5 RELACIONES

5.1. Conjuntos parcialmente ordenados

Las relaciones transitivas antisimétricas conducen a los órdenes parciales. De hecho , existen dos tipos de órdenes parciales, según indicamos mediante la siguiente definición.

DEFINICION

Una relación R : S « S se denomina un orden parcial débil si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. R se denomina un orden parcial estricto si no es reflexiva,antisimétrica y transitiva.

Los órdenes parciales , débiles y estrictos están íntimamente relacionados. De hecho, si R es un orden parcial estricto, su cierre reflexivo es un orden parcial débil. Por otra parte, si S es un orden parcial débil sobre cierto conjunto A y si I_A es la relación de identidad sobre A, entonces $S - I_A$ es un orden parcial estricto.

EJEMPLO

La relación < es un orden parcial estricto : es no reflexiva, antisimétrica y transitiva. El cierre reflexivo de < es £ , y esta relación es un orden parcial débil: es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por otra parte, se obtiene el orden parcial estricto < a partir del orden parcial débil £ mediante la eliminación de todos los pares de la forma (x,x).

Todos los ordenes parciales estrictos son no cíclicos, esto es, es imposible encontrar una $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tal que $xRy_1, y_1Ry_2, y_2Ry_3, \ldots, y_nRx;$ por consiguiente , es imposible encontrar un camino que comience y finalice en x. La razón es que un camino de tamaño s = s' desde x a x establecería $xR^n x,$ y para relaciones transitivas $xR^n x \Rightarrow xRx.$ Por lo tanto en una relación transitiva, todo camino que comience y termine en el mismo punto x implica que xRx es verdadera, puesto que un orden parcial estricto es irreflexivo, esto es imposible.

Esto tiene una implicación importante para las llamadas funciones. Si xRy significa que la función x puede llamar a la función y, y se puede determinar que estas llamadas a funciones forman un orden parcial, entonces es imposible que las llamadas causen un bucle.

La noción de conjunto parcialmente ordenado es muy importante.

5.2. ORDENES ESPECIALES

Las ordenes especiales se refiere aquellos arreglos no comunes es el caso de las Matrices de relaciones.

Una matriz en una manera conveniente de representar una relación R de X a Y. Esta representación se puede usar en una computadora, para analizar la relación. Se etiquetan los renglones con elementos de X(en algún orden arbitrario), Y se etiquetan las columnas con elementos de Y (de nuevo, en algún orden arbitrario), y se etiquetan las columnas con elementos de Y (de nuevo, el algún orden arbitrario). Después , el elemento en el renglón x y la columna y se hace igual a 1 si x R y , y a 0 de otra manera. Esta matriz se llama matriz dela relación R (relativa al orden de X y Y).

Ejemplo

La matriz de relación

$R = \{(1,b),(1,d),(2,c),(3,c),(3,b),(4,a)\}$

De X== $\{1,2,3,4\}$ a Y$= \{a,b,c,d\}$ respectos a los ordenes 1,2,3,4 y a, b, c, d es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teorema

Sea R , una relación de X a Y y sea R una relación de Y a Z. Seleccione el oren de X Y y Z. Sea A_1 la matriz de relación R_1 y sea A_2la matriz de relación R_2 respectos a los ordenes seleccionados. La matriz de la relación R_2 o R_1 respecto al orden seleccionado se obtiene sustituyendo por 1 cada término diferente de cero en la matriz de producto A_1 A_2

5.3. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Definición

Sean *A* un conjunto y *R* una relación. Se dice que *R* es una relación de equivalencia si *R* es reflexiva, simétrica y transitiva.

Suponga que se tiene un conjunto de X de 10 pelotas, cada una de las cuales es roja, azul, ó verde. Si se dividen las pelotas en conjuntos R, A, y V de acuerdo con el color, la familia $\{R, A, V\}$es una partición de X.

Una partición es útil para definir una relación . Si S es una partición de X,se puede definir x R y de modo que signifique que para algún conjunto $S \in S$,tanto x como y perteneces a S. Para el ejemplo la relación obtenida se describe como “es del mismo color que”. El siguiente teorema muestra este tipos de relación siempre es reflexiva, simétrica y transitiva.

Teorema

Sea S una partición de un conjunto X. Defina xRy de modo que signifique que para algún conjunto S en S, tanto x como y pertenecen a S. Entonces R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo

Considere la relación

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1)(3,3),(3,5),(4,2)(4,4),(5,1)(5,3)(5,5)\}$$

En $\{1,2,3,4,5\}$La relación es reflexiva porque (1,1),(2,2),/3,3),(4,4),(5,5) $\in R$ .La relación es simétrica por que siempre que (x,y) está en R,(y,x) también está en R. Por último, la relación es transitiva porque siempre que (x,y) y (y,z) están en R,(x,z) también está en R. Como R es reflexiva, simétrica y transitiva.R es un a relación de equivalencia en $\{1,2,3,4,5\}$.

Teorema

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X Para cada $a \in X$,sea

$$[a] = \{x \in X\, x \quad R \quad a\}$$

(En palabras $[a]$es el conjunto de todos los elementos de X que están relacionados con a). Entonces

$$S = \{a \| a \quad \in \quad X\}$$

Es una partición de X.

Ejemplo

Existen dos clases de equivalencia para la relación de equivalencia.

$$R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1)(3,3),(3,5),(4,2)(4,4),(5,1)(5,3)(5,5)\}$$

En $\{1,2,3,4,5\}$del ejemplo anterior a saber,

$[1]=[3]=[5]=\{1, \quad 3, \quad 5,\}$, y $[2]=[4]=\{2, \quad 4,\}$

Teorema

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto finito X, Si cada clase de equivalencia tiene r elementos, existen $|X|$ /r clases de equivalencia.

Demostración

Sean $X_1, X_{2,} \ldots , X_k$ las distintas clases de equivalencias. Como estos conjuntos hacen una partición de X,

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k| = r + r + \ldots + r = kr$$

Y se deriva la conclusión

ejemplos

1) La relación R sobre Z definida por: a R b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de 3.
2) Sea k$\in$N, la relación R sobre Z: a R b $\Leftrightarrow$ a – b es múltiplo de k.

3) Dado un conjunto $D \subseteq U$, la relación: $A \; R \; B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap D = B \cap D$
4) Sobre los números reales $\Re$, la relación R: $x \; R \; y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in Z$
5) La relación R sobre $\Re^2$ definida por: $(x,y) \; R \; (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad x.y = a.b$
6) La relación R sobre Z^2 definida por: $(m,n) \; R \; (p,q) \quad \Leftrightarrow \quad m+q = n+p$

5.4 Relaciones generales

Las relaciones generalizan el concepto de funciones. La presencia la presencia del par ordenado (a,b) en una relación se interpreta como que existe una de a de b. El modelo de base de datos relacional que ayuda a los usuarios a tener acceso a tener acceso a la información de una base de datos (una colección de registros manejados por una computadora) se basa en el concepto de relación.

Se puede pensar en una relación de un conjunto a otro como en una tabla de lista los elementos del primer conjunto que se relaciona como los elementos del segundo conjunto. La tabla siguiente muestra que estudiantes están inscritos en cuales cursos. Por ejemplo Guillermo toma Computación y Arte. María tomo Matemáticas. En la terminología de las relaciones se dice que Guillermo, está relacionada con Matemáticas.

Por supuesto, la tabla en realidad es sólo un conjunto de pares ordenados. De manera abstracta, se define una relación como un conjunto de pares ordenados. En este contexto, se considera que el primer elemento del par ordenado está relacionado con el segundo elemento del par ordenado.

Estudiantes	Curso
Guillermo	Computación
María	Matemáticas
Guillermo	Arte
Beatriz	Historia
Beatriz	Computación
Davis	Matemáticas

Definición

Una relación (binaria) R de un conjunto X a un conjunto Y es un subconjunto de producto cartesiano $X \times Y$ .Si (x,y) $\in R$, se escribe $x \quad R \quad y$,y se dice que x está relacionada con y. Si X=Y se llama relación (binaria) sobre X.

El conjunto

$$\{x \in X | \ (x,y) \in Rpara \cdot a\lg una \cdot y \in Y\}$$

Se llama dominio de R. El conjunto

$$\{y \in X | \ (x,y) \in Rpara \cdot a\lg una \cdot x \in Y\}$$

Se llama rango de R.

Una función es un tipo especial de relación. Una función f de X a Y es una relación de X a Y que tiene la propiedades:

a) El dominio de f es igual X
b) Para cada $x \in X$, existe exactamente $y \in Y$ tal que (x,y) $\in f$.

Una relación R sobre un conjunto X se llama simétrica si para toda x, $y \in X$. Si $si(x,y) \in R$ entonces $(x,y) \in R$.

Una relación R sobre un conjunto X se llama antisimétrica si para toda x, $y \in X$. Si $si(x,y) \in R$ y $y \neq x$ entonces $(x,y) \in R$.

Una relación R sobre un conjunto X se llama transitiva si para toda $x, y, z \in X$. Si $si(x,y)y(y,z) \in R$ y entonces $(x,y) \in R$.

BIBLIOGRAFIA

- *Matemáticas Discretas y Combinatoria ;Ralph P. Grimaldi 3° edición Pretince Hall.*
- *Matematica Discretas Sexta edición Richard Johnsonbaugh; Pretince Hall.*
- *Matematicas Discretas eduard R. Sheninerman; thomson Leraning*

Actividades Complementarias

1.- Sea A el conjunto de cursos ofrecidos en una escuela. Definimos la relación R sobre A como xRy si xy son el mismo curso o si x es un prerrequisito para y. es un conjunto parcial mente ordenado?

2.-Verifique que la relación $R = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$*sobre* $X = \{a,b,c,\}$ *es reflexiva, simétrica, y transitiva.*

3.-Determine la relación indicada es una relación de equivalencia en $\{1,2,3,4,5\}$*.Si la la relación es una relación de equivalencia ,liste las clases de equivalencia.*

a) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1)\}$
b) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3),(1,3),(3,1)\}$
c) $\{(x,y) | 3 divideax - y\}$