INTRODUCCION

Si estamos entre matemáticos, la palabra inducción nos sugiere el Principio de Inducción Matemática: Si una propiedad vale para 0 y si siempre que la propiedad vale para un número (natural) vale para su sucesor, entonces la propiedad vale para todos los números (naturales). Este famoso principio se hizo especialmente conocido como uno de los cinco postulados de Peano.

1. 1 es un número natural. (es decir, el conjunto de los números naturales no es vacío)
2. Si a es un número natural, entonces a+1 también es un número natural (llamado el sucesor de a).
3. 1 no es sucesor de ningún número natural. (primer elemento del conjunto)
4. Si hay dos números naturales a y b tales que sus sucesores son diferentes entonces a y b son números naturales diferentes.
5. Axioma de inducción: si un conjunto de números naturales contiene al 1 y a los sucesores de cada uno de sus elementos entonces contiene a todos los números naturales.

La *Inducción matemática* es definitivamente una forma de deducción. Es una inducción en el sentido en que generaliza a toda una clase a partir de unos pocos ejemplos. Es mas, usualmente la muestra está conformada por un caso, y la clase total es infinita!

La inducción matemática es deductiva, porque la muestra mas una regla acerca de los casos no examinados realmente da información sobre todo elemento de la clase. Así la conclusión de una inducción matemática no contiene más información que la que hay en las premisas. La inducción matemática por lo tanto concluye con certeza deductiva.

Un número es cualquier cosa que sea el número de una clase. En teoría axiomática de conjuntos un número natural es un elemento del mínimo conjunto inductivo, conjunto al que se le da el nombre de conjunto de los números naturales; por inductivo se entiende un conjunto S al que pertenece 0 y tal que si n pertenece a S, n + 1 también pertenece. Con esta definición lo que se está aceptando es que el principio de inducción matemática es inherente al concepto de número natural.

Como bien sabemos para probar una proposición por inducción procedemos como sigue: Mostramos que vale para 0, (o 1 o un determinado número). Luego suponemos que si es cierto para un número n mayor que 0 (o 1 o un determinado número), entonces probamos que vale para n+1. Entonces concluimos que vale para todos los números mayores que 0 (o 1 o un determinado número).

Consideremos una lista p (l), p (2), p (3),... de proposiciones con índices en P. Todas las proposiciones p(n) son verdaderas a condición de que:

- (B) p(l) sea verdadera;
- (I) p(n + 1) sea verdadera siempre que p (n) sea verdadera.

Nos referiremos a (B); es decir, al hecho que p (l) es verdadera, como la base de la inducción y nos referiremos a (1) como el paso inductivo. En la notación del cálculo preposicional, el paso inductivo es equivalente a:

La implicación p(n) → p (n + 1) es verdadera para todo n € P.

1.1.Los números enteros

Los números **enteros** se definen como el conjunto de los números Z={...,-2,-1,0,1,2,3,...}. Dentro de este conjunto está el subconjunto de los números **naturales**, N={1,2,3,4,...}. Es decir, el subconjunto de los números enteros positivos (mayores que 0).

Pueden definirse en Z dos operaciones internas binarias **+** , **.** : Z x Z $\Rightarrow$ Z, a las que llamamos *suma* y *producto*, respectivamente. Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

i. **Cerradas:** $a+b \in Z$ y $a.b \in Z$, $\forall a,b \in Z$
ii. **Conmutativas:** $a+b = b+a$, $a.b = b.a$, $\forall$ a,b $\in$ Z
iii. **Asociativas:** $a+(b+c) = (a+b)+c$, $a.(b.c) = (a.b).c$, $\forall$ a,b $\in$ Z
iv. **Existencia de elementos neutros:** $a+0 = a$, $a.1 = a$, $\forall$ a $\in$ Z
v. **Existencia de elemento opuesto para la suma:** $\forall$a $\in$Z existe -a $\in$ Z tal que $a + (-a) = 0$
vi. **Cancelativa:** Si a es distinto de 0, y $a.b = a.c$ entonces $b = c$
vii. **Distributiva:** $a.(b+c) = a.b + a.c$ $\forall$ a,b,c $\in$ Z

La ordenación de los números enteros

En Z se puede definir una relación de orden total, con el orden usual **$\leq$**. Así, para cualesquiera dos elementos distintos de Z, $a \leq b$ o bien $b \leq a$. Es decir, Z es un conjunto **totalmente ordenado.**

Esta relación de orden total es compatible con la suma y el producto:

$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$, para todo entero c.

$a \leq b \Rightarrow a.c \leq b.c$, para todo entero c mayor que 0.

Dado un $(A,\leq)$ conjunto ordenado y dado un subconjunto no vacío S de A, se dice que:

- c $\in$ A es **cota inferior** de S si $c \leq x$, para todo x $\in$ S
- m $\in$ S es **mínimo** de S si $m \leq x$, para todo x $\in$ S

Se dice por tanto que S está **acotado inferiormente** si existe un elemento c $\in$ A que es cota inferior de S.

1.2. El principio del buen orden

Dados dos enteros diferentes x, y sabemos que x<y ó y<x. Sin embargo estos también es cierto si, en vez de ser enteros x y y son números racionales ó números reales. ¿Qué hace especial a Z en este caso? Supongamos que tratamos de expresar el subconjunto Z^+ de Z , mediante los simbolos de desigualdad <y $\geq$.Vemos que podemos definir el conjunto de los elementos positivo de Z como

$$Z^+ = \{x \in z | x > 0\} = \{x \in z | x \geq 1\}$$

No obstante. Cuando intentamos hacer lo mismo con los números racionales y reales , vemos que

$$Q^+ = \{x \in Q | x > 0\} \text{ y } R^+ = \{x \in R | x > 0\}$$

Pero no podemos representar Q^+ o R^+ con $\geq$ como lo hicimos con $Z^{+.}$

El conjunto de Z^+ es diferente de los conjuntos Q^+ y R^+ por el hecho de que todo subconjunto no vacio de X de Z^+ es diferente contiene un entero $a \in X$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$; es decir X contiene un elemento *menor(o mínimo).Esto no ocurre pata* ***Q***$^+$ *y* ***R***$^+$*.* Estos conjuntos en si mismos no contienen elementos mínimos: no existe un número racional positivo ni un número real positivo mínimo*.* Si q es un número racional positivo, entonces , como 0<q/2<q, tendríamos un número racional positivo más pequeño q/2.

Estas observaciones dan lugar a la siguiente propiedad del conjunto $Z^+ \subset Z$.

Principio del buen orden: Cualquier subconjunto no vacio de Z^+ contiene un elemento mínimo (con frecuencia decimos entonces que Z^+ es bien ordenado). .

Este principio sirve para distinguir a Z de Q o R . Pero ¿Condice a algo que sea interesante ó útil desde el punto de vista matemático? La respuesta es si, Es la base de una técnica de demostración conocida cono inducción matemática . Esta técnica nos ayudará con frecuencia para demostrar una proposición matematica general relacionada con los enteros positivos, cuando algunos casos de esta proposición sugieran un patrón general.

Axioma de buena ordenación en (Z , $\leq$)

Si **X** es un subconjunto no vacío de Z y está acotado inferiormente, entonces **X** tiene mínimo (habrá pues siempre un **primer elemento** del conjunto).

Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que un subconjunto de los números naturales también tendrá mínimo, evidentemente.

1.3 El principio de inducción matemática

Formulación del principio de inducción:

Sea $S \subset N$ tal que

i. $1 \in S$
ii. si $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

Entonces S = N.

Si la pertenencia al conjunto S viene determinada por una propiedad ***P*** que queramos probar, podríamos utilizar el principio de inducción para demostrar que esa propiedad se satisface para todo entero positivo.

Otra formulación del principio de inducción:

Dado un enunciado ***P*** dependiente de un parámetro $\mathbf{n} \in Z$, supongamos que se demuestra que:

i. ***P***(n_0) es cierto para un cierto $n_0 \in Z$
ii. Siempre que ***P***(k) es cierto para cualquier entero $k \geq n_0$, entonces es cierto para el siguiente entero ***P***(k+1).

Entonces podemos afirmar que ***P***(n) es cierto $\forall n \in Z$ con $n \geq n_0$

La demostración de un enunciado matemático mediante el principio de inducción, consiste primero en probar que para el caso básico inicial de n_0 se satisface el enunciado. Después supondremos que se cumple para un determinado valor *k* mayor que n_0 (a esta suposición se la llama ***hipótesis de inducción***) y comprobamos si se satisface también para *k*+1. Si también se cumple el enunciado para *k*+1, entonces quedará demostrado que se cumple el enunciado para todo entero mayor o igual que n_0.

El principio de inducción fuerte:

A veces resulta conveniente tomar como hipótesis de inducción la suposición de que el resultado es cierto para **todos** los valores anteriores relevantes n $\leq$ k, en lugar de suponer cierto sólo el caso n = k. Esta variante del principio de inducción se la suele llamar ***principio de inducción fuerte***, que se formularía así:

Dado un enunciado ***P***(n) dependiente de un parámetro **n** $\in$ Z, supongamos que se demuestra que:

i. ***P***(n_0) es cierto para un cierto $n_0 \in Z$
ii. Siempre que ***P***(m) es cierto para cualquier entero $n_0 \leq m \leq k$, entonces ***P***(k+1) es cierto.

Entonces podemos afirmar que ***P***(n) es cierto $\forall n \in Z$ con $n \geq n_0$

1.4. Principio de inclusión-Exclusión

Existen situaciones en las que el principio de la suma no es aplicable, porque los conjuntos involucrados no son disjuntos. En casos así, resulta útil el siguiente teorema, que permite calcular el cardinal de la unión de una familia de conjuntos finitos aunque no sean disjuntos dos a dos.

Teorema 11. *(Principio de inclusión-exclusión) Si* $A_1; A_2; \ldots; A_n$ *es una colección* *de conjuntos finitos, se verifica que*

$$\left|A_1 \cup A \ \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_{1 \le i \le n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i \le j \le n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$\sum_{1 \le i \le j \le k \le n} \left|A_1 \cap A_j \cap A_k\right| - \cdots + (-i)^{n+1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

Demostración. Supongamos que un cierto elemento *a*

$\in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cap A_n$ pertenece *exactamente* a *r* de los *n* conjuntos A_i . Es fácil ver que dicho elemento contribuirá *r* unidades al primer sumando de la expresión 1.11. Del mismo modo, al segundo $\binom{r}{2}$ sumando contribuirá unidades, puesto que *a* se halla presente en todos los $A_i \cup A_j$ que podemos formar escogiendo *i*; *j* entre los *r* índices de los A_i en que *a* se halla presente. Concluimos razonando análogamente para los sumandos siguientes que, si *a* $\in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cap A_n$ pertenece a exactamente *r* de los conjuntos A_i , su contribución
a la suma total de es

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \cdots + (-1)^r \binom{r}{r}$$

r

Del teorema del binomio deducimos que

$$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \binom{r}{3} + \cdots + (-l)^r \binom{r}{r} = (1-l)^r \ = 0$$

por lo que la contribución indicada es igual a la unidad. Entonces, cada elemento de la unión contribuye en una unidad a la suma de arriba, y entonces su valor será

$\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cap A_n\right|$ □

El principio de inclusión-exclusión recibe este nombre del método que usa para contabilizar elementos: al sumar $\left||A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|\right|$ los miembros de los conjuntos de la forma $A_i \cap A_j$ están siendo contabilizados por duplicado. Por lo tanto, tenemos que descontarlos de esa suma, lo que explica la aparición del sustraendo $-|A_1 \cap A_2| - |A_{n-1} \cap A_n|$, que involucra todos los pares de conjuntos aludidos. Ahora bien, al hacer esto estamos (indebidamente) sustrayendo una vez más todos los miembros de intersecciones $A_i \cap A_j \cap A_k$, por lo que volvemos a contabilizarlos añadiendo los sumandos $|A \cap A_2 \cap A_3| + \cdots |A_{n-2} + A_{n-1} + A_n|$. Y se prosigue así, sumando y restando hasta llegar al último termino.

