

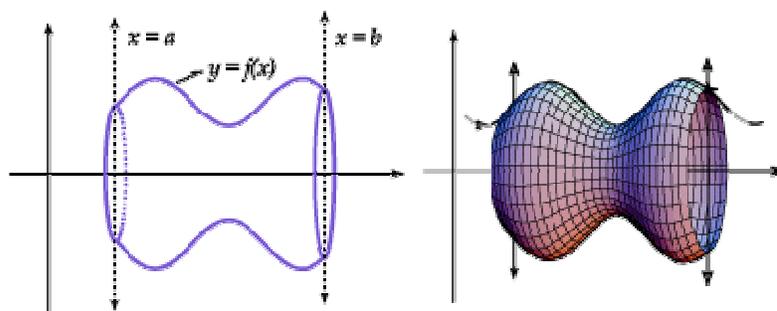
10. Aplicaciones de de la integral

Volumen de sólidos de revolución

Definición

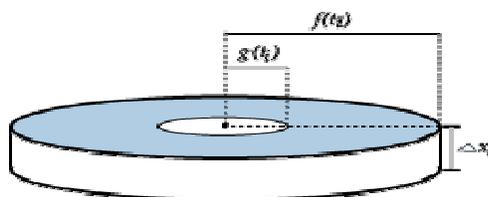
Sea f una función definida en el intervalo $[a, b]$.

Recibe el nombre de *sólido de revolución*, el sólido generado al girar alrededor del eje x , la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje x y las gráficas de $x = a$ y $x = b$. El eje x es un eje de simetría de dicho sólido y una sección recta perpendicular al eje x es un círculo.



Para determinar el volumen de este tipo de sólidos, seguiremos un procedimiento similar al utilizado para el área de una región, aproximando el "volumen" de un sólido de revolución por medio de una suma de volúmenes de sólidos más elementales, en los que el volumen ya ha sido definido.

Vamos a considerar discos o cilindros circulares como los sólidos elementales, suponiendo que el volumen de un disco circular es, por definición, el producto del área A de la base por el espesor Δx (o altura).



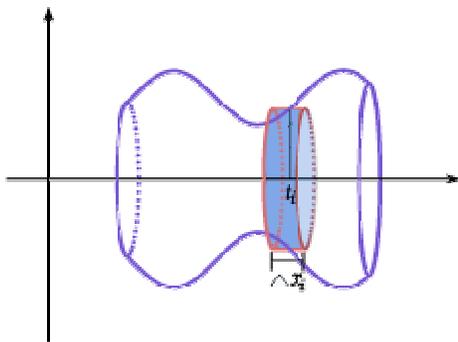
Consideremos una partición P_n del intervalo $[a, b]$ determinada por el conjunto de números

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

donde $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$, con $i \in \{1, 2, 2, \dots, n\}$.

Sea $\mathcal{T}_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ un aumento de \mathcal{P}_n .

Consideremos ahora los n discos circulares, cuyos sensores son $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n$, y cuyas bases tienen radios $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_i), \dots, f(t_n)$.



El volumen del i -ésimo disco es:

$$\pi [f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

La suma

$$\sum_{i=1}^n \pi [f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

de los volúmenes de los n discos nos da una aproximación al volumen del sólido de revolución.

Podemos suponer que mientras más delgados sean los discos, mayor será la aproximación de la suma anterior al volumen del sólido. Se tiene entonces la siguiente definición:

Si existe un número V tal que dada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^n \pi [f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i - V \right| < \epsilon$$

para toda partición \mathcal{P}_n de $[a, b]$ y todo aumento \mathcal{T}_n de \mathcal{P}_n , y con $N_f < \delta$, este número V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ alrededor del eje x .

Si h es la función dada por $h(x) = \pi[f(x)]^2$ para $x \in [a, b]$, entonces la suma de aproximación:

$$\sum_{i=1}^n \pi[f(t_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

utilizada en la definición del volumen del sólido de revolución, puede escribirse como:

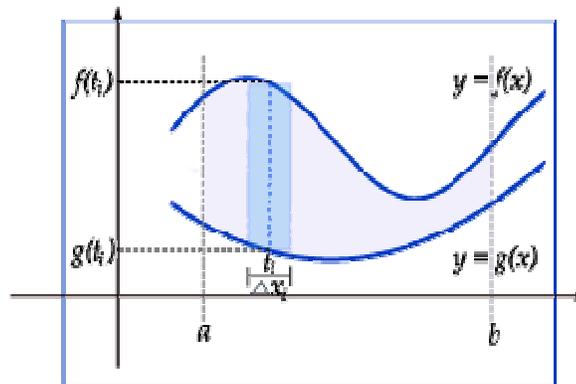
$$\sum_{i=1}^n h(t_i) \cdot \Delta x_i$$

donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Luego, de la definición de integral y de la definición de V dada, se tiene que

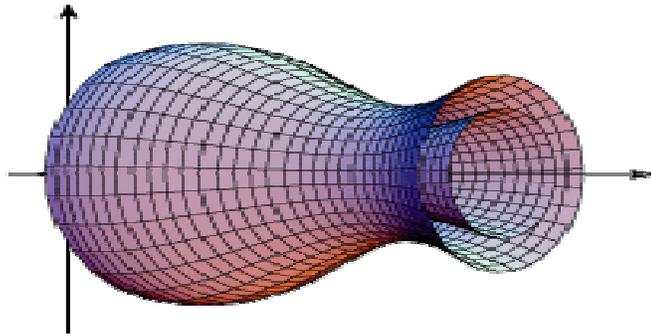
$$V = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Consideremos ahora dos funciones f y g continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para $x \in [a, b]$. Sea R la región del plano limitada por las curvas con ecuaciones $y = f(x)$, $y = g(x)$, y las rectas con ecuaciones $x = a$, $x = b$.



Deseamos determinar el volumen V del sólido de revolución generado al girar la región R alrededor del eje x (note que en este caso *no* giramos la región R alrededor de una de sus fronteras).

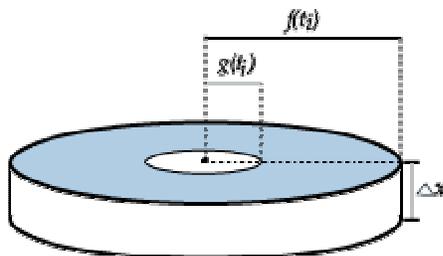
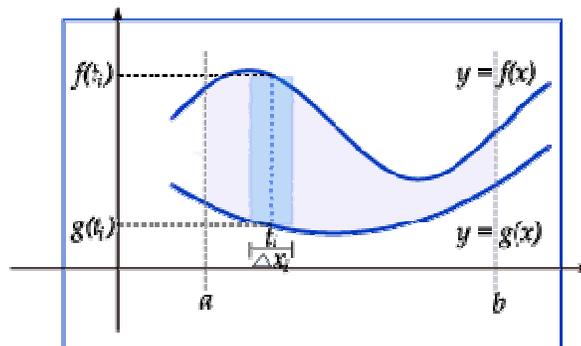
El sólido generado se muestra en la siguiente figura:



Sea P_n una partición del intervalo $[a, b]$ determinada por el conjunto de números $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, y sea $T_n = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n\}$ un aumento de P_n .

En este caso, los sólidos elementales usados para obtener una suma de aproximación del volumen del sólido de revolución, serán anillos circulares.

Se muestra a continuación el i -ésimo rectángulo y el i -ésimo anillo circular generado al rotar aquel alrededor del eje x .



Luego, el área del anillo circular es:

$$\pi[f(t_i)]^2 - \pi[g(t_i)]^2$$

por lo que el volumen del i -ésimo elemento sólido será:

$$\Delta V_i = \pi([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2) \cdot \Delta x_i$$

Entonces, la suma de aproximación para el volumen del sólido de revolución es:

$$\sum_{i=1}^n \pi([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2) \cdot \Delta x_i$$

Puede suponerse que mientras más delgados sean los anillos circulares, mayor será la aproximación de la suma anterior al volumen del sólido.

Definición

Si existe un número V tal que dada $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ para la cual

$$\left| \sum_{i=1}^n \pi([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2) \Delta x_i - V \right| < \epsilon$$

para toda partición P_n de $[a, b]$ y todo aumento T_n de P_n , y con $N_n < \delta$, este número de V es el volumen del sólido obtenido por revolución del área limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$, alrededor del eje x .

Si h es la función dada por $h = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2)$ para $x \in [a, b]$, entonces la suma de aproximación

$$\sum_{i=1}^n \pi([f(t_i)]^2 - [g(t_i)]^2) \cdot \Delta x_i$$

utilizada en la definición 8, puede escribirse como:

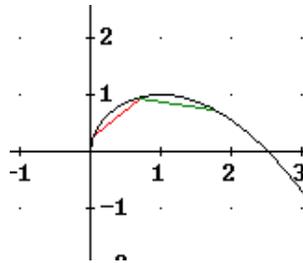
$$\sum_{i=1}^n h(t_i) \Delta x_i$$

donde $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Luego se tiene que:

$$V = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \pi ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

10.1. Longitud de curvas



Vamos a calcular la longitud de una curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ cuya derivada f' sea continua en $[a, b]$; a esta porción de gráfica se le llama **arco**.

Para aproximar la longitud del arco **s** se va a usar ahora segmentos de recta que aproximen la longitud en cada intervalo.

