2. Principio de Conteo

Partición de un Conjunto
Definición
Dado un conjunto A, diremos que los subconjuntos de A, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, constituyen una partición
del mismo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $A_i \neq \phi ; \forall i = 1,2,3,...,n$
2 $A_i \cap A_j = \phi ; \forall i \neq j, i, j = 1,2,3,...,n$
3. $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots A_n = A$

Recubrimiento
Si los subconjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de un conjunto A cumplen las condiciones 1. y 3. de la
definici´on anterior, diremos que $B_1, B_2, \ldots$,Bn constituyen un recubrimiento de A.

Cardinal de un conjunto
Si A es un conjunto finito no vacío, designaremos por cardinal de A al número de elementos que tiene A. Si A es el conjunto vacío, entonces su cardinal es cero. Lo notaremos |A|.

2.1.Principio de Adición

Estudiamos el mas básico y simple de los principios para contar elementos de un conjunto.
Teorema
Si A1,A2, . . . ,An es una colección de conjuntos finitos no vacíos, disjuntos dos a dos, entonces
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|$

Demostración
Procederemos por inducción sobre el numero de conjuntos n.
Paso básico
Veamos que el teorema es cierto para n = 2.
En efecto, sean A1 y A2 dos conjuntos finitos tales que A1 $\cap$ A2 =0 ;. Pues bien, si

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\} \text{ y } A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

al ser disjuntos no tendrán elementos comunes, de aquí que

$$A_1 \cup A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q, b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

Luego

$$|A_1 \cup A_2| = q + r = |A_1| + |A_2|$$

y el teorema es cierto para n = 2.
Paso inductivo. Supongamos que el teorema es cierto para n = p, es decir, si A1,A2, . . . ,Ap son una
familia de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, entonces

$$\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{i=1}^{p} |A_i|$$

Veamos que el teorema es cierto para n = p + 1. En efecto, sea $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1}$ una familia de conjuntos finitos y dos a dos disjuntos, entonces por la asociatividad de la unión de conjuntos,

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{p+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) \cup A_{p+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cup A_{p+1}$$

Siendo

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cap A_{p+1} &= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) \cap A_{p+1} \\
&= (A_1 \cap A_{p+1}) \cup (A_2 \cap A_{p+1}) \cup \cdots \cup (A_p \cap A_{p+1}) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cup A_{p+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| + |A_{p+1}| \qquad \{\text{Paso básico}\} \\
&= \sum_{i=1}^{p} |A_i| + |A_{p+1}| \qquad \{\text{Hipótesis de inducción}\} \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} |A_i|
\end{aligned}$$

Consecuentemente, por el primer principio de inducción, la propiedad es cierta para todo entero positivo
n y,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Obsérvese que en este tipo de problemas, la palabra “o” aparece o se sobrentiende implícitamente. En cualquier caso en el que tengamos una acción simple a realizar y que debe satisfacer una condición u otra siendo las condiciones mutuamente excluyentes, utilizaremos normalmente el principio de adición. Este primer principio del conteo puede expresarse como sigue:

Regla de la Suma
Si una primera tarea puede realizarse de m formas distintas, mientras que una segunda tarea puede
realizarse de n formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultanea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de m + n formas.

Ejemplo 3.3
Se lanza al aire una moneda cuatro veces. ¿De cuantas formas distintas pueden obtenerse una, dos, tres o cuatro caras?

Solución
Sea Ai el conjunto formado por todos los resultados posibles en los que aparezcan, exactamente, “i caras” al lanzar cuatro veces la moneda. Entonces,

$$A_1 = \{(c,x,x,x),(x,c,x,x),(x,x,c,x),(x,x,x,c)\}$$
$$A_2 = \{(c,c,x,x),(c,x,c,x),(c,x,x,c),(x,c,c,x),(x,c,x,c),(x,x,c,c)\}$$
$$A_3 = \{(c,c,c,x),(c,c,x,c),(c,x,c,c),(x,c,c,c)\}$$
$$A_4 = \{(c,c,c,c)\}$$

y el conjunto A1 ∪A2 ∪A3 ∪A4 estará formado por todos los resultados en los que aparecen una, dos, tres o cuatro caras, por tanto el número pedido es el cardinal de dicho conjunto. Al ser los Ai dos a dos disjuntos, por el principio de adición, tendremos que habrá

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 15$$

formas distintas de obtener una, dos, tres o cuatro caras.

Principio de Multiplicación

Este principio nos va a permitir resolver con más comodidad situaciones que involucren procesos que consistan en acciones sucesivas.
Supongamos una acción que consista en una secuencia de pasos. Por ejemplo tirar un dado, luego otro y a continuación un tercero. Diremos que los pasos son independientes si el número de formas en que puede hacerse cada uno de ellos no depende del número de formas en que pueden realizarse cada uno de los otros.
Teorema
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Demostración
Procederemos por inducción sobre el número de conjuntos, n.
Paso básico. Veamos si el teorema es cierto para n = 2. En efecto, sean A1 y A2 dos conjuntos finitos no vacíos,

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\} \text{ y } A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

Por definición de producto cartesiano,

$$A_1 \times A_2 = \{(a_i, b_j) : a_i \in A_1 \text{ y } b_j \in A_2\}$$

para cada uno de los ai, $\leq$ i $\leq$ q, tendremos los pares distintos,

$$(a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots, (a_i, b_r)$$

es decir, r pares o r elementos de A1 × A2. Haciendo lo mismo para cada uno de los ai $\in$Ai, , 1 $\leq$ i $\leq$ q , tendremos

$$\begin{array}{l}(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_r)\\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_r)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_q, b_1), (a_q, b_2), \ldots, (a_q, b_r)\end{array}$$

o sea, un total de q · r pares distintos en A1 × A2, luego

$$|A_1 \times A_2| = q \cdot r = |A_1| \cdot |A_2|$$

por tanto, la proposición es cierta para n = 2.

Paso inductivo. Supongamos que es cierta para n = p, es decir si A1,A2, . . . ,Ap es una colección de conjuntos finitos no vacíos. Entonces,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_p|$$

Veamos si la proposición es cierta para n = p + 1. En efecto, si $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1}$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces

$$\begin{aligned} |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p \times A_{p+1}| &= |(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p) \times A_{p+1}| && \{\text{Asociatividad de } \times\} \\ &= |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p| \cdot |A_{p+1}| && \{\text{Paso básico}\} \\ &= |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_p| \cdot |A_{p+1}| && \{\text{Paso inductivo}\} \end{aligned}$$

Consecuentemente, por el Principio de inducción matemática, el teorema es cierto para todo entero positivo, n, es decir,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Ejemplo

¿Cuántos resultados distintos son posibles al tirar tres dados diferentes?

Solución
Sean A_1,A_2 y A_3 los conjuntos formados por los posibles resultados que podamos obtener al tirar cada uno de los tres dados, entonces $|A_i| = 6$, $i = 1, 2, 3$ y cada resultado es un elemento del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3$, luego por el principio de multiplicación, habrá.

$$|A_1 \times A_2 \times A_3| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

resultados distintos.

Obsérvese que al ser diferentes los dados, podemos etiquetarlos como primero, segundo y tercero y tratar la tirada como una acción con tres pasos sucesivos, cada uno de las cuales tiene seis resultados posibles.
El número de posibilidades será, por tanto,

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Obsérvese también que si los dados no fueran diferentes, la respuesta sería distinta. Por ejemplo sería imposible distinguir entre el resultado 152 y el 251.

Regla del Producto

Si un procedimiento puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y si existen m resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento entero puede realizarse, en el orden dado, de mn formas.

Ejemplo
Se dispone de una baraja de 40 cartas de la cual extraemos cuatro de dos formas diferentes:

(a) Sin devolución de cada carta extraída.

(b) Con devolución de la carta en cada extracción.

Calcular el número de formas diferentes de obtener cuatro cartas en cada caso.

Solución

Consideraremos el experimento como una acción con cuatro pasos independientes.

Para el primer paso tenemos 40 opciones posibles y como la carta extraída no se devuelve quedarán 39 opciones para el segundo paso y, por la misma razón, 38 y 37 opciones para el tercero y el cuarto, respectivamente. Así pues el experimento podrá hacerse de

$40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2193360$

formas distintas.

(b) Cada carta extraída se devuelve a la baraja. Por tanto, para cada una de las cuatro extracciones.
Dispondremos de las cuarenta. Así pues, el número de formas diferentes de obtener las cuatro cartas es

$40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 = 2560000$

2.2. Permutaciones y combinaciones

Hay cuatro candidatos, Samuel , Ignacio Héctor y Vilma, postulados para el mismo puesto. Para que la posición de los nombres en las boletas de votación no influya en los votantes, es necesario imprimir boletas con los nombres en todos los órdenes posibles. ¿Cuántas boletas diferentes habrá?.
Se puede usar el principio de la multiplicación .Una boleta se elabora en cuatro pasos sucesivos: y se selecciona el cuarto nombre de la lista . El primer nombre se puede elegir de cuatro maneras. Cuando se tiene el segundo nombre, el tercero se puede elegir de dos maneras y el cuarto solo de una manera, el número de boletas diferentes es

4*3*2*1=24

Un ordenamiento de los objetos, como los nombres en las boletas, se llama **permutación.**

Definición

Una permutación de n elementos diferentes $x_1 \ldots\ldots, x_n$es un ordenamiento de los n elementos $x_1 \ldots\ldots, x_n$

Ejemplo

Existen seis permutaciones de tres elementos .Si se denotan los elementos por A,B,C las seis permutaciones son:

ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA

Se encontró que existen 24 maneras de ordenar cuatro candidatos en una boleta, así hay 24 permutaciones de cuatro objetos. El método que se usó para contar el número de boletas diferentes con cuatro nombres se puede usar para derivar una fórmula para el número de permutaciones.

La demostración del siguiente teorema para n=4 se ilustra en el siguiente cuadro.

B	$\rightarrow$	A	$\rightarrow$	D	$\rightarrow$	C
Elegir 1° elemento		Elegir el 2° elemento		Elegir el 3° elemento		Elegir el 4° elemento

Teorema

Existen **n!** permutaciones de **n** elementos

El primer elemento se puede seleccionar de **n** maneras una vez elegido el segundo elemento se pueden elegir de n-1 maneras. Una vez elegido , el tercer elemento se puede seleccionar de n-2 maneras, y así sucesivamente. Por el principio de multiplicación, existen

n(n-1)(n-2)…2*1=n!   permutaciones de n elementos.

Teorema

El número de permutaciones r de un conjunto de n objetos diferentes es

$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1),$ para $r \leq n$.

Debe de contarse el número de maneras de ordenar r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos. El primer elemento se puede elegir de n maneras . Una vez que se elige el primer elemento , el segundo se puede seleccionar de n-1 maneras. Continuaremos eligiendo elementos hasta que , habiendo elegido el elemento r-1 , pasamos al elemento r que se puede seleccionar de n-r+1 maneras. Por el principio de la multiplicación, el número de permutaciones r de un conjunto de n objetos distintos es

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1),$

Ejemplo

De acuerdo con el teorema el numero de permutaciones de 2 en X= $= \{a,b,c\}$ es $P(3,2) = (3\cdot 2) = 6$ estas seis permutaciones son:

Ab,ac,ba, bc, ca, cb.

Combinaciones

Dado un conjunto de $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ que contiene n elementos (diferentes),

a. Una combinación de r de X es una selección no ordenada de r elementos de X(es decir, un subconjunto de X de r elementos).
b. El número de combinaciones de r de un conjunto de n elementos distintos se denota por C(n,r) ó $\binom{n}{r}$.

El número de combinaciones de r de un conjunto de de n objetos distintos es

$$C(n,r) = \frac{P(n,r}{r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{para } r \le n$$

Ejemplo

¿De cuantas maneras se puede seleccionar un comité de dos mujeres y tres hombres de un grupo de cinco mujeres de y de seis hombres?

Denotamos que C(5,2)= 10
Donde también tenemos que C(6,3)=20

Maneras .El comité se construye en dos pasos sucesivos: se elige a las mujeres ;se elige a los hombres. Por el principio de la multiplicación, el número total del comité es

10*20=200

2.3 Identidades Básicas

Puesto que $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ y que *n* - (*n* - *r*) = *r* se tiene la siguiente identidad

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Otra identidad importantes es:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Otra identidad muy útil es

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Utilizando la identidad anterior para obtenr la suma 1 + 2 + ... + *n*

Es posible expresar

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n}{1}$$
$$= \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!2!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!2!} = \frac{(n+1)(n)}{2}$$

Teorema del Binomio

Los números $\binom{n}{r}$ se llaman coeficientes binomiales, pues aparecen en el desarrollo del binomio (*a* + *b*) elevado a alguna potencia.

Este teorema proporciona una fórmula para los coeficientes del desarrollo $(a + b)^n$. Ya que:

$$(a+b)^n = \overbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}^{n\ factores}$$

Si $n = 2$

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$.

Un término de la forma $a^{n-k}b^k$ proviene de tomar *a* de *n* - *k* factores, y *b* de *k* factores. Pero puede hacerse de $\binom{n}{k}$ formas, pues $\binom{n}{k}$ cuenta el número de formas de seleccionar *k* los *n* objetos dados. Por lo tanto $a^{n-k}b^k$ aparece $\binom{n}{k}$ veces. Luego

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Ahora enunciemos el Teorema del binomio.

Si a y b son números reales y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ejemplo:
Tomando n = 3 tenemos que:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Triángulo de Pascal
También pueden expresarse los coeficientes binomiales mediante un arreglo triangular conocido como Triángulo de Pascal. Los dos lados superiores están formados por números 1, y cualquier valor interior es la suma de los dos números que están por encima y a los lados del él, es decir:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
.
.
.

o bien, espresado en forma de coeficientes binomiales tenemos que:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}$$
$$\vdots$$

2.4 Coeficientes binomiales e Identidades combinatorias.

A primera vista , la expresión $(a+b)^n$ no tiene mucho que ver con combinaciones ; pero como se verá en esta sección , es posible obtener una fórmula para la expansión de $(a+b)^n$ usando al fórmula para el número de combinaciones r de n objetos. Con frecuencia , una expresión algebraica se relaciona con algún proceso de conteo. Varias técnicas de conteo avanzadas usan este tipo de métodos.

El teorema binomial proporciona una formula para los coeficientes en la expansión de $(a+b)^n$.Como

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{\text{N factores}} \qquad \text{......................................(2.4.1)}$$

La expresión es el resultado de seleccionar a ó b en cada uno de los n factores, multiplicando.

Tabla 2.4.1. Cálculo de $(a+b)^n$

Selección en el primer factor (a+b)	*Selección en el segundo factor (a+b)*	*Selección en el tercer factor (a+b)*	*Producto de selecciones*
a	*a*	*a*	$aaa=a^3$
a	*a*	*b*	$aab=a^2b$
a	*b*	*a*	$aba=a^2b$
a	*b*	*b*	$abb=ab^2$
b	*a*	*a*	$baa=a^2b$
b	*a*	*b*	$bab=ab^2$
b	*b*	*a*	$bba=ab^2$
b	*b*	*b*	$bbb=b^3$

Las selecciones y después sumando todos los productos obtenidos. Por ejemplo , en la expansión de (a+b)3, se elige ya se a ó b en el primer factor (a+b);ya sea a ó b en el segundo factor (a+b); y ya sea a ó b en el tercer factor (a+b); se multiplican las selecciones y luego se suman los productos obtenidos. Si se elige a en todos los factores y se multiplica, el resultado es el termino aaa. Si se elige a en el primer factor en el segundo y a en el tercero y se multiplica , se obtiene el término aba. La tabla muestra todas las posibilidades, se obtiene

$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}$$

$$= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

$$= a^3 + a^2b + a^2b + ab^2 + ba^2 + ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En la tabla , un término de la forma $a^{n-k}b^k$ surge al elegir b en k factores y a en los otros n-k factores. Pero esto se puede hacer de C(n,k) maneras, ya que C(n,k) cuenta el número de maneras de seleccionar k objetos entre n pbjetos.entonces $a^{n-k}b^k$ aparece C(n,k) veces. Se concluye que

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n b^o + C(n,1)a^{n-1}b^1 + C(n,2)a^{n-2}b^2$$
$$+\cdots + C(n,n-1)a^1 b^{n-1} + C(n,n)a^0 b^n$$

A este resultado se conoce como el teorema binomial.

Si a y b son números reales y n entero positivo, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k$$

BIBLIOGRAFIA

- *Matemáticas Discretas y Combinatoria ;Ralph P. Grimaldi 3° edición Pretince Hall.*
- *Matematica Discretas Sexta edición Richard Johnsonbaugh; Pretince Hall.*
- *Matematicas Discretas eduard R. Sheninerman; thomson Leraning.*

Actividades Complementarias

1- Si las placas de los automóviles constan de 2 letras seguidas de 4 dígitos, y ninguna letra o dígito se puede repetir, ¿cuántas placas diferentes son posibles?

2- un grupo de 5 personas va a sentarse en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

3- Use el teorema C(n+1,K)=C(n,k-1)+C(n,k) para $1 \leq k \leq n$ para demostrar que $\sum_{i=k}^{n} C(i,k) = C(n+1,k+1)$