Ejemplo 5. *¿Cuántas permutaciones del conjunto* $X = \{1 \quad 2 \quad 3 \cdots \quad n\}$ *mueven todos los elementos del conjunto a una posición diferente de la original?*

Podemos resolver este problema del modo siguiente. Consideremos el conjunto A formado por todas las permutaciones de los n elementos: claramente, $|A| = n!$. De éstas, consideremos la clase de las permutaciones que dejan al elemento 1 en primera posición; llamemos a esta clase A_1, y, análogamente, definamos A_k como la clase de las permutaciones en que el número k queda fijo, ocupando la k-ésima posición. Como cada permutación de A_1 involucra reordenar solamente los n -1 elementos restantes, tenemos que $|A_1| = (n-1)!$, y análogamente para cada A_k .

Por otra parte, el conjunto $A_i \cap A_j$ está formado por permutaciones en que escoge-mos la posición de i y j , de manera que tenemos .$(n-2)!$ permutaciones posibles. En general

$$|A_{j1} \cap A_{j2} \cap \cdots \cap A_{jk}| = (n-k)!$$

es decir, cada conjunto de permutaciones que fija al menos *k* elementos contiene (.*n* – *k*)! permutaciones posibles.

Aplicando entonces la fórmula :

$$\left|A_1 \cup A \quad \cup \cdots \cup A_n\right| = \sum_{1\le i\le n}\left|A_i\right| - \sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le n}\left|A_1 \cap A_j \cap A_k\right| - \cdots + (-i)^{n+1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

....1.11

Tenemos

$$\left|A_1 \cup A \quad \cup \cdots \cup A_n\right| =$$

$$n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

puesto que el número de sumandos de cada término de (1.11) es $\binom{n}{k}$ Ahora, la suma anterior se simplifica considerablemente expandiendo los coeficientes binomiales por medio de su forma factorial:

$$\frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! - \frac{n!}{4!(n-4)!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!0!}0! =$$

$$\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{\acute{}n+1}\frac{n!}{n!}$$

Esta es la expresión del número de permutaciones que *fijan* algún elemento. Como queremos calcular exactamente lo contrario, obtenemos

Lo sorprendente de este resultado es que el factor entre paréntesis es, con una aproximación muy elevada, igual a 1**/***e*= 0**.**3678, siendo *e* la base de los logaritmos neperianos. La aproximación es tan buena que podemos escribir

$$D_n \approx \frac{n!}{e}$$

siendo la fórmula exacta si redondeamos el cociente al entero más próximo. Por ejemplo, para *n* **=** 8, obtenemos 8! ***/*** *e* **=** 14832**.**899, siendo D_n **=** 14833. La letra *D* proviene del término ***derangements***, que es como se denomina en la literatura anglosajona a este tipo de permutaciones que no dejan fijo ningún elemento.

Ejemplo 6. *Encontrar el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación.*

$x_1 + x_2 + x_3 = 12$ *……………………..(1.13)*

Sometidas a la restricción $x_1<6;x_2<4$

Consideremos los siguientes conjuntos:

$A = \{(x_1 \quad x_2 \quad x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = 12, x_1 \geq 0\}$ *……………………(1.14)*

$A_1 = \{(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \in A x_1 \geq 6\}$ *…………………………………(1.15)*

$A_2 = \{(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \in A x_1 \geq 4\}$ *……………………………….…(1.16)*

De donde

$A_{12} = A_1 \cap A_2 = \{(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \in A, x_1 \geq 6, x_2 \geq 4\}$ *……………(1.17)*

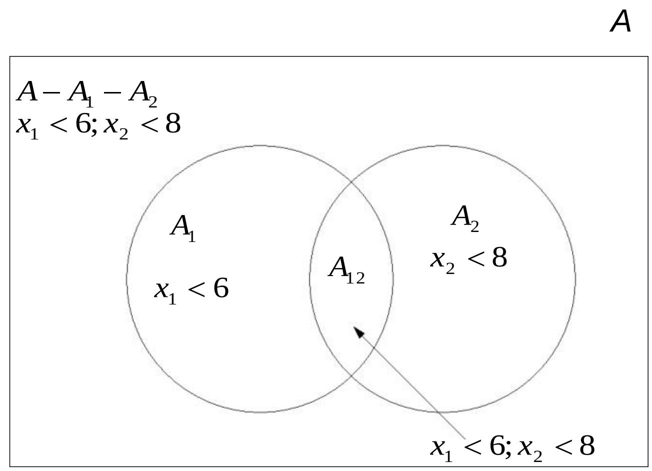


Figura 1.2: Representación esquemática del ejemplo 6

Podemos representar esquemáticamente la situación indicada por medio de la figura 1.2. Las soluciones que se nos exige contabilizar son las que no se encuentran ni en A_1 ni en A_2; es decir, tenemos que calcular el cardinal. $\left|A - A_1 - A_2\right| = |A| + \left|A_2\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|$ El último término se evalúa por medio del principio de inclusión-exclusión:

$$\left|A - A_1 - A_2\right| = |A| + \left|A_2\right| - \left|A_1 \cap A_2\right|$$

Como

$$|A| = CR(3,12) = \binom{14}{12} = \binom{14}{2} = 91 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1.18)}$$

$$\left|A_1\right| = CR(3,12-6) = \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1.19)}$$

$$\left|A_2\right| = CR(3,12-4) = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1.20)}$$

$$\left|A_{12}\right| = CR(3,12-6-4) = \binom{4}{2} = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1.21)}$$

Tenemos finalmente

$$\left|A - A_1 - A_2\right| = \left|A\right| - \left|A_2\right| + \left|A_1 \cap A_2\right| = 91 - 28 - 45 + 6 = 24$$

BIBLIOGRAFIA

- *Matemáticas Discretas y Combinatoria ;Ralph P. Grimaldi 3° edición Pretince Hall.*
- *Matematica Discretas Sexta edición Richard Johnsonbaugh; Pretince Hall.*
- *Matematicas Discretas eduard R. Sheninerman; thomson Leraning.*

Actividades Complementarias

Problema #1:Demostrar

●	●	●	●	●		● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ● ●
	● ●	● ●	● ●	● ●		● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ● ●
		● ● ●	● ● ●	● ● ●			● ● ● ●	● ● ● ● ●
			● ● ● ●	● ● ● ●				● ● ● ● ●
				● ● ● ● ●				
1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5		$\frac{2\times3}{2}$	$\frac{3\times4}{2}$	$\frac{4\times5}{2}$
1	3	6	10	15		3	6	10
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)		(b)	(c)	(d)

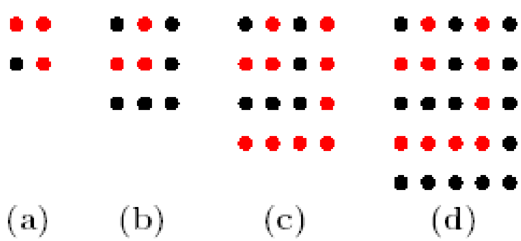
Los números obtenidos como se observa en la progresión anterior se llaman **triangulares** y como vemos se pueden obtener de dos maneras diferentes. Esas igualdades se pueden generalizar hoy con la fórmula demuestre que n pertenece a enteros naturales:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Actividades Complementarias

Problema #2:Demostrar

Los números que hoy conocemos como **cuadrados** recibieron su nombre en la época de los pitagóricos justamente porque se podían distribuir, como si fueran colecciones de puntos, en forma de cuadrado. Y esa progresión de cuadrados se obtiene sumando los números impares sucesivos.



(a) $1+3=4=2\times 2$
(a) $1+3+5=9=3\times 3$
(c) $1+3+5+7=16=4\times 4$
(d) $1+3+5+7+9=25=5\times 5$

(n) $1+3+5+7+9+\cdots+n=n\times n$

Hay dos ingredientes básicos para una demostración inductiva válida: la base y el paso inductivo. Además, por si hay alguna duda posible, debe quedar claro que se está dando una demostración por inducción.

Es importante enfatizar, que no se pide demostrar “p(n + 1) es verdadera." Simplemente demostrar que : “si p(n) es verdadera entonces p(n + 1) es verdadera.