Se hace una partición (puede ser regular) del intervalo $[a, b]$;

$x_0 = a, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$ para $x_{i-1} \leq x_i = f(x_{i-1})$ y para $x_i \leq x_{i+1} = f(x_i)$ de manera que

el segmento $P_{i-1} P_i$ tiene longitud calculada por el teorema de Pítagoras

$$|P_{i-1} P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Si se suma la longitud de cada segmento, $|P_0 P_1|, |P_1 P_2|, \dots, |P_{n-1} P_n|$, se obtiene una aproximación a la

$$\text{longitud total } s \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1} P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Para poder ahora tomar el límite de la suma cuando la norma de la partición $\Delta x = \Delta_i x = x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$, utilizaremos que la función $f(x)$ es derivable y continua en $[a, b]$ (condición que se puso para que fuera un arco) y por lo tanto lo es en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por lo que satisface el teorema del valor medio.

Luego existe $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ reemplazando

$$s \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)]^2 (x_i - x_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) \quad \text{Si } \Delta x \rightarrow 0$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Ejemplo 1: Encontrar la longitud del segmento de parábola $y = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$

$$y' = 2x \quad s = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx \quad \text{Resolviendo ahora } \int \sqrt{1 + 4x^2} dx \quad \text{con } x = \frac{1}{2} \tan \theta$$

$$\int \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int \sec^3 \theta d\theta = \frac{1}{4} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{4} \ln |\sec \theta + \tan \theta| = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln |\sqrt{1 + 4x^2} + 2x|$$

$$s = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln |\sqrt{1 + 4x^2} + 2x| \right]_0^2 = \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{17} + 4) \quad (\text{unidades lineales})$$

Ejemplo 2 : Encontrar la longitud de la curva $y = \sqrt{x}$ $x \in [0, 4]$

Como $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y no es continua en el intervalo propuesto, podemos utilizar el hecho de que la longitud de la curva $x = y^2$ será la misma para $y \in [0, 2]$ (es prácticamente utilizar la inversa) y ahora

$$\frac{dx}{dy} = x' = 2y \quad \text{con lo cual } s = \int_0^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy \quad \text{que es la calculada en el ejemplo 1.}$$

Ejemplo 3: Calcular la longitud de la curva $y = x^3$ para $x \in [-3, -1]$

$$s = \int_{-3}^{-1} \sqrt{1 + 9x^4} dx. \quad \text{Pero no se puede encontrar antiderivada de } \sqrt{1 + 9x^4}. \quad \text{por lo tanto se puede}$$

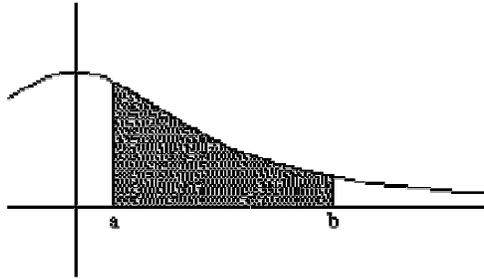
aproximar con algún método numérico como Regla de Simpson con $n = 6$, o $n = 8$. (ejercicio)

Si llamamos $s(x)$ la función longitud de arco para una arco $f(x) x \in [a, b]$

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt \quad d_s = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (d_s)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

10 .2. Cálculo de áreas

Ya se dijo que el desarrollo del cálculo integral en buena medida se debe al problema de calcular áreas de funciones como esta:



Una aproximación para calcular el área consiste en dividir el intervalo en otros más pequeños y calcular el área de los rectángulos que se forman bien al tomar el valor de la función en un extremo del intervalo, bien en otro extremo, es decir:

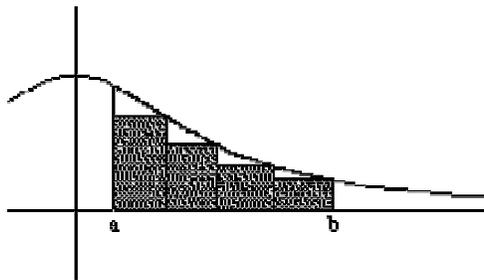


Figura 11.1: Aproximación del área mediante rectángulos más pequeños que la función

En este caso, hemos dividido el intervalo mayor en 4 subintervalos más pequeños y hemos tomado como altura de los rectángulos el valor de la función en el extremo superior del intervalo. Así la suma de las áreas de los rectángulos son más pequeñas que el área buscada.

Área suma rectángulos < Área de la función

Esta suma, en la que la suma de las áreas de los rectángulos es menor que el área total se denomina *suma inferior* de la función en el intervalo.

Pero podríamos haber tomado estos otros rectángulos:

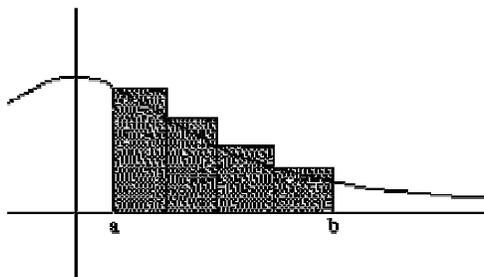


Figura 11.2: Aproximación del área mediante rectángulos más grandes que la función

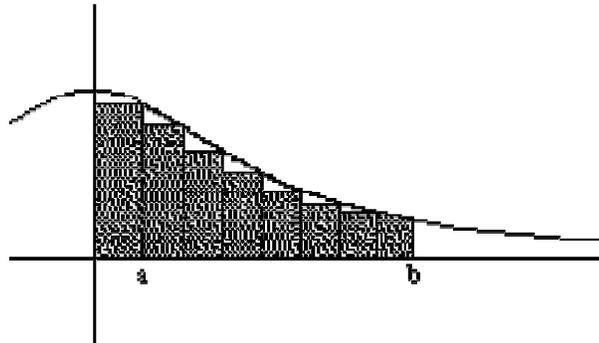
Ahora la suma del área de los rectángulos es mayor que el área total, es decir:

Área de la función < Área suma rectángulos

Esta suma, en la que la suma de las áreas de los rectángulos es mayor que el área total se denomina *suma superior* de la función en el intervalo. Por tanto, el área buscada está entre la suma superior y la suma inferior de la función:

$$\text{Suma inferior} \leq \text{Área} \leq \text{Suma superior}$$

Además, observemos lo que ocurre cuando los subintervalos que tomamos son cada vez menores:



Vemos que las sumas inferiores son cada vez mayores y cada vez más cercanas al área buscada, a medida que los intervalos son más pequeños.

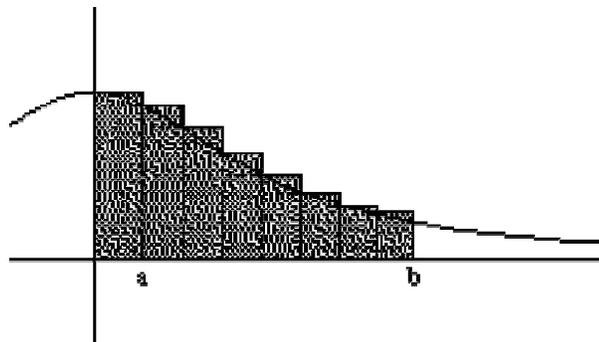


Figura 11.3: La aproximación se mejora al aumentar el número de rectángulos

Por contra, las sumas superiores son cada vez más pequeñas y también cada vez más cercanas al área buscada, a medida que los intervalos son más pequeños.

A medida que los subintervalos son menores, las sumas superiores e inferiores se acercan al área buscada. Para llegar a calcular dicha área, necesitamos calcular una suma infinita (la de los infinitos rectángulos a medida que estos son más pequeños), cosa que en matemáticas se denomina *sumar una serie*.

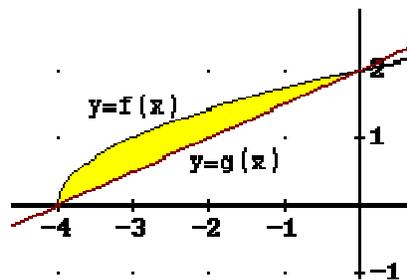
Esto excede con mucho los contenidos del curso. Lo que se necesita saber es que tanto las sumas superiores como las sumas inferiores convergen (se acercan) al área buscada, y dicha suma se representa, si la función es $f(x)$ y el intervalo es $[a, b]$, por la

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ahora bien, el siguiente problema es como se calcula esta integral, pues en las integrales indefinidas no habíamos incluido ningún intervalo.

10.3. Áreas entre curvas

Área de una región comprendida entre dos curvas



Supongamos que se quiere calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo de $x=-4$ hasta $x=0$ que, como se ve gráficamente corresponde a las abscisas de los puntos de intersección.

En este caso, dado que tanto $f(x)$ como $g(x)$ son funciones positivas,

$$\int_{-4}^0 f(x) dx = \text{Área limitada por la curva } y = f(x), \text{ las rectas } x = -4 \text{ y } x = 0 \text{ y el eje } x$$

$$\int_{-4}^0 g(x) dx = \text{Área bajo la curva } y = g(x) \text{ entre } x = -4 \text{ y } x = 0$$

Observamos que restando del área mayor dada por $\int_{-4}^0 f(x) dx$ el área menor que está dada por $\int_{-4}^0 g(x) dx$ se obtiene el área que está entre las dos.

Aquí se ilustra la situación más sencilla con ambas curvas positivas, pero esta situación se puede generalizar

Si hacemos una partición del intervalo $[-4, 0]$ en un subintervalo cualquiera $[x_{i-1}, x_i]$ si $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ un rectángulo típico sería $\Delta x(f(t_i) - g(t_i))$; haciendo la suma de las áreas de todos los rectángulos se obtiene $\sum_{i=1}^n (f(t_i) - g(t_i)) \Delta_i x$ tomando ahora $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f(t_i) - g(t_i)) \Delta_i x$ se establece el resultado.

