matriz *n*-cuadrada arbitraria:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

La matriz (A - l·I_n), donde I_n es la matriz identidad *n*-cuadrada y l un escalar indeterminado, se denomina matriz característica de *A*:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Su determinante, det (A - l·I_n) , que es un polinomio en l, recibe el nombre de polinomio característico de A. Asimismo, llamamos a
det (A - l·I_n) = 0

ecuación característica de a

Ejemplo 1:
Hallar la matriz característica y el polinomio característico de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz característica será (A - l·I_n). Luego:

$$(A - \lambda \cdot I_n) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico,

$$\det(A - \lambda In) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(0-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda + 4.$$

Así pues, el polinomio característico es: l^2 - l + 4.

6.3.-Determinación de Valores y Vectores Característicos

Después de lo anteriormente visto podemos concluir que para determinar los valores y vectores característicos seguimos estos pasos.

Sea A una matriz n x n

1. Forme la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$ .Será una ecuación polinomial de grado n en la variable λ .
2. Determine las raíces reales de la ecuación característica. Estas son los valores característicos de A.
3. Para todo valor característico de λ_i ,determine los vectores característicos correspondientes a λ_i , al resolver el sistema homogéneo $(\lambda_i I - A)$x=0.Para llevar a cabo lo anterior se requiere reducir por renglones una matriz n x n. La forma resultante escalonada reducida debe contener por lo menos un renglón de ceros.

6.4. Diagonalización de Matrices, Potencias, Raíces de Matrices, Raíces simétricas y Diagonalización ortogonal

Recordando que dos matrices cuadradas A y B son semejantes si existe una matriz invertible P tal que
$B = P^{-1}AP$
Las matrices semejantes a las matrices diagonales se llaman diagonalizables
Definición de una matriz diagonalizable.

Una matriz A=nxn es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal. Es decir A es diagonalizable si existe una matriz invertible P tal que.

. $P^{-1}AP$ es un matriz diagonal.

Si A y B son semejantes nxn entonces tienen los mismos valores característicos.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ entonces $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene la propiedad de que.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Potencia de una matriz

Si *A* es una matriz de *n* x *n* y si *k* es un entero positivo, entonces *Ak* denota el producto de *k* copias de *A*:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{K\ veces}$$

EJEMPLO:

A=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

K= 2.

Multiplicación de matrices.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

La Potencia de una Matriz

- La potencia de una matriz puede ser calculada sumando las entradas de la matriz de dominio de un paso y la matriz de dominio de dos pasos.
- La potencia del equipo es asociada con el i-esimo renglon de la matriz A + A2.

$$\boldsymbol{A + A^2 =} \left\{ \begin{bmatrix} 00110 \\ 10101 \\ 00010 \\ 01000 \\ 10110 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 01010 \\ 10230 \\ 01000 \\ 10101 \\ 01120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 01120 \\ 20331 \\ 01010 \\ 11101 \\ 11230 \end{bmatrix}$$

Raíz de una Matriz

Para una Matriz A (nXn) con valores λ_i y correspondiente vector característico $\mathbf{v_i}$, puede usarse La relación

$$A^x \mathbf{v_i} = \lambda^x \mathbf{v_i}$$

con x = ½ para definir la raíz cuadrada de una matriz A especificando $\sqrt{A}$ debe ser una matriz que satisface la relación

$A^{1/2}\mathbf{v_i} = \boldsymbol{\lambda}^{1/2}\mathbf{v_i}$

Para i= 1, 2, …, n.

Para comprobar razonablemente el valor de este, puede usarse una computaora para calcular el valor de $\sqrt{A}$ hacienda uso de la analogía con la serie de Taylor de una función de una variable real o compleja, donde la función f(x) es una expansion cerca de un centro x = a:

$$f(x) = \frac{f^{[n]}(a)}{n!}(x-a)^n \ .$$

Tomando a = 1 y derivando, se puede ampliar f(x) = $x^{1/2}$ como la representación de series

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4(2!)}(x-1)^2 + \frac{1(3)}{8(3!)}(x-1)^3 - \frac{1(3)(5)}{16(4!)}(x-1)^4 + \frac{1(3)(5)(7)}{32(5!)}(x-1)^5 - \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-2)!}(x-1)^n$$

Con el radio de convergencia ρ = 1.

La analogía, para una función de una matriz cuadrada A en lugar de un real o complejo variable x, con el fin de calcular la raíz cuadrada de un valor caracteristico, es emplear la matriz de identidad I en el papel de la número 1 (el centro de la serie) y para el tratamiento de las competencias (AI) n en términos de matriz de multiplicación:

$$M = f(A) = \sqrt{A} = I + \frac{1}{2}(A-I) - \frac{1}{4(2!)}(A-I)^2 + \frac{1(3)}{8(3!)}(A-I)^3 - \frac{1(3)(5)}{16(4!)}(A-I)^4 + \frac{1(3)(5)(7)}{32(5!)}(A-I)^5 - \ldots$$

en virtud de una adecuada convergencia condición, que como veremos puede ser fácilmente determinado, al menos en el caso de una matriz de Markov.

Ejemplo

Considere la matriz 2X2 a traveés de la matriz de transición de Markov

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} \text{ con } A - I = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Cuando hacemos A-I encontramos

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0.14 & -0.35 \\ -0.14 & 0.35 \end{pmatrix} = (-0.7)(A-I),$$

$$(A-I)^3 = \begin{pmatrix} -0.098 & 0.245 \\ 0.098 & -0.245 \end{pmatrix} = (-0.7)^2(A-I),$$

Y en general

$$(A-I)^n = (-0.7)^{n-1}(A-I),$$

Donde facilemente se muestra,que para una matriz de Markov 2X2 A con valores característicos λ_1 y λ_2, el factor (-0.7) en general representa (A-I) (la suma de los valores caracteristicos A-I), los cuales son $\lambda_1 + \lambda_2 - 2$. (Cosas analogas son verdaderas para matrices de Markovde un orden más alto.)

Cuando escribimos $(-0.7)^{n-1}$(A-I) for $(A\text{-}I)^n$ en la matriz-valor matrix-valued de la serie de Taylos para $A^{1/2}$, obntenemos

$$\sqrt{A} = I + (A-I)[\frac{1}{2} + \frac{1}{4(2!)}(0.7) + \frac{1(3)}{8(3!)}(0.7)^2 + \frac{1(3)(5)}{16(4!)}(0.7)^3 + \frac{1(3)(5)(7)}{32(5!)}(0.7)^4 + ...]$$

que, si uno sigue el coeficiente de serie para los primeros catorce términos (la convergencia está bastante lenta) produce el resultado

$$\sqrt{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix}[0.5 + 0.0875 + 0.030625 + 0.013398438 + 0.006565234$$
$$+ 0.003446748 + 0.001895711 + 0.001078186 + 0.000628942 + 0.000374220$$
$$+ 0.000226233 + 0.000138568 + 0.000085805 + 0.000053628 + ...]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.646016714\begin{pmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.870796657 & 0.323008357 \\ 0.129203343 & 0.676991643 \end{pmatrix}.$$

Raíz cuadrada de una matriz simétrica

Este ejercicios se relaciona con el hallazgo de las coordenadas de vectores de una matriz Gramiam de los vectores. Es decir.
Si M es cualquier Matriz entonces nosotros le llamaremos Matriz simétrica G = M0M el cuadrado de M.
Nosotros podemos pensar de M como la raíz cuadrada de G.
Una Matriz es llamada Diagonal A Si todos las entradas sobre la diagonal no son cero. Si Todas las entradas de la matriz W son positivas, entonces es fácil

encontrar la raíz cuadrada, Acaba de tomar la raíz cuadrada de cada entrada de la diagonal. Llamada la Matriz resultante W1 / 2.
En lo que sigue suponemos que los valores propios de G son positivos. Nosotros decimos que G es positiva definida.
Estos son los pasos para encontrar la raíz cuadrada de una matriz simétrica positiva definida G.
Esto funciona si los valores propios son distintos (que que casi siempre son).:

(1) Buscar la vectores característicos y valores propios de G
(2) Poner los valores propios en una matriz diagonal E
(3) Ponga las correspondientes vectores propios en las columnas de una matriz V
(4) Compruebe que GV V = E y W = V 0 V es diagonal.
(5) Que M = (W1 / 2) -1E1/2V 0, entonces M es una raíz cuadrada de G, es decir, M0M = G.

Diagonalización ortogonal de un Matriz

Una matriz diremos que es ortogonal si su traspuesta coincide con su inversa.

$$P \text{ ortogonal} \iff P^{-1} = P^t$$

Si $P = (u_1|u_2|\cdots|u_n)$ resulta que decir que Pes ortogonal, es equivalente a decir que los vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ son ortonormales (respecto al producto escalar habitual) Para las matrices reales y simétricas podemos dar una diagonalización donde la matriz de paso es ortogonal. Esto es lo que se entiende por diagonalización ortogonal.

Ejemplo
Una matriz no diagonalizable

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ como A es triangular los elementos característicos son simplemente los de la diagonal principal. Así el valor característico es $\lambda = 1$ La Matriz (I-A) tiene la siguiente forma escalonada

$I - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$esto implica que X_2=0, y al hacer x_1=t se encuentra que todo valor característico de A es de la forma

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ por lo tanto A no contiene dos vectores característicos linealmente independientes y entonces se concluye que A no es diagonalizable.

6.5. Formas Cuadráticas

Formas cuadráticas

Una forma cuadrática en $\mathbf{R}^n$ es una función **Q** definida en $\mathbf{R}^n$ cuyo valor en un vector **x** en $\mathbf{R}^n$ puede calcularse por medio de una expresión de la forma $Q(x)=x^tAx$ donde A es una matriz simétrica nxn. La matriz A se llama Matriz de forma cuadrática.

Una aplicación $q: V \to K$ es una forma cuadrática, si ocurre que

1. $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\forall \ \lambda \in K$, $v \in V$.
2. La aplicación $f_q: V \times V \to K$ definida como

$$f_q(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

es una forma bilineal simétrica. f_q se denomina la forma polar asociada a la forma cuadrática q.

Ejemplo:

Sea $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ calcular x^tAx para las siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

solución

$$x^t Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = 4x_1^2 + 3x_2^2$$

6.6. Teorema de Caley-Hamilton

Suponga que A es diagonalizable y que p(t) es el polinomio característico de A. Defina $p(A)=c_0I+c_1A+c_2A^2+...+c_nA^n$ y demuestre que p(A) es la matriz cero.Este hecho que es cierto para cualquier matriz cuadrada se le conoce como Teorema de Cayley-Hamilton

6.7.- Aplicaciones

Las formas cuadráticas pueden utilizarse para analizar ecuaciones de superficie cuadráticas en el espacio. Para esto la forma cuadrática de la ecuación

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fxz + gx + hy + iz + j = 0$

Se define como $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fxz$. La Matriz correspondiente es

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}$$

También podemos encontrar uso en el cálculo de crecimiento de población para calcular distribución de edades .El número de descendencia de cada miembro de la población.

Los valores y vectores propios se utilizan en diversos campos de la Ingeniería y las matemáticas. Algunos de estos campos son:

- Ecuaciones diferenciales.
- Estabilidad de sistemas lineales.
- Polos y ceros de funciones de transferencia.
- Diagonalización de matrices.
- Sistemas eléctricos.

EJERCICIO

El alumno:

1. Investigará El método de Leverrier
2. Encuentre los valores característicos y los vectores característicos de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Demostrar que dado A y B son semejantes entonces existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$

4.- Investigar el significado de una matriz gramian

5.- Sabiendo que f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) , f(1, 1, 0) = (1, 1, 1) y f(1, 1, 1) = (2, 1, 2) , estudiar si f es ortogonalmente diagonalizable y, en caso afirmativo, diagonalizar ortogonalmente f.

Bibliografía

-"Álgebra Matricial y Lineal".Serie Schaum; McGraw Hill.

-Friedberg Stephen H.; Insel Arnold J.; Spence Lawrence E."Algebra Lineal". Publicaciones Cultural. 1982, México.

- Godinez C. Héctor; Herrera C. J. Abel"Apuntes de álgebra lineal, teoría y ejercicios".Facultad de Ingeniería. UNAM. 1987, México.

- Granero Rodríguez Francisco."Álgebra y Geometría Analítica".McGraw Hill. 1985, México.

- Grossman Stanley I."Algebra Lineal".Grupo Editorial Iberoamericano. 1988, México.

- Lang Serge."Álgebra Lineal".Addison Wesley Iberoamericana. 1976, México.

- Lipschutz Seymour."Algebra Lineal".Serie Schaum, McGraw Hill.

- Rorres Chris – Howard Anton."Algebra Lineal".Limusa.

- Strang Gilbert."Álgebra lineal y sus aplicaciones".Addison Wisley Iberoamericana. 1986, México.