1. Números Reales

1.1 Clasificación y propiedades

1.1.1 Definición

Número real, cualquier número racional o irracional. Los números reales pueden expresarse en forma decimal mediante un número entero, un decimal exacto, un decimal periódico o un decimal con infinitas cifras no periódicas.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Número Naturales (**N**): números con los que contamos (también se les llama enteros positivos. $\{1, 2, 3, 4...\}$)

Enteros (**E**): conjunto de todos los números naturales con sus opuestos (negativos) y el cero. $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Racionales: conjunto formado por todos los números que se pueden escribir en la forma m/n, donde *m* y *n* son enteros $n \neq 0$.

Número Reales (**R**): todos los racionales y los irracionales. Los números racionales tienen representaciones decimales repetitivas (periódicas), en tanto que los irracionales tienen representaciones no repetitivas infinitas.

1.1.2 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Si a, b y c son nombres de objetos, tenemos:

Propiedad reflexiva: $a = a$

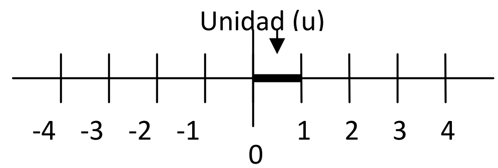
Propiedad simétrica: Si $a = b$, entonces: $b = a$

Propiedad transitiva: Si $a = b$ y $b = c$, entonces: $a = c$

Principio de sustitución: Si , $a = b$ cualquiera de las dos puede reemplazar a la otra en una proposición, sin alterar la verdad o falsedad de dicha proposición

1.2 Interpretación geométrica de los números reales

Se pueden representar sobre una recta del siguiente modo: a uno de los puntos de la recta se le asocia el cero, 0. Se toma hacia la derecha otro punto al que se asocia el 1. La distancia del 0 al 1 se denomina segmento unidad y con ella se representan todos los números enteros.



Los restantes números reales (racionales o irracionales) se sitúan sobre la recta, bien valiéndose de construcciones geométricas exactas, bien mediante aproximaciones decimales. Es importante el hecho de que a cada punto de la recta le corresponde un número real y que cada número real tiene su lugar en la recta (correspondencia biunívoca). Por eso a la recta graduada de tal manera se la denomina recta real.

1.5.3 Definición de igualdad y sus propiedades

El signo de igualdad (=) se emplea para unir dos expresiones, cuando ambas son los nombres o descripciones del mismo objeto.

$a = b$ significa que *a* y *b* son dos nombres del mismo objeto. Naturalmente $a \neq b$, significa *a* no es igual a *b*.

Si dos expresiones algebraicas con una o más variables se unen mediante el signo igual, la forma así obtenida recibe el nombre de ecuación algebraica.

1.3 Desigualdades lineales , cuadrática y propiedades

Es sorprendente la cantidad de propiedades que se pueden desprender de los primeros seis axiomas, sin embargo el álgebra de los números reales no queda reducida a dichos axiomas; éstos se complementan con un orden que nos permitirá, además de tener una estructura más completa, poder hacer analogías y aplicaciones más complejas que las que se podrían tener con los axiomas de campo. Por ejemplo, se podrá construir un modelo para el movimiento, o también obtener el área y volumen de figuras geométricas no simples, análisis de variables que cambian continuamente con respecto al tiempo y muchas otras aplicaciones físicas.

La idea medular del orden en los números reales es que se pueden dividir los números en tres conjuntos, positivos, negativos y cero. Y que es posible establecer un orden total en los números reales. Estas ideas se pueden resumir en tres propiedades.

Axiomas de orden:

El conjunto de los números reales tiene un subconjunto, llamado conjunto de números reales positivos R^+ el cual satisface los siguientes axiomas.

Axioma 1.7 a, b en R^+ => a+b, ab en R^+

Axioma 1.8 Si a está en R y a ≠ 0 entonces una de las dos condiciones de cumple

$a \in R^+$ o $-a \in R^+$.

Axioma 1.9 El número 0 no está en R^+

Si un número no es positivo ni 0 se dice que es negativo, o sea que un número a es negativo si -a es positivo por el axioma 2.8.

Existe otra forma muy popular en nuestros días de presentar el orden en los números reales por medio de desigualdades directamente sin hacer mención a los axiomas, se toma a < b como una relación entre dos números que satisface cuatro propiedades. Una de las ventajas de presentar el tema como se hace aquí es que bastan tres propiedades en lugar de cuatro, además cuando se usan desigualdades queda la relación < sin definir, incluso hay libros que lo definen en términos de números positivos así que se cae en una inconsistencia o en la necesidad de definir conjunto de números positivos. Por lo tanto por razones heurísticas es mejor considerar las propiedades de orden de esta manera.

Definición Desigualdad.

Si a, b son números reales decimos que a “es menor que” b y se representa a < b si b?·a es positivo. Similarmente, decimos que a “es mayor que b” y se representa a > b cuando b < a. La relación a < b significa que a < b ó a = b; y a > b significa que a > b ó a = b.

Vemos por lo tanto que un número es positivo si y sólo si es mayor que 0, y negativo si y sólo sí es menor que 0.

Nota Los axiomas se llaman de orden porque si consideramos la relación menor o igual en base a la definición anterior se obtiene una relación que cumple las condiciones de relación de orden. Incluso es un orden total.

De manera análoga como se vio después de los primeros seis axiomas, de aquí se pueden desprender todas las propiedades de desigualdades y de orden de los números reales. Resumimos las principales en el siguiente teorema.

TeoremaPropiedades básicas de desigualdades.