ÁREA DE UNA REGIÓN ENTRE DOS CURVAS .

Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

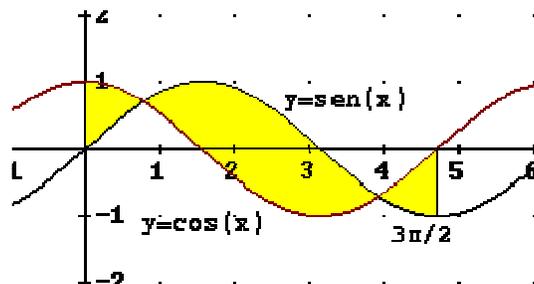
Pasos a seguir : a) determinar las abscisas de los puntos de intersección con $f(x) = g(x)$

b) Si no me dan intervalo donde se va a encontrar el área este presupone que es entre los valores encontrados en a); de lo contrario se debe establecer cuál(es) está(n) en el intervalo dado

c) Es útil hacer una gráfica; si no se hace gráfica se mirará algebráicamente cual de las dos curvas es la mayor en ordenada, en que intervalo.

Ejemplo 1: Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de las curvas

$y = \sin x, y = \cos x$ en el intervalo de $[0, \frac{3}{2}\pi]$



1) Puntos de intersección $\text{sen}x = \text{cos}x$ dan $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$ son los que están en el intervalo de integración

$$2) x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{cos}x \geq \text{sen}x \quad A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{cos}x - \text{sen}x) dx$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \text{sen}x \geq \text{cos}x \quad A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\text{sen}x - \text{cos}x) dx$$

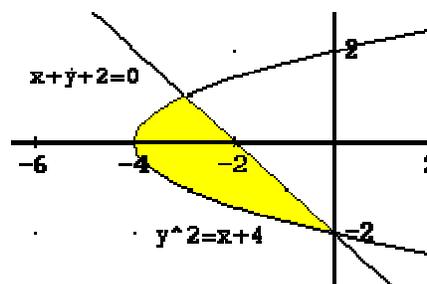
$$x \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{cos}x \geq \text{sen}x \quad A_3 = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\text{cos}x - \text{sen}x) dx$$

Area total

$$= A_1 + A_2 + A_3 = [\text{sen}x + \text{cos}x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\text{cos}x - \text{sen}x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + [\text{sen}x + \text{cos}x]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4\sqrt{2} - 2$$

Si las dos gráficas están dadas en términos de x y no de y los rectángulos que conducen al área se toman horizontales en vez de verticales con lo cual la variable de integración será y . se mirará cuál curva es mayor en cuanto a abscisa se refiere para hacer $f(y) - g(y)$ o $g(y) - f(y)$ según sea el caso

Ejemplo 2: Calcular el área de la región limitada por la recta $x + y + 2 = 0$ y $y^2 = x + 4$

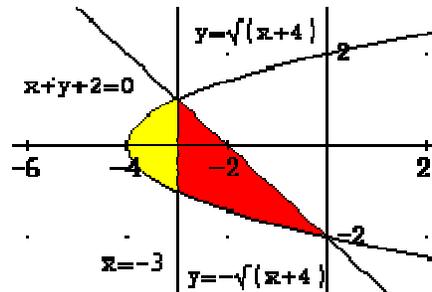


1) puntos de intersección $y^2 - 4 = -y - 2 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1, y = -2$

2) Las x de la recta son mayores (están más a la derecha) que las de la parábola

$$3) \text{Area} = \int_{-2}^1 ((-y - 2) - (y^2 - 4)) dy = \int_{-2}^1 (-y^2 - y + 2) dy = \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y\right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

Nota: Si se tomaran los rectángulos verticales de base Δx habría que hacer dos integrales donde una tendría que ver únicamente con la parábola para $x \in [-4, -3]$ y la otra si con la parábola y la recta si $x \in [-3, 0]$



$$\begin{aligned} \text{Así Area} &= \int_{-4}^{-3} 2\sqrt{x+4} \, dx + \int_{-3}^0 ((-x-2) - (-\sqrt{x+4})) \, dx \\ &= \frac{4}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-4}^{-3} + -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-3}^0 = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{9}{2} - 6 - \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

10 .4. Cálculo de volúmenes

Al introducir la integración, vimos que el área es solamente una de las muchas aplicaciones de la integral definida. Otra aplicación importante la tenemos en su uso para calcular el volumen de un sólido tridimensional.

Si una región de un plano se gira alrededor de un eje E de ese mismo plano, se obtiene una región tridimensional llamada **sólido de revolución** generado por la región plana alrededor de lo que se conoce como **eje de revolución**. Este tipo de sólidos suele aparecer frecuentemente en ingeniería y en procesos de producción. Son ejemplos de sólidos de revolución: ejes, embudos, pilares, botellas y émbolos.

Existen distintas fórmulas para el volumen de revolución, según se tome un eje de giro paralelo al eje OX o al eje OY . Incluso a veces, es posible hallar el volumen de cuerpos que no son de revolución.

2. Volúmenes de revolución: El Método de las arandelas

El método de los discos puede extenderse fácilmente para incluir sólidos de revolución con un agujero, reemplazando el disco representativo por una **arandela** representativa. La arandela se obtiene girando un rectángulo alrededor de un eje. Si R y r son los radios externos e internos de la arandela, y ω es la anchura de la arandela, entonces el volumen viene dado por:

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)\omega$$

Entonces, generalizando de forma análoga como se hizo en el método de los discos, si tenemos dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$ con $0 \leq g(x) \leq f(x)$, y las rectas $x = a$, y $x = b$, el volumen engendrado se calcula restando los sólidos de revolución engendrados por los recintos de ambas funciones, es decir:

$$V = \int_a^b \pi(f^2(x) - g^2(x))dx$$

Si las funciones se cortan, habrá que calcular los volúmenes de los sólidos engendrados en cada uno de los subintervalos donde se puede aplicar el método anterior.

3. Método de secciones conocidas

En este apartado veremos cómo se calcula el volumen de algunos cuerpos geométricos cuando conocemos el área de las bases de los cilindros parciales en que hemos dividido el sólido. Con el método de discos, podemos hallar el volumen de un sólido que tenga una sección circular cuya área sea $\Delta A = \pi R^2$. Podemos generalizar este método a sólidos de cualquier forma siempre y cuando sepamos la fórmula del área de una sección arbitraria, como cuadrados, rectángulos, triángulos, semicírculos y trapecios.

Consideremos un sólido que tiene la propiedad de que la sección transversal a una recta dada tiene área conocida. Esto equivale a decir intuitivamente que en cada corte que hacemos, conocemos el área de la sección correspondiente.

En particular, supongamos que la recta es el eje OX y que el área de la sección transversal está dada por la función $A(x)$, definida y continua en $[a,b]$. La sección $A(x)$ está producida por el plano a perpendicular a OX .

Siguiendo un proceso similar al realizado en la definición de la integral de Riemann:

Elegimos una partición regular de $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Estas divisiones determinan en el sólido n secciones o rodajas cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro es $\pi R^2 \omega$, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:

$$\sum_{i=1}^n A(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

siendo:

- Siendo c_i un punto intermedio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$
- $\omega = x_i - x_{i-1}$, la altura de los cilindros parciales
- $\pi R^2 = A(c_i)$ el área de la base de los cilindros parciales

Si el número de cilindros parciales aumenta, su suma se aproxima cada vez más al volumen del sólido; es decir:

$$V = \lim_{i=1}^n \sum_{i=1}^n A(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Para hallar el volumen de un sólido por el método de las secciones, se procede como se indica a continuación:

1. Esbozar la figura, incluyendo un eje perpendicular a las secciones de área conocida (es decir, un eje OX)
2. Escoger una sección perpendicular al eje OX .
3. Expresar el área $A(x)$ de la base de la sección en términos de su posición x sobre el eje OX .
4. Integrar entre los límites apropiados.

10 .5. Volúmenes de sólidos de revolución

Volúmenes de revolución: Método de capas

En esta sección estudiamos un método alternativo para el cálculo de un volumen de un sólido de revolución,

un método que emplea capas cilíndricas.

Para introducir el **método de capas**, consideramos un rectángulo representativo, donde:

- ω = anchura del rectángulo (espesor).
- h = altura del rectángulo.
- p = distancia del centro del rectángulo al eje del giro (radio medio).

Cuando este rectángulo gira en torno al eje de revolución, engendra una capa cilíndrica (o tubo) de anchura ω . Para calcular el volumen de esta capa consideramos dos cilindros. El radio del mayor corresponde al radio externo de la capa, y el radio del menor al radio interno de la capa. Puesto que p es el radio medio de la capa, sabemos que el radio externo es $p + (\omega/2)$, y el radio interno es $p - (\omega/2)$. Por tanto, el volumen de

la capa, viene dado por la diferencia:

$$\text{Volumen de la capa} = \text{volumen del cilindro} - \text{volumen del agujero} =$$

$$= \pi \left(p + \frac{\omega}{2} \right)^2 h - \pi \left(p - \frac{\omega}{2} \right)^2 h =$$

$$= 2\pi p h \omega = 2\pi(\text{radio medio})(\text{altura})(\text{espesor})$$

Usamos esta fórmula para calcular el volumen de un sólido de revolución como sigue. Suponemos que la región plana gira sobre una recta y engendra así dicho sólido. Si colocamos un rectángulo de anchura Δy paralelamente al eje de revolución, entonces al hacer girar la región plana en torno al eje de revolución, el rectángulo genera una capa de volumen:

$$\Delta V = 2\pi [p(y)h(y)]\Delta y$$

Si aproximamos el volumen del sólido por n de tales capas de anchura Δy , altura $h(y_i)$, y radio medio $p(y_i)$, tenemos:

$$\text{volumen del sólido} = \sum_{i=1}^n 2\pi [p(y_i)h(y_i)]\Delta y = 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)]\Delta y$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que:

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)]\Delta y = 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]dy$$

Por tanto, podemos enunciar el método de capas de la siguiente forma:

Para calcular el volumen de un sólido de revolución con el método de capas, se usa una de las dos siguientes opciones:

$$\text{Eje horizontal de revolución: } V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy$$

$$\text{Eje vertical de revolución: } V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)dx$$

Para hallar el volumen de un sólido por el método de capas, se procede como se indica a continuación.

1. Esbozar la región plana que va a ser girada, hallando los puntos de intersección de las curvas que la limitan.
2. Sobre el dibujo hallar un rectángulo paralelo al eje de revolución.
3. Teniendo como base el boceto, escribir el volumen de la capa.
4. Integrar entre los límites apropiados.

Observación: Los método de discos y de capas se distinguen porque en el de discos el rectángulo representativo es siempre perpendicular al eje de giro, mientras que en el de capas es paralelo.

Con frecuencia uno de los dos métodos es preferible al otro.

Cálculo de longitudes:

$$\text{longitud de revolución} = 2\pi \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{longitud de revolución entre funciones} = 2\pi \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

10 .6. Cálculo de volúmenes por el método de los discos

El Método de los discos

Si giramos una región del plano alrededor de un eje obtenemos un sólido de revolución. El más simple de ellos es el cilindro circular recto o **disco**, que se forma al girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a uno de los lados del rectángulo. El volumen de este disco de radio R y de anchura ω es:

$$\text{Volumen del disco} = \pi R^2 \omega$$

Para ver cómo usar el volumen del disco para calcular el volumen de un sólido de revolución general, consideremos una función continua $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$, cuya gráfica determina con las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, el recinto R . Si giramos este recinto alrededor del eje OX , obtenemos un sólido de revolución.

Se trata de hallar el volumen de este cuerpo engendrado por R . Para ello hay que seguir un proceso similar al realizado en la definición de integral definida.

Elegimos una partición regular de $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Estas divisiones determinan en el sólido n discos cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un disco es $\pi R^2 \omega$, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

siendo:

- $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$
- $\omega = x_i - x_{i-1}$, la altura (anchura) de los cilindros parciales
- $R = f(c_i)$ el radio de los cilindros parciales

Si el número de cilindros parciales aumenta, su suma se aproxima cada vez más al volumen del sólido; es decir:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi f^2(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

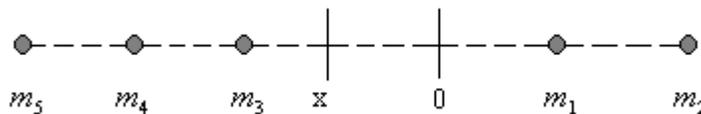
Además, si se toma el eje de revolución verticalmente, se obtiene una fórmula similar:

$$V = \int_c^d \pi f^2(y) dy$$

10.7. Cálculo de momentos, centros de masa y trabajo

Momentos y Centros de Masa

Suponga que cinco masas puntuales (esto es teórico en realidad) están situadas sobre una recta



Sea x_i la distancia dirigida (quiere decir que es en el sentido habitual, si m_i está a la derecha de 0 $x_i > 0$ y si m_i está a la izquierda de 0 $x_i < 0$)

El momento de m_i con respecto a 0 está definido como

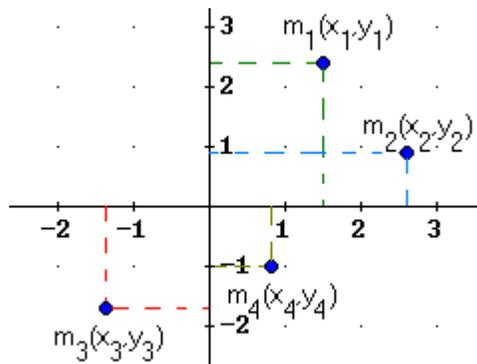
$m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5$ o en general con n masas $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ y el centro de masa del sistema como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Ejemplo 1: Si las masa son de 1,3,1,2,4 respectivamente y están localizadas en los puntos (1,0)

$(\frac{3}{2}, 0)$ $(-2,0)$ $(-3,0)$ $(-\frac{7}{2}, 0)$ $\bar{x} = \frac{1 + \frac{9}{2} - 2 - 6 - 14}{11} = -1.5$; este es el punto en que se equilibraría el sistema si se sostuviera en ese punto con un alfiler esa recta que no tiene peso y que tiene las masa así distribuídas

Si ahora se toman masas puntuales m_i distribuidas en diferentes puntos del plano xy



Momento con respecto al eje $y =$

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i$$

(porque x_i es la abscisa del punto y por lo tanto la distancia dirigida al eje y)

Momento con respecto al eje x

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i$$

(porque y_i es la ordenada del punto y por lo tanto la distancia dirigida al eje x)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_y}{\text{Masa total}} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{M_x}{\text{Masa total}}$$

(\bar{x}, \bar{y}) es el centro de masa del sistema

Ejemplo 2: masas de 2,2,1,3,1,4 gramos están localizadas respectivamente en los puntos (1,1) (2,3) (4,6) (-3,1) (-2,-2) (-4,-1) . Encontrar el centro de masa del sistema

$$\bar{x} = \frac{2+4+4-9-2-16}{13} = -\frac{17}{13} = -1.30$$

$$\bar{y} = \frac{2+6+6+3-2-4}{13} = \frac{11}{13} = 0.846$$

En el punto $(-1.3, 0.846)$ se encuentra localizado el centro de masa de este sistema.

Este sería el punto donde se equilibraría, sostenido por un alfiler, el sistema suponiendo que las masas están distribuidas sobre una lámina extremadamente delgada que no tiene peso.

CENTRO DE MASA DE UNA REGIÓN PLANA.

La región plana se va a tomar como una lámina bidimensional de densidad ρ (en g/cm^2 o kg/m^2 o lb/p^2)

Si una región tiene un ejes de simetría, el centro de masa (si la densidad es uniforme) estará sobre el o los ejes de simetría: Así un círculo tendrá su centro de masa en el centro que es el punto de intersección de los diámetros, un rectángulo en el punto de corte de sus diagonales, o en el punto de intersección de las rectas que bisectan sus lados.



Sea la región plana limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x .

Consideremos una partición del intervalo

$$[a, b] \quad a = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$$

Se toma $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Consideremos el i -ésimo rectángulo. Este tiene como base $x_i - x_{i-1}$ y altura $f(t_i)$.

El centro de masa de un rectángulo como ese está localizado en $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (\frac{x_i+x_{i-1}}{2}, \frac{1}{2}f(t_i))$

El momento de un rectángulo con respecto al eje x es $\underbrace{\rho}_{\text{densidad masa}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})f(t_i)}_{\text{área}} \bar{y}_i$

el momento de un rectángulo con respecto al eje y es $\underbrace{\rho}_{\text{densidad masa}} \underbrace{(x_i - x_{i-1})f(t_i)}_{\text{área}} \bar{x}_i$

densidad masa

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n \rho f(t_i) \bar{x}_i \Delta_i x \approx M_y \quad \sum_{i=1}^n \rho f(t_i) \bar{y}_i \Delta_i x \approx M_x \quad \sum_{i=1}^n \rho f(t_i) \Delta_i x \approx \text{Masa total}$$

Haciendo el razonamiento usual para cuando la norma de la partición tiende a 0 y para tomar el límite de cada una de las sumas

$$M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx \quad (f(t_i) \rightarrow f(x), \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \rightarrow \frac{2x}{2} = x \text{ cuando } \Delta_i x \rightarrow 0)$$

$$M_x = \rho \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx$$

$$\text{Masa} = \rho \int_a^b f(x) dx$$

$$\bar{x} = \frac{\rho \int_a^b x f(x) dx}{\rho \int_a^b f(x) dx} \quad \bar{y} = \frac{\rho \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\rho \int_a^b f(x) dx}$$

Como siempre es mejor tratar de manejar el concepto que usar las "fórmulas" porque así se puede adaptar a otro tipo de situación por ejemplo para cuando en la región la curva está dada en términos de y así como el intervalo de integración.

La densidad termina simplificándose al ser uniforme y la expresión de cada denominador termina siendo el área de la región.

Bibliografía

- HAEUSSLER, ERNEST F. JR., *Matemáticas para Administración y Economía*, Décima Edición, Editorial Pearson, México, 2003
- JAGDISH, C. ARYA, *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía*, Cuarta Edición, Editorial Pearson, México, 2002
- HOFFMANN, LAWRENCE D., *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Sexta Edición, Editorial Mc Graw Hill, Bogotá, 1998

- WEBER, JEAN E., *Matemáticas para Administración y Economía*, Cuarta Edición, Editorial Harla, México, 1984
- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.
- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.
- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.
- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.
- Análisis matemático; Tom M. Apostol.
- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.
- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.
- Apuntes de análisis matemático II (del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.
- Apuntes de análisis matemático (de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.
- Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich.