3.- RELACIONES DE RECURRENCIA

3.1. REGLAS DE SUMA Y EL PRODUCTO

Principio de Adición

Este capitulo es un repaso del tema visto en el 2.1 de la unidad 2

Estudiamos el más básico y simple de los principios para contar elementos de un conjunto.
Teorema
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, disjuntos dos a dos, entonces

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|$$

Demostración
Procederemos por inducción sobre el numero de conjuntos n.
Paso básico
Veamos que el teorema es cierto para n = 2.
En efecto, sean A1 y A2 dos conjuntos finitos tales que A1 $\cap$ A2 =0 ;. Pues bien, si

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\} \text{ y } A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

al ser disjuntos no tendrán elementos comunes, de aquí que

$$A_1 \cup A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q, b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

Luego

$$|A_1 \cup A_2| = q + r = |A_1| + |A_2|$$

y el teorema es cierto para n = 2.
Paso inductivo. Supongamos que el teorema es cierto para n = p, es decir, si A1,A2, . . . ,Ap son una
familia de conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, entonces

$$\left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| = \sum_{i=1}^{p} |A_i|$$

Veamos que el teorema es cierto para n = p + 1. En efecto, sea $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1}$ una familia de conjuntos finitos y dos a dos disjuntos, entonces por la asociatividad de la unión de conjuntos,

$$\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p \cup A_{p+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) \cup A_{p+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cup A_{p+1}$$

Siendo

$$
\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cap A_{p+1} &= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) \cap A_{p+1} \\
&= (A_1 \cap A_{p+1}) \cup (A_2 \cap A_{p+1}) \cup \cdots \cup (A_p \cap A_{p+1}) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cup A_{p+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right| + |A_{p+1}| \qquad \{\text{Paso básico}\} \\
&= \sum_{i=1}^{p} |A_i| + |A_{p+1}| \qquad \{\text{Hipótesis de inducción}\} \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} |A_i|
\end{aligned}
$$

Consecuentemente, por el primer principio de inducción, la propiedad es cierta para todo entero positivo
n y,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Obsérvese que en este tipo de problemas, la palabra “o” aparece o se sobrentiende implícitamente. En cualquier caso en el que tengamos una acción simple a realizar y que debe satisfacer una condición u otra siendo las condiciones mutuamente excluyentes, utilizaremos normalmente el principio de adición. Este primer principio del conteo puede expresarse como sigue:

Regla de la Suma

Si una primera tarea puede realizarse de m formas distintas, mientras que una segunda tarea puede
realizarse de n formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultanea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de m + n formas.

Ejemplo 3.3

Se lanza al aire una moneda cuatro veces. ¿De cuantas formas distintas pueden obtenerse una, dos, tres o cuatro caras?

Solución

Sea Ai el conjunto formado por todos los resultados posibles en los que aparezcan, exactamente, “i caras” al lanzar cuatro veces la moneda. Entonces,

$$A_1 = \{(c,x,x,x),(x,c,x,x),(x,x,c,x),(x,x,x,c)\}$$

$$A_2 = \{(c,c,x,x),(c,x,c,x),(c,x,x,c),(x,c,c,x),(x,c,x,c),(x,x,c,c)\}$$

$$A_3 = \{(c,c,c,x),(c,c,x,c),(c,x,c,c),(x,c,c,c)\}$$

$$A_4 = \{(c,c,c,c)\}$$

y el conjunto A1 $\cup$ A2 $\cup$ A3 $\cup$ A4 estará formado por todos los resultados en los que aparecen una, dos, tres o cuatro caras, por tanto el número pedido es el cardinal de dicho conjunto. Al ser los Ai dos a dos disjuntos, por el principio de adición, tendremos que habrá

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 15$$

formas distintas de obtener una, dos, tres o cuatro caras.

Principio de Multiplicación

Este principio nos va a permitir resolver con más comodidad situaciones que involucren procesos que consistan en acciones sucesivas.
Supongamos una acción que consista en una secuencia de pasos. Por ejemplo tirar un dado, luego otro y a continuación un tercero. Diremos que los pasos son independientes si el número de formas en que puede hacerse cada uno de ellos no depende del número de formas en que pueden realizarse cada uno de los otros.
Teorema
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Demostración
Procederemos por inducción sobre el número de conjuntos, n.
Paso básico. Veamos si el teorema es cierto para n = 2. En efecto, sean A1 y A2 dos conjuntos finitos no vacíos,

$$A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\} \text{ y } A_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$$

Por definición de producto cartesiano,

$$A_1 \times A_2 = \{(a_i, b_j) : a_i \in A_1 \text{ y } b_j \in A_2\}$$

para cada uno de los ai, $\leq$ i $\leq$ q, tendremos los pares distintos,

$$(a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots, (a_i, b_r)$$

es decir, r pares o r elementos de A1 × A2. Haciendo lo mismo para cada uno de los ai $\in$ Ai, , 1 $\leq$ i $\leq$ q , tendremos

$$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_r)$$

$$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_2, b_r)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_q, b_1), (a_q, b_2), \ldots, (a_q, b_r)$$

o sea, un total de q · r pares distintos en A1 × A2, luego

$$|A_1 \times A_2| = q \cdot r = |A_1| \cdot |A_2|$$

por tanto, la proposición es cierta para n = 2.

Paso inductivo. Supongamos que es cierta para n = p, es decir si A1,A2, . . . ,Ap es una colección de conjuntos finitos no vacíos. Entonces,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_p|$$

Veamos si la proposición es cierta para n = p + 1. En efecto, si $A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1}$ es una colección de conjuntos finitos no vacíos, entonces

$$\begin{array}{rcll} |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p \times A_{p+1}| & = & |(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p) \times A_{p+1}| & \{\text{Asociatividad de } \times\} \\ & = & |A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_p| \cdot |A_{p+1}| & \{\text{Paso básico}\} \\ & = & |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_p| \cdot |A_{p+1}| & \{\text{Paso inductivo}\} \end{array}$$

Consecuentemente, por el Principio de inducción matemática, el teorema es cierto para todo entero positivo, n, es decir,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Ejemplo

¿Cuántos resultados distintos son posibles al tirar tres dados diferentes?

Solución
Sean A_1, A_2 y A_3 los conjuntos formados por los posibles resultados que podamos obtener al tirar cada uno de los tres dados, entonces $|A_i| = 6$, i = 1, 2, 3 y cada resultado es un elemento del producto cartesiano $A_1 \times A_2 \times A_3$, luego por el principio de multiplicación, habrá.

$$|A_1 \times A_2 \times A_3| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

resultados distintos.

Obsérvese que al ser diferentes los dados, podemos etiquetarlos como primero, segundo y tercero y tratar la tirada como una acción con tres pasos sucesivos, cada uno de las cuales tiene seis resultados posibles.

El número de posibilidades será, por tanto,

$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Obsérvese también que si los dados no fueran diferentes, la respuesta sería distinta. Por ejemplo sería imposible distinguir entre el resultado 152 y el 251.

Regla del Producto

Si un procedimiento puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y si existen m resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento entero puede realizarse, en el orden dado, de mn formas.

Ejemplo
Se dispone de una baraja de 40 cartas de la cual extraemos cuatro de dos formas diferentes:

(a) Sin devolución de cada carta extraída.

(b) Con devolución de la carta en cada extracción.

Calcular el número de formas diferentes de obtener cuatro cartas en cada caso.

Solución

Consideraremos el experimento como una acción con cuatro pasos independientes.

Para el primer paso tenemos 40 opciones posibles y como la carta extraída no se devuelve quedarán 39 opciones para el segundo paso y, por la misma razón, 38 y 37 opciones para el tercero y el cuarto, respectivamente. Así pues el experimento podrá hacerse de

$40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2193360$

formas distintas.

(b) Cada carta extraída se devuelve a la baraja. Por tanto, para cada una de las cuatro extracciones.
Dispondremos de las cuarenta. Así pues, el número de formas diferentes de obtener las cuatro cartas es

$40 \cdot 40 \cdot 40 \cdot 40 = 2560000$

3.2. Relaciones de Recurrencia

Estas relaciones son útiles en ciertos problemas de conteo. Una relación de Recurrencia relaciona el n-ésimo elemento de una sucesión con sus predecesores. Como las relaciones de recurrencia tienen una relación cercana con los algoritmos recursivos, las relaciones de recurrencia surgen de manera natural en el análisis de estos.

Considere las siguientes instrucciones para generar una sucesión :

1.- Iniciar con 5

2.- dado cualquier término, sume 3 para obtener el siguiente.

Si se enlistan los términos de la sucesión , se obtiene

5, 8, 11, 14, 17, ...

El primer término es 5 por la instrucción1. El segundo término es 8 porque la instrucción 2 dice sume 3 a 5 para obtener el siguiente término. El tercer término es 11 porque la instrucción 2 dice sume 3 a 8 para obtener el siguiente término. Si se siguen las instrucciones de 1 y 32 , se pueden calcular cualquier término de la sucesión. Las instrucciones 1 y 2 no dan una formula explicita para el n-ésimo término de la sucesión en el sentido de poder sustituir cualquier valor de n para obtener el n-ésimo término, sino que al calcular término por término en algún momento se podrá obtener cualquier término de la sucesión.

Si la sucesión se denota por a_1,a_2, ..., se puede enunciar de nuevo la instrucción 1 como $a_1=5$

Y la instrucción 2 se puede establecer como

$$a_n = a_{n-1} + 3 \quad , \; n \geq 2$$

Haciendo n=2 se obtiene

$$a_2 = a_1 + 3$$

Si $a_1=5$ entonces

$$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

Haciendo n=3, se obtiene

$$a_3 = a_2 + 3$$

Si $a_2=8$ entonces

$$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

Usando la formula es posible calcular cualquier término en la sucesión justo como se hizo seguir las instrucciones 1 y 2 . se observa las ecuaciones son equivalentes a las instrucciones 1 y 2.

Este representa un ejemplo de **RELACIÓN DE RECURRENCIA**.

En su forma general, una **Relación de Recurrencia de orden k,** es una ecuación de la forma:

$$F : R^k \times R \to R$$

definida como:

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}, n); \quad \forall n \geq k$$

Diremos que la relación de recurrencia es con **Condiciones Iníciales** dadas si conjuntamente con la ecuación se definen los k valores iníciales: $a_0 = \alpha_0, ..., a_{k-1} = \alpha_{k-1}$.

En el curso abarcaremos poco más que las llamadas Relaciones de Recurrencia Lineales con Coeficientes Constantes, esto es relaciones del tipo:

$$P_k(a) = c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + ... + c_{n-k} a_{n-k} = f(n), \qquad (1)$$

donde:

i) cada $c_{n-i} \in R \ \forall i = 0, 1, 2, ...k$ y $c_n \neq 0$,

ii) $k \in Z^+$ determina el orden de la relación y debe ser $n \geq k$

iii) $f : N \to C$ es una función dada. Si $f(n) = 0 \ \forall n \in N$ diremos que la relación de recurrencia es homogénea, no homogénea en otro caso, y de orden k

iv) $a : N \to C$ es una función discreta definida como $a(n) = a_n$

Nuestro objetivo es encontrar **a** que resuelva 1.

A los efectos de ayudar a la intuición daremos un ejemplo sencillo:

Ejemplo 1.1

$$a_n - 3a_{n-1} = 0, \ n \geq 1.$$

Tenemos que $c_n = 1$, $c_{n-1} = -3$; $k = 1$; $f(n) = 0$. La relación define entonces, una ecuación en diferencias finitas homogénea de primer orden.

Resolver la ecuación, es decir encontrar a es en este caso sencillo. Basta ver que a partir de

$$a_n = 3a_{n-1}$$

obtenemos para n = 1, n = 2, etc.. las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3a_0. \\ a_2 &= 3a_1 = 3^2 a_0. \\ a_3 &= 3a_2 = 3^2 a_1 = 3^3 a_0. \\ ... & \quad ..... \quad .... \\ a_n &= 3a_{n-1} = ... = 3^n a_0. \end{aligned}$$

Como se ve obtenemos infinitas soluciones, definidas por $a_n = 3^n a_0$ (verificarlo por inducción completa) dependiendo todas ellas de los valores dados a a_0. Naturalmente, si inicialmente a_0 es dado, obtendremos una única solución. Por ejemplo supongamos que por algún motivo deseamos encontrar la solución que satisface $a_0 = 5$ en este caso la UNICA solución será la definida por $a_n = 3^n 5$.

Con un poco más de generalidad consideremos la ecuación:

Ejemplo 1.2

$$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0; \; n \geq 2.$$

Tenemos: $c_n = 1$, $c_{n-1} = 1$, $c_{n-2} = -6$; $k = 2$. La ecuación es en este caso homogénea de orden 2.

Procediendo como en el ejemplo anterior obtenemos:

$$n = 2 \quad a_2 + a_1 - 6a_0 = 0 \;\rightarrow\; a_2 = -a_1 + 6a_0$$
$$n = 3 \quad a_3 + a_2 - 6a_1 = 0 \;\rightarrow\; a_3 + a_2 = 6a_1 \rightarrow a_3 = 7a_1 - 6a_0.$$

Como puede verse la solución quedará dependiendo de a_0 y a_1. Aunque como puede verse es posible construir la solución recurrentemente no es tan sencillo explicitarla como en el caso anterior. La situación se complica en la medida en que k aumenta, aunque el método recursivo siga valiendo es cada vez menos convincente el procedimiento aquí seguido para explicitar la solución.

3.3 Solución de Relaciones de Recurrencia

Consideremos la ecuación homogénea de grado k definida por:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_n x_{n-i} = 0; \; n \geq k,$$

Supongamos que las funciones

$$a = (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...) \text{ y } b = (b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...)$$

son soluciones de 2, entonces como es fácil verificar: la función $s : N \rightarrow C$ definida como $s = \alpha_1 a + \alpha_2 b$ con valores $s(n) = \alpha_1 a(n) + \alpha_2 b(n)$, es también solución de la ecuación 2.

Así podemos decir que el conjunto de soluciones de $P_k(x) = 0$ forman un S.E.V. dentro del espacio de las funciones discretas con la suma y el producto por escalares definidas como anteriormente.

Consideremos nuevamente la ecuación 2, pero supongamos ahora que están fijados los k primeros valores de las posibles soluciones, sean estos valores _0, _1, ..., _k−1, (los llamaremos(Condiciones Iníciales). El método recursivo ensayado en los ejemplos anteriores, permite obtener la solución definida recurrentemente a partir de la igualdad:

$$x_k = -\frac{c_{k-1}}{c_k} x_{k-1} - \cdots - \frac{c_0}{c_k} x_0$$

Veremos que es posible obtener esta solución como una combinación lineal particular de las soluciones de los k problemas definidos por 2 y respectivamente las siguientes condiciones iníciales:

$a_0 = 1, \quad a_1 = 0 \quad \ldots \quad a_{k-1} = 0$

$a_0 =, \quad a_1 = 1 \quad \ldots \quad a_{k-1} = 0$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$

$a_0 = 0, \quad a_1 = 0 \quad \ldots \quad a_{k-1} = 1$

Sean $a^{(0)}$; $a^{(1)}$; ...$a^{(k-1)}$ las soluciones de estos problemas (CUIDADO: no son potencias). Como podemos verificar estas soluciones son L.I.

Por otra parte

$$S = \alpha_0 a^0 + \alpha_1 a^1 + \ldots \alpha_{k-1} a^{k-1}$$

es solución de

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_{n-i} x_{n-i} = 0; \; n \geq k,$$

con las condiciones iníciales: $a_0 = \alpha_0$, $a_1 = \alpha_1$, . . . , $a_{k-1} = \alpha_{k-1}$.

Por lo tanto el problema de resolver

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_n x_{n-i} = 0; \quad n \geq k,$$

con condiciones iníciales dadas, es equivalente a encontrar k funciones discretas linealmente independientes $f_j(n)$; j = 0, 1, 2, ..., k − 1, y luego resolver

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{k-1} b_j f_j(i); \; i = 0, 1, 2, ..., (k-1),$$

hallados los b_j a partir de este sistema de ecuaciones la solución al problema con condiciones iníciales dadas será:

$$x(n) = \sum_{j=0}^{k-1} b_j f_j(n).$$

Presentaremos a continuación una forma de resolución de ecuaciones en diferencias homogéneas con condiciones iníciales dadas, el que es una continuación natural de las ideas anteriores. Si bien en casos relativamente sencillos ´este método es de valor pierde eficiencia en casos más generales. Por este motivo más adelante presentaremos un método de resolución basado en las funciones generatrices, el que permite obtener soluciones para una amplia clase de problemas, en ´este método haremos especial hincapié.

método para obtener la solución

Discutiremos a partir de un ejemplo una forma especial de resolución y veremos en el practico diferentes casos particulares. En la sección siguiente nos dedicaremos a la resolución de ecuaciones en diferencias mediante la utilización de funciones generatrices.

Comencemos observando que k funciones del tipo $f_j(n) = r_j^n$, j = 1, 2, ..., k pueden formar para r_j 6= r_i, i 6= j un conjunto linealmente independiente de funciones.

Ejemplo 3.1 Consideremos la ecuación en diferencias:

$$x_n + x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0$$

con condiciones iníciales: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$

Busquemos soluciones del tipo $f(n) = cr^n$. Precisamos dos soluciones de este tipo L.I. Vemos que r = 2, r = −3 son las soluciones, resolvamos ahora

$$\begin{array}{lll} 1 = a_0 & b_0(2)^0 + b_1(-3)^0 = & b_0 + b_1 \\ 3 = a_1 & b_0(2)^1 + b_1(-3)^1 = & 2b_0 - 3b_1 \end{array}$$

A partir de: $b_0 = \frac{6}{5}$, $b_1 = -\frac{1}{5}$ Obtendremos la solución: a(n)

$$a(n) = \frac{6}{5}2^n + \frac{1}{5}(-3)^n.$$

.

Demostrar que la solución encontrada es una C.L. de las soluciones de los casos $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ y $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

Ejemplo 3.2 Samuelson hace los siguientes supuestos:

- El consumo es función lineal del ingreso:

$$c_n = ay_{n-1} + H$$

- la inversión líquida tiene una componente autónoma A y otra $b(c_n - c_{n-1})$

$$i_n = A + b(c_n - c_{n-1})$$

- los productores en todo período ajustan la oferta a la demanda:

$$y_n = c_n + i_n$$

A partir de estos tres supuestos obtenemos la ecuación en diferencias:

$$y_n - a(1 + b)y_{n-1} + aby_{n-2} = A + H.$$

La solución general es de la forma:

$$y_n = \frac{A + H}{1 - a} + f(n)$$

Donde f(n) es la solución de la ecuación homogénea, representara un ciclo si la ecuación $r^2 - a(a + b)r + ab = 0$ tiene raíces complejas, con amplitud decreciente, creciente o constante, según ab sea menor, mayor o igual a 1.

Ejemplo 3.3 Considere un alfabeto compuesto por 3 símbolos : {A, B, C} .

a) Obtenga la relación de recurrencia que determina el número de palabras diferentes de largo n, a_n. que pueden formarse si el símbolo B, no puede aparecer consecutivamente.

b) Obtenga a_n.

Sea a_{n+1} el número de palabras posibles que se pueden escribir de acuerdo al enunciado. En el enésimo lugar habrá una A, una B o una C, de estas forma

$$a_{n+1} = 3a^A_n + 3a^B_n + 2a^C_n \quad (*)$$

donde a^j_n, j = A, B, C representa las palabras con n letras terminadas en j.

Si j = A o j = C, estas palabras ya fueron contadas en a_{n-2}, por lo que sustituyendo en (*) obtenemos:

$$a_{n+1} = 6a_{n-2} + 2a^C_n \quad (**)$$

Consideremos ahora las palabras con n letras, terminadas en B (j = B) en este caso en el lugar n − 2 solo puede haber una A o una B en ambos casos estas fueron contadas al considerar a_{n-3}, sustituyendo ahora en (**) concluimos con que:

$$a_{n+1} = 6a_{n-2} + 4a_{n-3}$$

3.4. Soluciones y aplicaciones

En esta sección se usan las relaciones de recurrencia para analizar el tiempo que requieren los algoritmos. La técnica consiste en desarrollar una relación de recurrencia y condiciones iníciales que definan su sucesión $a_1, a_2, ..., a_n$ donde a_n es el tiempo (en el mejor caso, caso promedio ó peor caso) requerido por un algoritmo para ejecutar una entrada de tamaño n. Al resolver la relación de recurrencia , se determina el tiempo que requiere el algoritmo.

Nuestro primer algoritmo es una versión de algoritmo de orden de selección. Este algoritmo selecciona el artículo más grande y lo coloca al último, después repite de manera recursiva este proceso.

ORDEN DE SELECCIÓN

Este algoritmo ordena la sucesión

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

en orden no decreciente, eligiendo primero el artículo más grande y colocándolo al último y después ordenando de manera recursiva los elementos restantes.

Entrada: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y la longitud de n de la sucesión
Salida: $s_1, s_2, \ldots, s_n$, arreglada en orden no decreciente.

1. orden_selección(s,n) {
2. //caso base
3. If(n==1)
4. return
5. // encuentra el valor
6. índice_máx=1 //suponga al inicio que s_1 es el mayor
7. For i=2 to n
8. If (s_1>$s_{indice\_máx}$)//se encontró el más grande
9. Índice_máx=i
10. //mover mayor al final
11. Cambiar(s_n,$s_{indice\_máx}$)
12. Orden_sellción(s,n-1)
13. }

Como una medida del tiempo requerido por este algoritmo , se encuentra el número de comparaciones b_n en la línea 8 requeridas para ordenar n artículos. (Observe que los tiempos del mejor caso , el caso promedio y el peor caso son todos iguales para este algoritmo).
De inmediato se obtiene la condición inicial

$$b_1=0$$

Para obtener una relación de recurrencia para la sucesión $b_1, b_2, \ldots$, se simula la ejecución del algoritmo para un tamaño de n>1 arbitrario de entrada. Se cuenta al número de comparaciones en cada línea y después se suman estos números para obtener el número total de comparaciones b_n. En estas líneas 1 al 7 hay cero comparaciones (del tipo que se esta contando). En la línea 8 hará n-1 comparaciones(ya que la línea 7 provoca que la línea 8 se ejecute n-1 veces). Hay cero comparaciones en las líneas 9 a la 11. La llamada recursiva ocurre en la línea 12, donde se invoca este algoritmo con entrada de tamaño n-1. Entonces, hay b_{n-1} comparaciones en la línea 12. Por lo tanto el número total de comparaciones es

$$b_n=n-1+b_{n-1},$$

que lleva la relación de recurrencia deseada.

Ahora estudiemos un caso que involucran ecuaciones diferenciales, las cuales también pueden expresarse en algoritmos, pero antes de eso estudiaremos su solución.

Consideremos el **sistema de ecuaciones en diferencias finitas homogéneo:**

$$x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n$$
$$y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \qquad (3)$$

Suponemos $a_{12} \neq 0$ o $a_{21} \neq 0$.

Supongamos $a_{12} \neq 0$ de la primera ecuación obtenemos:

$$y_n = \frac{1}{a_{12}}x_{n+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_n$$
$$y_{n+1} = \frac{1}{a_{12}}x_{n+2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_{n+1}$$

Sustituyendo adecuadamente obtenemos la ecuación en diferencias:

$$x_{n+2} - (a_{11} + a_{12}x_{n+1} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_n = 0$$

Método alternativo:

Busquemos soluciones del tipo: $x_n = \alpha_1 r^n$ e $y_n = \alpha_2 r^n$ con α_1 6= 0 y α_2 6= 0.

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones original y simplificando obtenemos :

$$\alpha_1 r = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2$$

$$\alpha_2 r = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} r - a_{11} & -a_{12} \\ a_{11} & r - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema posee solución no trivial (α_1, α_2) solamente si el determinante es igual cero, de donde obtenemos dos posibles valores para r, las raíces del polinomio característico: r_1 y r_2. Mientras que los valores (α_1, α_2) representan los auto vectores asociados a los respectivos auto valores. Luego:

1. Si $r_1 \neq r_2$,las soluciones serán de la forma:

$$(x_n, y_n) = (k_1\alpha_1 r_i^n + k_2\alpha_2 r_2^n, h_1\alpha_1 r_i^n + h_2\alpha_2 r_2^n)$$

   donde las constantes k_i y h_i, i = 1, 2, se determinan por las condiciones iniciales.

2. Si $r_1 = r_2$,las soluciones buscan en la forma:

$$x_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n)\, r_1^n$$

   e

$$y_n = (\beta_0 + \beta_1 n)\, r_1^n$$

Observe que (3) puede escribirse en la forma

$$v_{n+1} = Av_n$$

donde

$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \ \ y \ \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La solución para este sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo se obtiene fácilmente pues iterando se llega a:

$$v_{n+1} = A^n v_0.$$

Obsérvese que el método se extiende naturalmente a sistemas de orden k donde $v_n \in R^k$ y $A \in M_{k\times k}$.

Consideremos ahora el caso de un **sistema de ecuaciones en diferencias no homogéneo:**

Sea: $x_n = Ax_{n-1} + y$ donde x_n y x_{n-1} son vectores k-dimensionales, y es un vector constante de dimensión k también. A es una matriz compleja k x k.

Verificar que la solución para este problema es:

$$x_n = Ax_0 + (I + A + A^2 \cdots + A^{n-1})y$$

siendo x_0 el vector de condiciones iníciales.

Estabilidad

Definición Estabilidad: Se dice que el sistema $x_t = Ax_{t-1} + y$ es estable cuando la solución x_t converge a un vector constante independientemente de x_0.

Teorema Para que el sistema $x_n = Ax_{n-1} + y$ sea estable es necesario y suficiente que todos los auto valores de A tengan módulo inferior a 1. Siendo el sistema estable, entonces converge a $(I - A)^{-1}y$.

Demostración:

Sean x_n y x^0_n soluciones para el sistema con C.I.: x_0 x^0_0 respectivamente. Observando que $x_n - x^0_n = A^n(x_0 - x^0_0)$.

Luego el sistema será estable si $A^n \to 0$ si todos los autovalores son de módulo menor que 1.

Recíprocamente: Suponga que todos los autovalores son de módulo menor que 1. Entonces $(I - A)$ es invertible. Como $(I - A)(I + A + A^2 \cdots + A^{n-1}) = I - A^n$ se sigue que:

$$(I + A + A^2 \cdots + A^{n-1}) = (I - A)^{-1}(I - A^n).$$

Luego como todos los autovalores de A son de módulo menor que 1, se sigue que $(I - A^n) \to I$ y por lo tanto $x_n = (I - A)^{-1}y$

Ejemplo

MERGE sort

Este algoritmo recursivo ordena una sucesión en orden no decreciente usando el algoritmo que fusionan dos sucesiones no decrecientes.

Entrada: $s_1, s_2, \ldots, s_n$ i y j

Salida: $s_1, s_2, \ldots, s_n$, arreglada en orden no decreciente.

```
merge_sort(s, i, j) {
  //caso base 1==j
  If(j==1)
      return
  // divide la sucesión y ordena
  m=⌊(i+j)/2⌋
  merge_sort(s, i, m)
```

```
merge_sort(s, m+1, j)
     // mezcla
Mezcla(s, i, m, j, c)
// copiar c,la salida de mezcla, a s
For k=i to j
S_k=c_k
   }
```

La figura muestra la forma en que el algoritmo anterior merge_sort ordena la sucesión

12, 30, 21, 8, 6, 9, 1, 7.

Se concluye después de la mezcla de cuatro elementos es $\Theta(n \lg n)$ en el peor caso . El método de prueba es el mismo que se usó para demostrar que en la búsqueda binaria es $\Theta(\lg n)$ en el peor caso.

BIBLIOGRAFIA

- *Matemáticas Discretas y Combinatoria ;Ralph P. Grimaldi 3° edición Pretince Hall.*
- *Matematica Discretas Sexta edición Richard Johnsonbaugh; Pretince Hall.*
- *Matematicas Discretas eduard R. Sheninerman; thomson Leraning.*

Actividades complementarias

1.- Encuentre una formula explicita para la sucesión de fibonacci.

La sucesión de fibonacci está definida por la relación de recurrencia homogénea lineal de segundo orden.

$$f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = 0 \qquad\qquad n \geq 3$$

Y las condiciones iníciales $f_1 = 1$ *y* $f_2 = 1$

2.- Suponga que la población de venados del condado de Rustic es 200 en el tiempo n=0 y 220 en el tiempo n=1, y que n es dos veces el incremento del tiempo n-2 al tiempo n-1. Escriba la relación de recurrencia y una condición inicial que define la población de venados en el tiempo n y después resuelva la relación de recurrencia.

3.- Suponga que el algoritmo A requiere $(n \quad \lg \quad n)$comparaciones para ordenar n artículos y que el algoritmo B requiere $\left\lfloor n^2/4 \right\rfloor$comparaciones para ordenar n artículos. ¿Para cuál n el algoritmo B es superior a A?