Si a, b y c son números reales entonces:

i) Ley de tricotomía. Se cumple una y sólo una de las condiciones siguientes: $a < b$, $a > b$, $a = b$
ii) Propiedad aditiva: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

iii) Primera propiedad multiplicativa: $a < b,\ c > 0 \Rightarrow ac < bc$

iv) Segunda propiedad multiplicativa: $a < b,\ c < 0 \Rightarrow ac > bc$

v) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

vi) $1 > 0$

vii) $a < b \Rightarrow -b > -a$

viii) $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

ix) $ab > 0 \Rightarrow$ ambos son positivos ó ambos son negativos

x) $ab < 0 \Rightarrow$ un número es positivo y el otro negativo

xi) $a > 0 \Rightarrow 1/a > 0$

xii) $a < b, c < d \Rightarrow \Rightarrow a+c < b+d$

Como ejemplo demostraremos la propiedad (ii) del teorema y las demás se dejan como ejercicio.

Ejemplo Demuestre la propiedad (ii) del teorema

Demostración:

$a < b \Rightarrow b-a > 0$ por definición de <

pero

$b-a = b-a + 0$ axioma 5

$= b-a + c+(-c)$ axioma 6

$= b+(-a) + c + (-c)$ definición de resta

$= b + c + (-a)+(-c)$ axioma 2

$= b +c - (a + c)$ inverso aditivo de una suma, directo utilizando la definición de resta

$\Rightarrow a + c < b + c$ por la definición de <. @

Desigualdades.

Así como usamos los primeros seis axiomas para resolver ecuaciones, de forma análoga podremos usar los axiomas de orden para desigualdades. Como ya hemos insistido un buen comienzo para entender un tema es conocer los conceptos con los que trabajamos, así que empezaremos por establecer el concepto de desigualdad.

Si una proposición numérica abierta con una variable se puede expresar utilizando alguno de los cuatro símbolos siguientes <, >, < ó >; le llamamos desigualdad abierta o simplemente desigualdad.

Y resolver una desigualdad significa encontrar el conjunto de valores para la cual la proposición resulta verdadera.

Ejemplo 1.10 Resolver la desigualdad 2x ?1 > 5.

Solución:

2x ? 1 > 5 =>

2x ? 1 + 1 > 5 + 1 =>

2x > 6 =>

x > 3

por lo que el conjunto solución será {x : x > 3}, hacemos notar que los pasos se podrían hacer a la inversa por lo que la desigualdad 2x?1>5 es equivalente a la desigualdad x>3, por lo que la solución es la correcta. Sería más conveniente sustituir los símbolos => por <=>.

Para poder expresar mejor la solución de una desigualdad numérica es conveniente asociar cada número real con un punto sobre una recta, llamada recta numérica. Escogemos 0 como un punto cualquiera de la recta y los enteros equidistantes a la derecha del 0 los positivos y los negativos a la izquierda, los racionales en forma proporcional de manera que un número mayor que otro esté siempre a la derecha; como se puede ver en la figura:

??????????????????????????????????????

?4 ?3 ?2 ?1 0 1 2 3 4

También es conveniente definir los conjuntos de números entre dos números dados, los cuales jugarán un papel preponderante en la solución de ecuaciones.
Definición 1.3 Intervalos numéricos. Si a, b son números reales con a < b definimos:

[a,b] = {x : a < x < b} [a,b) = {x : a < x < b} (a,b] = {x : a < x < b} (a,b) = {x : a < x < b} [a,oo) ={x : x > a} (a,oo) ={x : x > a} (-∞,b] = x (-∞,b) = x

El símbolo oo (infinito) no es un número, y significa que el valor numérico de la variable x puede ser arbitrariamente grande, igualmente ?oo indica que la variable no está limitado inferiormente.

1.4 Valor absoluto y sus propiedades

Definición. Valor absoluto. El valor absoluto de un número real x se representa por |x| y se define por

El valor absoluto es muy importante en cálculo porque nos ayuda a representar desigualdades y conjuntos de números, uno de los principales usos es el poder formalizar el concepto de límite.

Teorema

i) $|ab|=|a||b|$

ii)

iii) $|a+b|=|a|+|b|$

iv) $|x|<a$\{10{ $\Leftrightarrow$\{10{ $-a<x<a$

v) $|x|>a$\{10{ $\Leftrightarrow$\{10{ $-a>x$\{5{ o\{5{ $x>a$

La última propiedad se acostumbra escribir

v) $|x|>a$\{10{ $\Leftrightarrow$\{10{ $x<-a$\{5{ o\{5{ $x>a$

pero la escribimos de la otra forma para que sea más fácil de recordar, pero hay que tener en cuenta que el caso (iv) es una desigualdad doble y por lo tanto una intersección entre las dos desigualdades simples y en (v) aparecen dos desigualdades con la disyunción y por lo tanto es una unión.

Observando la definición debemos recordar que ?x representa el inverso aditivo de x y no necesariamente es un número negativo.

Ejemplo Resolver la ecuación $|5x+1| = 4$
Solución.

$5x+1 = 4$ ó $5x+1 = -4$, por lo que

$x = 1$ ó $x = -3/5$, una sustitución directa nos indica que el conjunto solución es $S = \{-3/5, 1\}$.

Es conveniente enunciar en este punto las principales propiedades de valor absoluto, sobretodo porque serán muy útiles para la solución de desigualdades

Teorema Propiedades de valor absoluto (i) |x| › 0 (ii) |x| = 0 <=› x=0 (iii) |ab| = |a| |b| (iv) |a/b| = |a|/|b| (v) |a+b| ‹ |a| + |b| (vi) |x| < a <=› ?a < x < a (vii) |x| › a <=> ?a>x o x > a

Bibliografia

- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.
- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.
- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.
- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.
- Análisis matemático; Tom M. Apostol.
- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.
- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.
- Apuntes de análisis matemático II(del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.
- Apuntes de análisis matemático(de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.

Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich