11. Integrales impropias

11.1. Definición de Integrales Impropias

Las denominadas integrales impropias son una clase especial de integrales definidas (integrales de Riemann) en las que el intervalo de integración o la función en el integrando o ambos presentan ciertas particularidades. Las integrales impropias no son realmente una nueva forma de integrales, sino una extensión natural a las propiedades de la integral y un replanteamiento de nuestro concepto de área bajo la curva.

$\int_a^b f(x)dx$, es impropia si se presenta uno de los siguientes casos:

1.- a = - ∞ o b = ∞, a = - ∞ y b = ∞

2.- $f(x)$ no es acotada en alguno de los puntos de $[a,b]$, dichos puntos se llaman singularidades de $f(x)$.

Existes diversos tipos de integrales impropias las cuales definiremos a continuación:

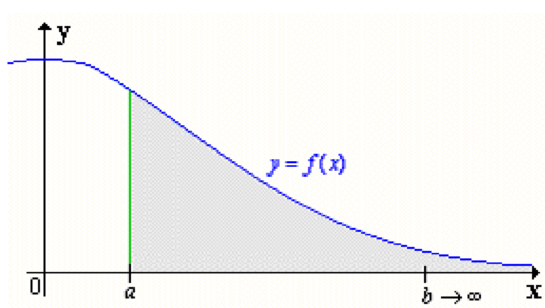
Definición 1:

(i) Si f es continua $\forall x \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig. 1.



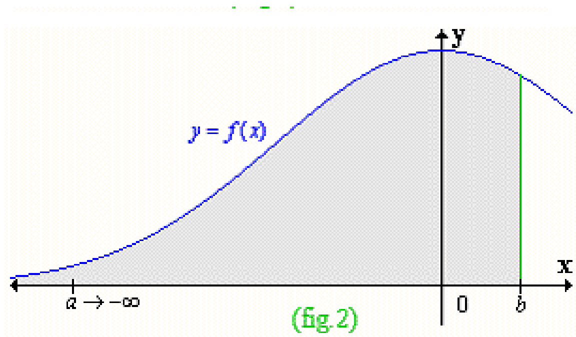
(fig. 1)

(ii) Si f es continua $\forall x \le b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig.2.

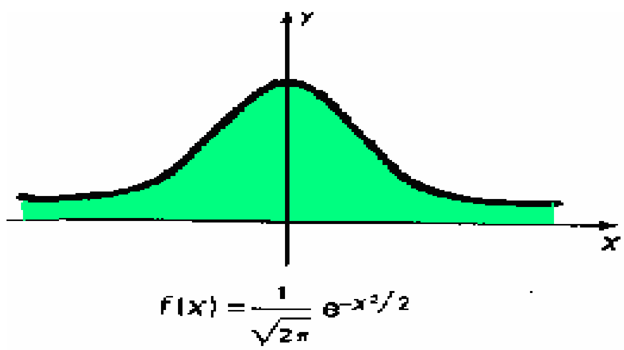


(fig.2)

Definición2:

Si f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$; entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$



Definición3:

(i) Si f es continua $\forall x \in (a,\, b]$, y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$; entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua $\forall x \in [a,\, b)$, y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$; entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)dx$$

si el límite existe.

Definición4:

Si f es continua en todo número de $[a,\ b]$, excepto en c y $a < c < b$, y si además $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$,

entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)dx$$

si los límites del miembro derecho existen.

Cuando los límites, en las definiciones anteriores, **existen**, se dice que la integral es **convergente**, en caso **contrario**, se dice que la integral es **divergente**.

Algunos ejemplos resueltos:

1. $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

Solución:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+\frac{1}{e^0}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right) = (0+1);$$

$\therefore$ $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1.$

La integral converge a 1.

2. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}dx$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} 5^{-x^2}(xdx) \quad (♣)$$

Sea

$$u = -x^2 \quad (1),$$

$$\Rightarrow \quad du = -2xdx, \ \Rightarrow \ -\frac{1}{2}du = xdx \quad (2)$$

Cuando: $\begin{cases} x = 0,\ u = 0 \\ x = a,\ u = -a^2 \end{cases} \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en (♣), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u\left(-\frac{1}{2}du\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^u du\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left[\frac{5^u}{\ln 5}\right]_{-a^2}^{0}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^0}{\ln 5} - \frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5} - 0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}.$$

La integral converge a $-\dfrac{1}{2\ln 5}$.

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx$

11.2. Integral Impropia de 1° clase

Integral impropia de 1ra clase. (divergente)

Ejemplo 2: Mirar si $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ es convergente

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1$$

luego es convergente; mirando que la curva es positiva en el intervalo $[1,\infty]$ se puede decir que éste valor es el área bajo la curva

Ejemplo 3: Calcular si esto es posible el área bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ con $x \in [1,\infty)$

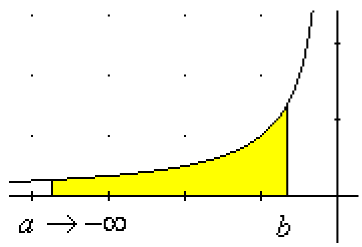
Como $\frac{1}{x} > 0$ para $x \in [1, \infty)$ Area = $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\ dx = \lim_{b \to \infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b \to \infty} [\ln b] = \infty$

Entonces el área no se puede medir porque la integral es divergente.

2) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx$

Se toma un valor a para calcular $\int_{a}^{b} f(x)\ dx$ y luego se hace tender a hacia -∞. Es decir

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\ dx$$



Ejemplo 4: La región limitada por la curva $y = e^x$ el eje y, el eje x rota alrededor del eje x; encontrar el volumen del sólido obtenido.

Utilizando discos

Volumen =

$$\pi \int_{-\infty}^{0} (e^x)^2\ dx = \pi \lim_{a \to \infty} \int_{a}^{0} e^{2x}\ dx = \pi \lim_{a \to \infty} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_a^0 = \frac{\pi}{2} \lim_{a \to -\infty} [1 - e^{2a}] = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 5: Determinar si $\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2-1}\ dx$ es convergente o divergente

$\int \frac{1}{x^2-1}\ dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1|$ utilizando fracciones parciales

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|\right]_a^{-3} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 4 + \infty - \infty$$

Como $\infty - \infty$ es una forma indeterminada se debe mirar si se puede levantar la indeterminación

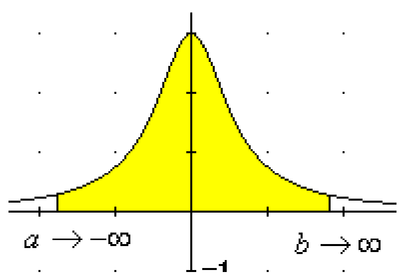
$$-\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$
$$\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\lim_{a\to-\infty}\frac{a-1}{a+1}\right| = \frac{1}{2}\ln|-1| = 0$$

Así : $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 4 = 0.3465$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Este caso sería una combinación de los dos numerales anteriores

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$



Pero si la curva tiene alguna simetría se puede aprovechar este hecho para que la integral sea impropia en uno solo de los límites de integración

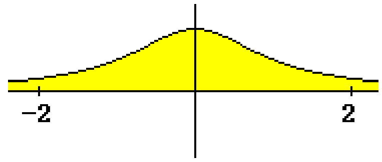
Ejemplo 6: Encontrar el área limitada por la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ y el eje x

Por lo que la curva es siempre positiva Area$=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Pero como la curva es simétrica con respecto al eje y

Area
=2

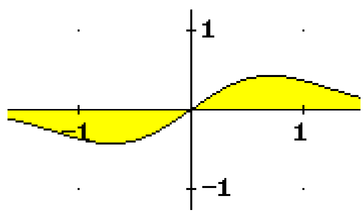
$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$\frac{1}{1+x^2}$



Ejemplo 7: Determinar si $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$ converge o diverge

xe^{-x^2}



como se ve en la gráfica es una función impar por lo cual si $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$ existe

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = -\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx$$

$$\int xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \quad \int_0^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2}$$ por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = 0$$

Esto no se hubiera podido decir desde el principio porque perfectamente $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$ podía haber sido divergente y el resultado $\infty - \infty$ no da cero.

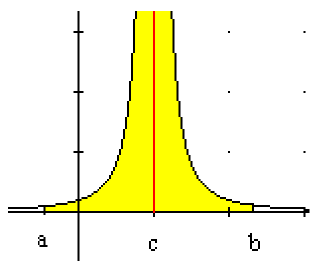
<U< INTEGRANDOS CON>Si f es una función contínua en un intervalo $[a, b]$ $\int_a^b f(x)\ dx$ existe

Si f es discontínua en a se hace $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{s \to a^+} \int_s^b f(x)\ dx$ y si este límite existe se dirá que la integral es convergente si no que es divergente.

Si f es discontínua en b se hace $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\ dx$ con la misma observación anterior

Si f es discontínua en algún número $c \in (a, b)$ pero contínua en todos los demás valores

$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$ aplicándose sobre el número c lo que se describió



11.3. Integral Impropia de 2° clase

Se denomina integral impropia de segunda especie dependiente del parámetro t a una integral de la forma donde para cada , es continua salvo en un punto y es infinito alguno de los límites laterales de cuando x tiende a .

NOTAS:

1) Usando la propiedad de aditividad respecto del intervalo de integración, siempre se puede suponer que es uno de los extremos del intervalo.

2) La teoría correspondiente a las integrales impropias de segunda especie dependiente de un parámetro es análoga a la correspondiente a las de primera especie.

3) La integral con continua salvo en un punto , donde es infinito alguno de los límites laterales se denomina impropia de tercera especie dependiente de un parámetro. Para trabajar con este tipo de integrales, se usa la aditividad respecto del intervalo de integración y se descompone en suma de integrales de 1ª y 2ª especie. La integral será convergente si lo son todos los sumandos de la descomposición.

5.3 Integral impropia de 2da clase.(convergentes)

Ejemplo 8: Decir si la integral converge o diverge El integrando es discontínuo en 0 entonces Como siempre, este resultado me está dando el área bajo la curva

Ejemplo 9: Decir si la integral es convergente o divergente El integrando es discontínuo en luego la integral diverge Ejemplo 10: Decir si converge o diverge Si se pasa por encima de la discontinuidad haciendo !!! Resultado absurdo puesto que en todo el intervalo la función es positiva! Como es discontínua en 0 Como la región es simétrica con respecto al eje si converge también;

`luego es divergente`

Ejemplo 11: Muestre que el perímetro de una circunferencia de radio es La ecuación de una circunferencia de centro en y de radio es El perímetro de la circunferencia será la longitud de un cuarto de arco multiplicado por cuatro.

El integrando es discontínuo en (el denominador se hace);

En muchas de las aplicaciones que vimos de la integral se presentan estos casos donde hay que hacer uso de integrales impropias.

Integrales impropias de primera y segunda especie. Criterios de convergencia. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de Weierstrass, y Abel-Dirichlet.

Principales definiciones y teoremas

Definición 8 Sea una función $f(x)$ integrable Riemann en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$. Si existe el límite

$$\lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\, dx = l < \infty$$

diremos que existe la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ en $[a,b)$ que converge a l y escribiremos

$$l = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Si no existe el l anterior diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge.

Análogamente se pueden definir las integrales impropias en $(-\infty, a]$.

Definición 9 Sea $f(x)$ una función integrable en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$, $|b| < +\infty$. Si existe el límite

$$\lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\, dx = l < \infty$$

diremos que existe la integral impropia de segunda especie $\int_a^b f(x)\, dx$ en $[a,b)$ que converge a l y escribiremos

$$l = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Si no existe el l anterior diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Observación: Obviamente ambas definiciones se pueden unificar en una única

Definición 10 Sea una función $f(x)$ integrable Riemann en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$. Si existe el límite

$$\lim_{t \to b-} \int_a^b f(x)\,dx = l < \infty$$

diremos que existe la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ en $[a,b)$ que converge a l y escribiremos

$$l = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Si no existe el l anterior diremos que la integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Teorema 15 Criterio de comparación para las integrales impropias. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$ tales que

$$\forall x \in [a,b), \qquad 0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Entonces si la integral $\int_a^b g(x)\,dx$ es convergente, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ también lo es, y si $\int_a^b f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^b g(x)\,dx$ también será divergente.

Teorema 16 Criterio de Abel-Dirichlet para las integrales impropias.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en cualquier intervalo $[a,t] \subset [a,b)$ y sea g una función monótona. Entonces, para que la integral impropia $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ converja es suficiente que se cumplan cualquiera de las dos siguientes pares de condiciones:

a) $\int_a^b f(x)dx$ converja y g acotada en $[a,b)$, o

b) $\int_a^t f(x)dx$ este acotada para todo $t \in [a,b)$ y $g(x)$ converja a cero cuando $x \to b$.

Bibliografía

- HAEUSSLER, ERNEST F. JR., *Matemáticas para Administración y Economía*, Décima Edición, Editorial Pearson, México, 2003

- JAGDISH, C. ARYA, *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía,* Cuarta Edición, Editorial Pearson, México, 2002

- HOFFMANN, LAWRENCE D., *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Sexta Edición, Editorial Mc Graw Hill, Bogotá, 1998

- WEBER, JEAN E., *Matemáticas para Administración y Economía*, Cuarta Edición, Editorial Harla, México, 1984
- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.

- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.

- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.

- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.

- Análisis matemático; Tom M. Apostol.

- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.

- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.

- Apuntes de análisis matemático II(del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.

- Apuntes de análisis matemático(de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.

- Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich.