2. Funciones

2.1. Definición de función

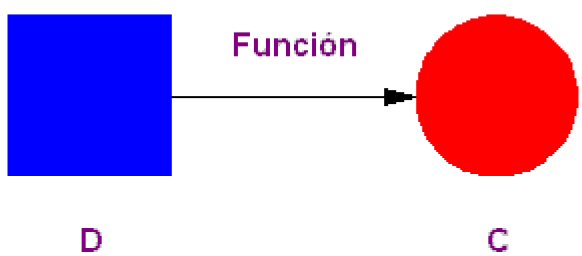
Toda regla de correspondencia como los ejemplos anteriores es llamada **relación**.

Ciertos tipos especiales de reglas de correspondencia se llaman **funciones**.

La definición de función se dá enseguida.

Función:

Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.



Al primer conjunto (el conjunto D) se le da el nombre de dominio.

Al segundo conjunto (el conjunto C) se le da el nombre de contradominio o imágen.

Una función se puede concebir también como un aparato de cálculo. La entrada es el dominio, los cálculos que haga el aparato con la entrada son en sí la función y la salida sería el contradominio.

Esta forma de concebir la función facilita el encontrar su dominio.

Notación: al número que "entra" a la máquina usualmente lo denotamos con una letra, digamos *x* o *s*, o cualquier otra.

Al número que "sale" de la máquina lo denotamos con el símbolo *f(x)* ó *f(s)*.

Ejemplo: $f(x) = x^2 + 3x - 6$

Esta función es una regla de correspondencia que dice lo siguiente: "A cada número en el dominio de *f* se le relaciona con el cuadrado de ese número mas el triple de ese número menos seis".

Otra manera de ver esto es escribiendo la función de la siguiente manera:

$f(\ ) = (\ )^2 + 3(\ ) - 6$

Enseguida se muestran los valores de *f* para varios valores de ( ). Es decir, se muestra la "salida" de la "máquina" para varios valores de la "entrada".

$f(x) = x^2 + 3x - 6$

$f(10) = 124$

$f(-2) = -8$

$$f(h + 1) = (h + 1)^2 + 3(h + 1) - 6$$

$$f(x + b) = (x + b)^2 + 3(x + b) - 6$$

f() = ()^2 + 3() - 6

El dominio de una función puede ser especificado al momento de definir la función.

Por ejemplo, $F(x) = 2x$ en el intervalo [-3,10] es una función cuyo dominio es el intervalo [-3,10]. A menudo no se especifica el dominio de una función definida por una ecuación, por ejemplo,

$$G(x) = 3x^3 - 2x + 10$$

(Sin especificar el dominio)

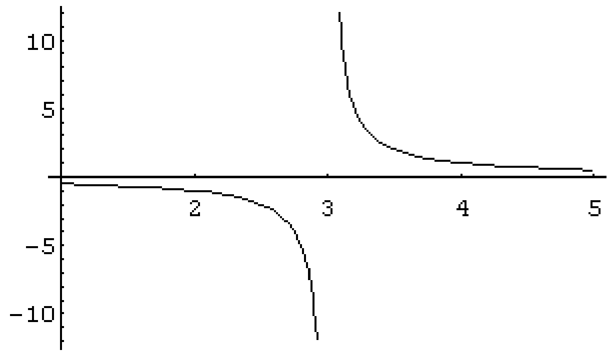
<u>En adelante quedará entendido que</u>:

A menos que se especifique explícitamente, el dominio de una función será el conjunto más grande de números reales para los cuales la función nos dé como salida un número real.

Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x - 3}$$

Para esta función $x = 3$ no forma parte del dominio, ya que al ingresar dicho valor en la función obtendríamos un diagnóstico de error pues no se puede dividir entre cero. Observa además que la función no puede tomar el valor cero. ¿Porqué? Observa la gráfica.



2.2. Representación de funciones

Gráfica de una fución

La gráfica de una función está formada por el conjunto de puntos (x, y) cuando x varía en el dominio D.

gráfica (f) = {(x, f(x)) / $\forall$x $\in$D}

Para representarla calcularemos aquellos puntos o intervalos donde la función tiene un comportamiento especial, que determinaremos mediante el estudio de los siguientes apartados:

1. **Dominio de una función.**
2. **Simetría.**
3. **Periodicidad.**
4. **Puntos de corte con los ejes.**
5. **Asíntotas.**
6. **Ramas parabólicas.**
7. **Crecimiento y Decrecimiento.**
8. **Máximos y mínimos.**
9. **Concavidad y convexidad.**
10. **Puntos de inflexión.**

Ejemplo de representación de una función

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

Dominio

$1+x^2=0$ $\qquad$ $D=\mathbb{R}$

Simetría

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-f(x)$$

Simetría respecto al origen.

Puntos de corte con los ejes

Punto de corte con OY:

$\frac{x}{1+x^2}=0$ $\qquad$ $(0,0)$

*P*untos de corte con el eje OY

$(0,0)$

Asíntotas

Asíntota horizontal

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$ $\qquad$ $y=0$

No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento

$f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $\qquad \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0$ $\qquad x=\pm 1$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Creciente: $(-1,1)$

Decreciente: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

Mínimos

Mínimo $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$

Máximos

Máximo $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

Concavidad y convexidad

$f''(x)=\dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$ $\qquad \dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}=0$ $\qquad x=0$ $\qquad x=\pm\sqrt{3}$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

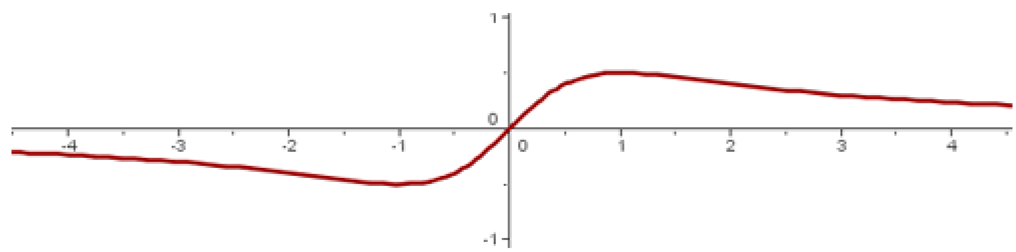
$$\text{Cóncava}: \left(-\sqrt{3},0\right) \cup \left(\sqrt{3},\infty\right)$$

$$\text{Convexa}: \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right)$$

Puntos de inflexión

$$\text{Puntos de inflexión}: \left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)(0,0) \qquad \left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Representación gráfica



2.3 Clasificación de funciones por su naturaleza; algebraicas y trascendentales

Funciones algebraica

Ya se analizó el concepto de función y sus elementos; ahora estudiaremos un grupo de funciones llamadas algebraicas, en particular un conjunto de ellas que denominaremos funciones polinomiales.

Las funciones polinomiales tienen una gran aplicación en la elaboración de modelos que describen fenómenos reales. Algunos de ellos son: la concentración de una sustancia en un compuesto, la distancia recorrida por un móvil a velocidad constante, la compra de cierta cantidad de objetos a un precio unitario, el salario de un trabajador más su comisión, la variación de la altura de un proyectil, entre otros.

Una función algebraica explícita es aquella cuya variable *y* se obtiene combinando un número finito de veces la variable *x* y constantes reales por medio de operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces.

Un ejemplo de una función algebraica explícita es aquella para la cual la regla de correspondencia viene dada por:

$$y = \frac{\left(\sqrt{x} + 5\right)^3}{\left(x^{2/3} + 3\right)}.$$

Definición:

"Las ***funciones algebraicas*** son aquellas cuya regla de correspondencia es una expresión algebraica".

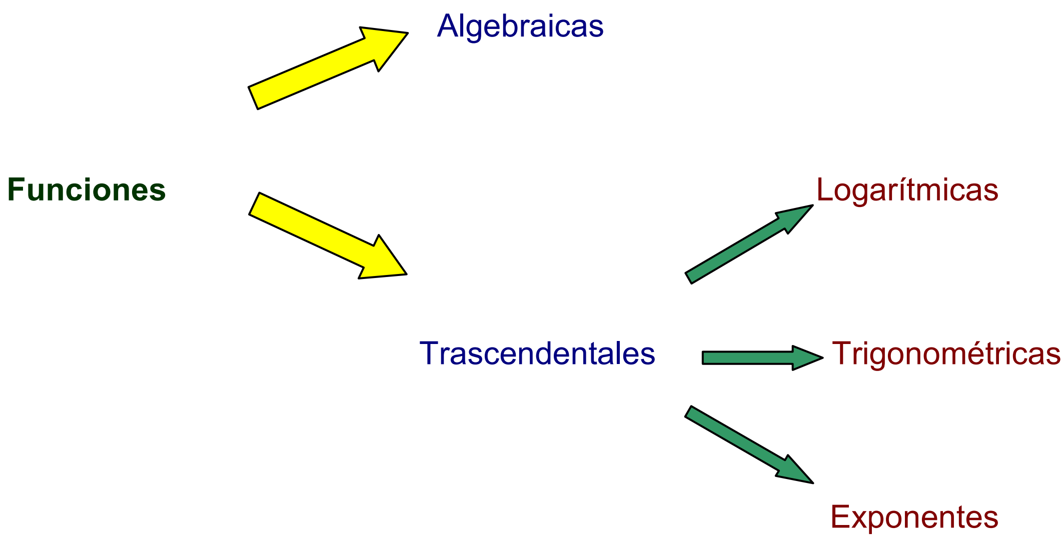
<u>Funciones Trascendentes</u>

No siempre se puede modelar con funciones del tipo algebraico; esto ha dado lugar al desarrollo de otro tipo de funciones, las **funciones trascendentes**, las cuales se clasifican en: las *trigonométricas y sus inversas*, relacionadas con el triángulo rectángulo; y las *logarítmicas y exponenciales*, más asociadas a una variación en progresión geométrica (crecimiento poblacional, por ejemplo).

Definición:

Se llama ***función trascendente***, aquella cuya variable y contiene expresiones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Ejemplos de funciones trascendentes son las siguientes:

$$y = e^x + \operatorname{sen} x$$
$$y = 3^x$$
$$y = Log_2 x + 5$$



2.2.1. Función Polinomial.

Función Polinomial

Como se mencionó, dentro de las funciones algebraicas tenemos un conjunto de funciones que llamamos "**funciones polinomiales** y son aquellas cuya regla de correspondencia es un polinomio". Recordando que el grado de un polinomio es el exponente mayor de la variable, podemos hablar de una función polinomial de grado *n*.

Definición:

Función Polinomial	Llamamos a una función polinomial de grado *n*, si tiene la forma $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,\ \ a_0 \neq 0$ en donde *n* es un entero positivo.

Todas las funciones polinomiales tienen como dominio al conjunto de números reales **R**, pero su contradominio varía dependiendo del tipo de función que sea.

Una función polinomial puede considerarse como una suma de funciones cuyos valores son del tipo cx^k, donde c es un número real y k es un entero no negativo.

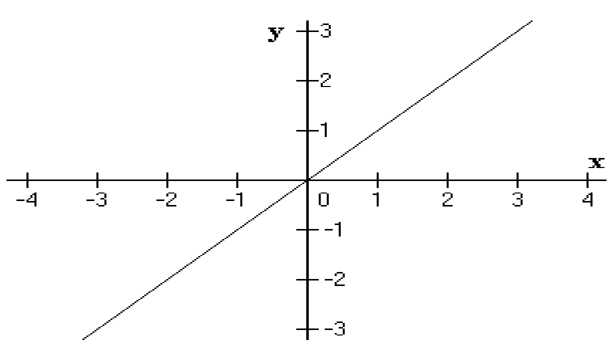
Ejemplos particulares de la función polinomial son, la función lineal (función polinomial de grado uno), la función cuadrática (función polinomial de segundo grado), función cúbica (función polinomial de tercer grado)

Función Identidad

Definición:

Función Identidad	La función de identidad se define mediante la expresión $f(x) = x$

*"La **función identidad** tiene la propiedad de que a cada argumento x del dominio le hace corresponder el mismo valor en el contradominio y, por lo tanto, éste es **R**".* La gráfica de esta función es la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 45° (ver figura 19).



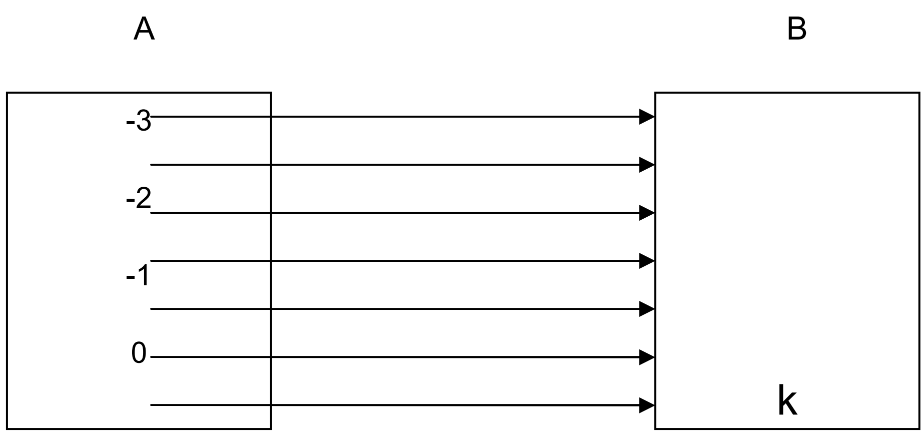
FUNCIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO
$f(x)=x$	Todo número real $-\infty<x<\infty$	Todo número real $-\infty<x<\infty$

Función Constante

Definición:

Función Constante	La función constante se define mediante la expresión $f(x)=k$, en donde *k* es un número real diferente de cero.

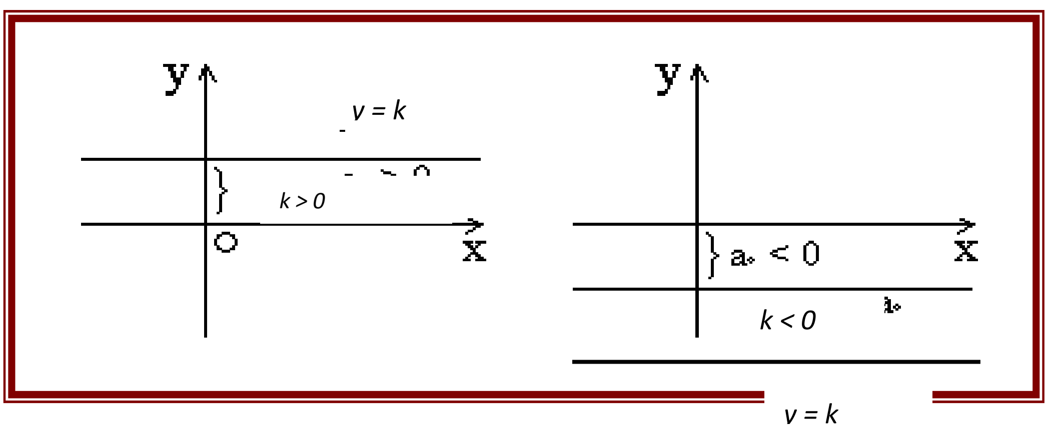
"La **función constante** tiene la propiedad de que a cada argumento *x* del dominio le hace corresponder la misma imagen k".



1. La gráfica de la función constante conlleva a una recta horizontal que dista k unidades del eje x, por arriba si k > 0, o por abajo si k < 0. Figura 21

2. El grado de esta función es 0.

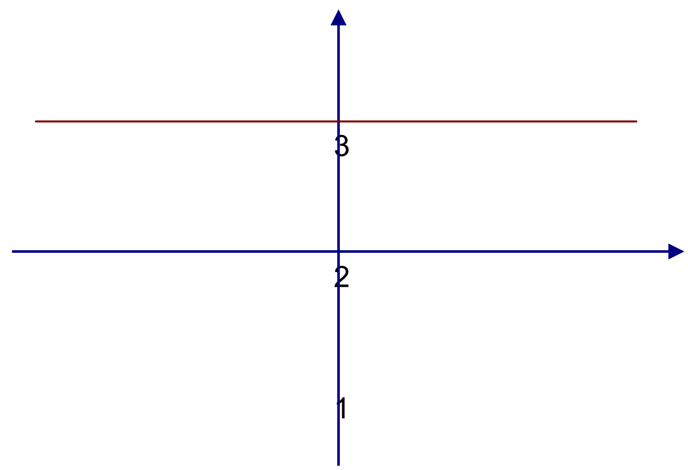
3. Su contradominio es en conjunto unitario {k}.



Ejemplo: Grafica las siguientes funciones constantes en el conjunto de puntos indicado

1. $f(x) = 3$

x	y = 3
-5	3
-4	3
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3
3	3
4	3
5	3



Función Lineal.

Definición:

Función Lineal	La función lineal se define como una expresión de la forma $f(x) = mx + k$

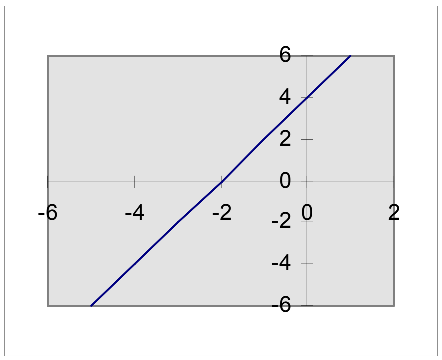
"La **función lineal** es un polinomio de primer grado en el que su contradominio coincide con el dominio, es decir, con **R**, y cuya gráfica es una línea recta donde *m* representa la pendiente de ella, y *k* el punto donde ésta se intersecta con el eje *y*". Esto lo verificaremos más adelante con los ejercicios.

La función lineal sólo tiene una raíz en el punto (-k/m, 0), pues si f(x) = 0, mx + k =0, de donde, despejando mx = -k, y finalmente, x = -k/m.

La *m* representa la *pendiente* de la recta y *k*, el intercepto con el eje *y;* solo basta con calcular las coordenadas de dos de los puntos para trazar la gráfica de una función lineal.

FUNCIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO
$f(x) = mx + k$	Todo número real $-\infty < x < \infty$	Todo número real $-\infty < x < \infty$

Ejemplo 1: Traza la gráfica de la función f(x) = 2x + 4



En la función f(x) = 2x + 4, la pendiente es 2, por tanto la gráfica es creciente en los números reales. El dominio y el recorrido es el conjunto de los números reales. El intercepto en y es (0,4).

Ejemplo 2. Traza la gráfica de la función $f(x) = 3x - 6$

x	y = 3x - 6
-4	-18
-3	-15
-2	-12
-1	-9
0	-6
1	-3
2	0
3	3
4	6

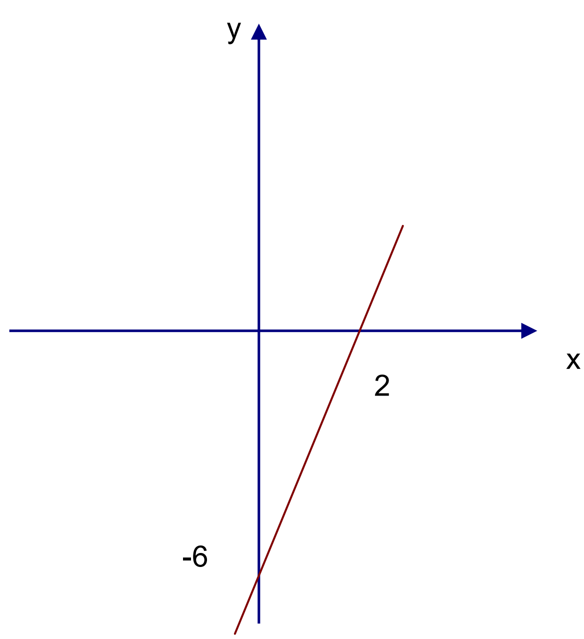
Raíz

3x – 6 = 0

3x = 6

x = 6/3

x = 2



Resumen:

1. Si *m* es positiva *(m > 0),* el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x es agudo.

Función Cuadrática.

Definición:

Función Cuadrática. La función cuadrática es un polinomio de segundo grado. Tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

grado que tiene la forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y de la cual podemos obtener dos, una o ninguna raíz real dependiendo del discriminante $b^2 - 4ac$ bajo las siguientes condiciones.

$b^2 - 4ac$

> 0 da lugar a dos raíces reales distintas.

= 0 da lugar a dos raíces reales iguales.

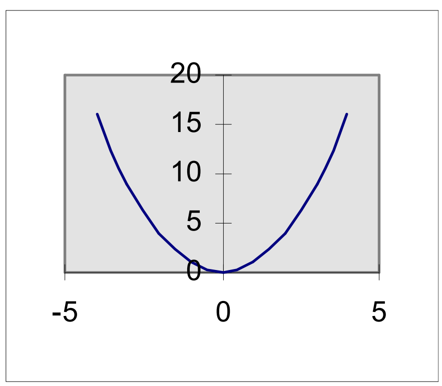
< 0 no da lugar a raíces reales.

- La gráfica de la función cuadrática es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$, o abre hacia abajo si $a < 0$.
- El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números reales.
- El contradominio de esta función es el conjunto de números *y* tales que $y \geq k$ si $a > 0$, o bien $y \leq k$ si $a < 0$, donde k es la ordenada del vértice de la parábola.
- El vértice de la parábola se determina por la fórmula:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right).$$

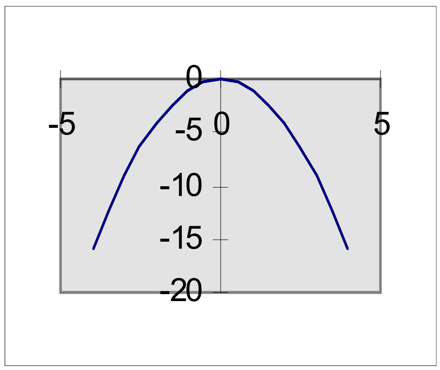
Ejemplo 1. Determina el dominio y el contradominio de la función $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que abre hacia arriba, pues $a > 0$. El vértice es (0,0). El dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es cero y los reales positivos ($y \geq 0$).



Ejemplo 2.- Determina el dominio y el contradominio de la función $f(x) = -x^2$

$f(x) = -x^2$ es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola que abre hacia abajo, pues $a < 0$. El vértice es (0,0). El dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el conjunto de los números reales negativos y el cero ($y \leq 0$).



Ejemplo 3. Grafica las siguientes funciones cuadráticas y calcula sus raíces.

1. $f(x) = 2x^2 - 8x - 24$

x	y = $2x^2$-8x-24
-4	40
-3	18
-2	0
-1	-4
0	-24
1	-30
2	-32
3	-30
4	-24
5	-4
6	0
7	18
8	40

Raíces

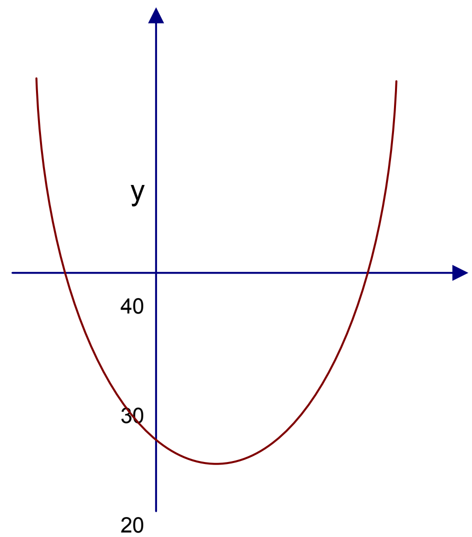
$2x^2 - 8x - 24 = 0$

a = 2, b = -8, c = -24

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(-24)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm 16}{4}$$



Función Cúbica.

Definición:

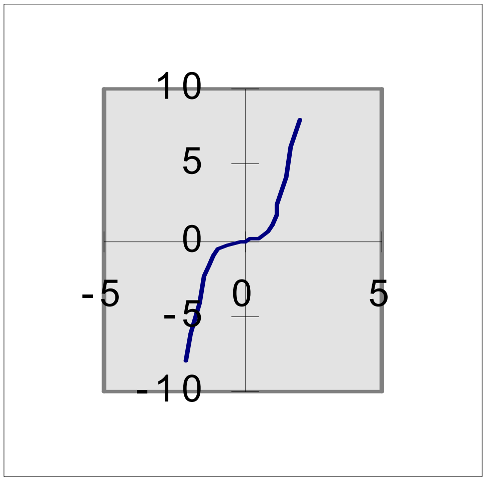
Función cúbica: La función cúbica se define como polinomio de tercer grado; tiene la forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0.$$

FUNCIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d, a\neq 0$	Todo número real $-\infty<x<\infty$	Todo número real $-\infty<x<\infty$

Ejemplo 1: Realiza la gráfica de la función $y = x^3$



x	$y = x^3$
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

RESUMEN DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES

GRADO	FUNCIÓN	DEFINICIÓN	DOMINIO	CONTRADOMINIO	CARACTERÍSTICAS

0	Constante	$f(x)=k$	**R**	**{k}**	Asigna a cada argumento la misma imagen k. Recta horizontal. No tiene raíces.
1	Identidad	$f(x)=x$	**R**	**R**	Asocia a cada argumento del dominio el mismo valor en el contradominio. Recta que pasa por el origen con un ángulo de 45^0. Raíz en el punto x = 0.
1	Lineal	$f(x)=mx+k$	**R**	**R**	Recta con inclinación aguda si $m>0$ y obtusa si $m<0$. Raíz en el punto $x=-k/m$.
2	Cuadrática	$f(x)=ax^2+bx+c$	**R**	$y \geq k$ **si** $a>0$ $y \leq k$ **si** $a<0$	Parábola cuya ordenada del vértice es k. Raíces dadas por la fórmula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
3	Cúbica	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	**R**	**R**	Tiene al menos una raíz real.

2.3.1. Funciones polinomial

Recordando:

Definición de función.

"Una *función* es el conjunto de pares ordenados de número reales (x, y) en los cuales dos pares ordenados distintos no tienen el mismo primer número. El conjunto de todos los valores permisibles de x es llamado *dominio* de la función (D_f), y el conjunto de todos los

Si una función f está definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son números reales ($a_n \neq 0$) y n es un entero no negativo, entonces, f se llama una *función polinomial* de grado n. Por lo tanto, $f(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$, es una función polinomial de grado 5. Una *función lineal* es una función polinomial de grado 1, si el grado de una función polinomial es 2, se llama *función cuadrática*, y si el grado es 3 se llama *función cúbica*. Una función que puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales $Q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ se llama *función racional*. Una *función algebraica* es aquella que está formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la función identidad y la función constante. Las funciones trascendentes son las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

Ejemplos:

1. Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$:

(a) Determine el dominio de la función

(b) Las intercepciones con los ejes

(c) Elabora una tabla para algunos valores del D_f

(d) Traza la gráfica de la función

(e) Estima una aproximación del R_f (puedes comprobarlo utilizando un software)

Solución:

(a) $D_f = R$ (el dominio de las funciones polinomiales son todos los números reales.

(b) Intercepciones con los ejes:

$Si\ x = 0$
$y = 6$

La curva intercepta al eje y en el punto (0, 6)

$Si\ y = 0$
$0 = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Por división sintética:

Los factores de 6 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
 & & 1 & -1 & -6 \\
\hline
1 & 1 & -1 & -6 & 0
\end{array}
$$

Por lo tanto, f tiene un factor de la forma x-1.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

El factor $x^2 - x - 6$, puede descomponerse en:

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} &Si \;\; y = 0 \\ &x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &(x-1)(x-3)(x+2) = 0 \end{aligned}$$

Los valores de x son:

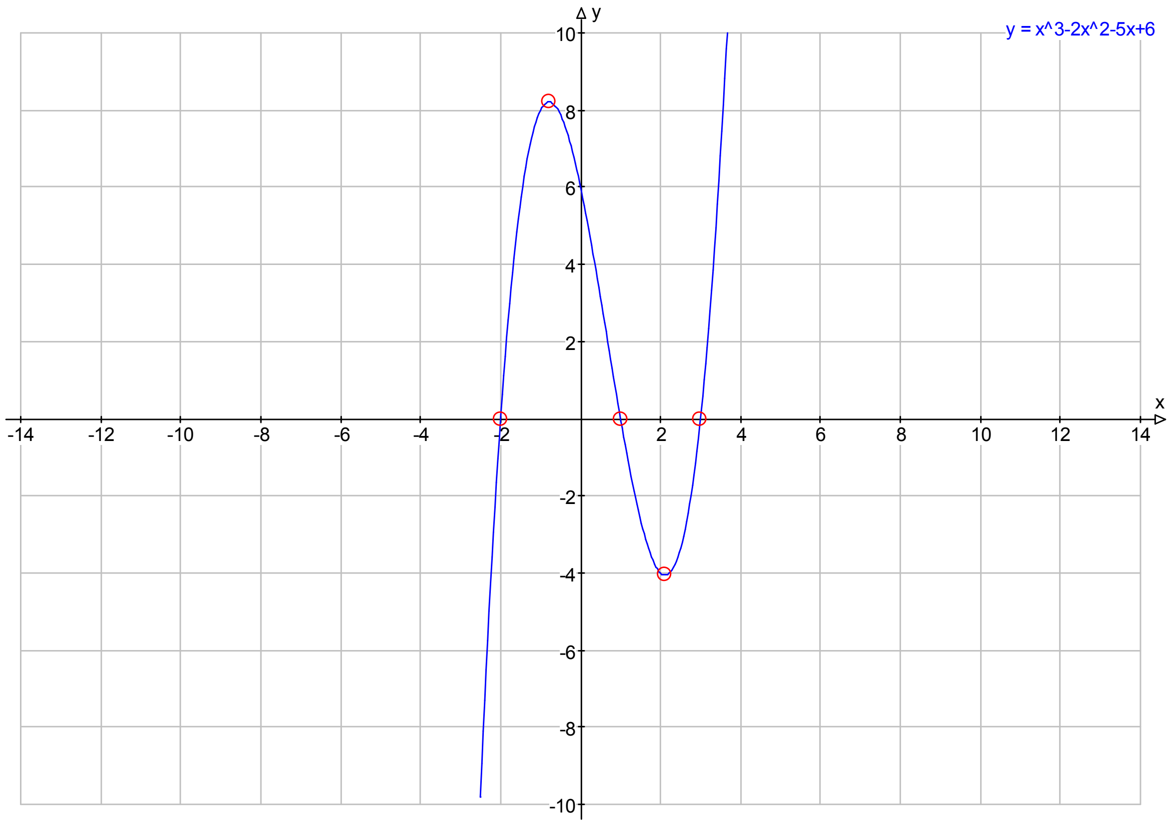
$$\begin{aligned} x - 1 = 0 \qquad &\Rightarrow x = 1 \\ x - 3 = 0 \qquad &\Rightarrow x = 3 \\ x + 2 = 0 \qquad &\Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

La curva corta al eje x en los puntos: (-2, 0), (1, 0) y (3, 0)

(c) La siguiente tabla será de mucha utilidad para graficar:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-70	-24	0	8	6	0	-4	0	18

(d) La función ha sido graficada utilizando un software:



(e) El recorrido de la función coincide con el contradominio:

$$R_f = R$$

2. Para la función $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$:

(a) Determine el dominio de la función

(b) Las intercepciones con los ejes

(c) Elabora una tabla para algunos valores del D_f

(d) Traza la gráfica de la función

(e) Estima una aproximación del R_f (puedes comprobarlo utilizando un software)

Solución:

(a) $D_f = R$

(b) intercepciones con los ejes:

$$Si\ x = 0$$
$$y = 0$$

La curva corta al eje y en el punto (0, 0)

$$Si\ y = 0$$
$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = 0$$

Factorizando:

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = 0$$
$$x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = 0$$

Descomponiendo $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$ por división sintética:

	1	-5	2	8
		-1	6	-8
-1	1	-6	8	0

Por lo tanto:

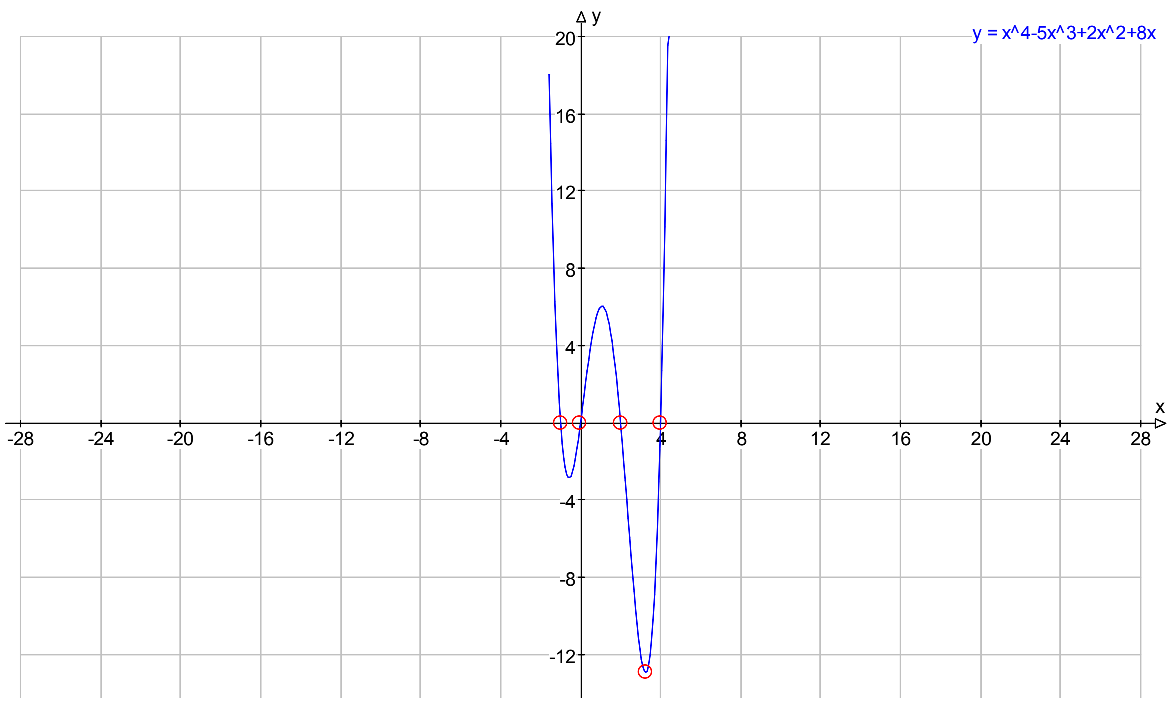
$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x+1)(x^2 - 6x + 8) = x(x+1)(x-4)(x-2)$$

La curva corta al eje x en los puntos: (-1, 0), (0, 0), (2, 0) y (4, 0)

(c) Elaboramos una tabla en el intervalo [-3, 5]

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	210	48	0	0	6	0	-12	0	90

(d) Graficando:



$R_f = [-12.95, \infty)$

El valor de -12.95 se obtiene cuando se grafica con el software Equation Grapher.

2.3.2. Función racionales

Una función racional es aquella que se obtiene al dividir dos polinomios. Si P y Q son funciones polinomiales y *f* es la función definida por como:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Entonces, *f* es una función racional. En las funciones racionales, la variable x no puede tomar el valor que hace cero al denominador, por eso, el dominio de *f* es el conjunto de todos los números reales excepto los ceros de Q.

1) La función:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

La escena siguiente permite analizar el comportamiento de la función, modifica los valores de ***x*** y encuentra el dominio y el rango de la función.
racional

2.3.3. Función Raíz

Es una función que se expresa utilizando un radial o un exponente fraccionario.

Veamos el caso de las funciones irracionales

Como la raíz cuadrada de números negativos no tiene solución real, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales “x” que no convierten el radicando en números negativos, es decir que , p(x) > o

2.3.4. Función trigonométrica

Las funciones trigonométricas son valores sin unidades que dependen de la magnitud de un ángulo. Se dice que un ángulo situado en un plano de coordenadas rectangulares está en su posición normal si su vértice coincide con el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.

En la figura 3, el punto P está situado en una línea recta que pasa por el origen y que forma un ángulo q con la parte positiva del eje x. Las coordenadas x e y pueden ser positivas o negativas según el cuadrante (I, II, III, IV) en que se encuentre el punto P; x será cero si el punto P está en el eje y o y será cero si P está en el eje x. La distancia r entre el punto y el origen es siempre positiva e igual a ¶x2+ y2, aplicando el teorema de Pitágoras.

Las seis funciones trigonométricas más utilizadas se definen de la siguiente manera:

Como la x y la y son iguales si se añaden 2p radianes al ángulo —es decir, si se añaden 360°— es evidente que sen (q + 2p) = sen q. Lo mismo ocurre con las otras cinco funciones. Dadas sus respectivas definiciones, tres funciones son las inversas de las otras tres, es decir,

Si el punto P, de la definición de función trigonométrica, se encuentra en el eje y, la x es cero; por tanto, puesto que la división por cero no está definida en el conjunto de los números reales, la tangente y la secante de esos ángulos, como 90°, 270° y -270° no están definidas. Si el punto P está en el eje x, la y es 0; en este caso, la cotangente y la cosecante de esos ángulos, como 0°, 180° y -180° tampoco está definida. Todos los ángulos tienen seno y coseno, pues r no puede ser igual a 0.

Como r es siempre mayor o igual que la x o la y, los valores del sen q y cos q varían entre -1 y +1. La tg q y la cotg q son ilimitadas, y pueden tener cualquier valor real. La sec q y la cosec q pueden ser mayor o igual que +1 o menor o igual que -1.

Como se ha podido ver en los anteriores apartados, el valor de las funciones trigonométricas no depende de la longitud de r, pues las proporciones son sólo función del ángulo.

Si q es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo (figura 4), las definiciones de las funciones trigonométricas dadas más arriba se pueden aplicar a q como se explica a continuación. Si el vértice A estuviera situado en la intersección de los ejes x e y de la figura 3, si AC descansara sobre la parte positiva del eje x y si B es el punto P de manera que AB = AP = r, entonces el sen q = y/r = a/c, y así sucesivamente:

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos se pueden obtener con facilidad. Por ejemplo, en un triángulo rectángulo isósceles, se tiene que q = 45 ° y que b = a, y además se sabe, por el Teorema de Pitágoras, que c2= b2+ a2. De aquí se deduce que c2= 2a2 o que c = a¶2. Por tanto

Los valores numéricos de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera se pueden hallar de forma aproximada dibujando el ángulo en su posición normal utilizando la regla, el compás y el transportador de ángulos. Si se miden x, y y r es fácil calcular las proporciones deseadas. En realidad, basta con calcular los valores del sen q y del cos q para unos cuantos ángulos específicos, pues los valores de los demás ángulos y las demás funciones se calculan utilizando las igualdades que se mencionan en el siguiente apartado.

Las razones trigonométricas se pueden utilizar, fundamentalmente, para resolver triángulos, así como para resolver diferentes situaciones problemáticas en otras ciencias.

En Topografía se puede determinar la altura de un edificio, teniendo la base y el ángulo. Por ejemplo, la torre de Pisa, fue construida sobre una base de arena poco consistente; debido a ello ésta se aparta cada vez más de su vertical. Originalmente tenía una altura de 54,6m, aproximadamente. En 1990 un observador situado a 46 m del centro de la base de la torre, determinó un ángulo de elevación de 54º a la punta de la torre, el observador para determinar al desplazamiento (hundimiento en el suelo es muy pequeño, comparado con la altura de la torre) aplicó la ley del seno para determinar el ángulo de inclinación y la ley del coseno para determinar el desplazamiento de la torre.

En Óptica, en las dispersiones en prisma o cuando un rayo de luz atraviesa una placa de cierto material.

En la Aviación, si dos aviones parten de una base aérea a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

El capitán de un barco puede determinar el rumbo equivocado del barco, siempre en línea recta, ordenando modificar el rumbo en grado para dirigirse directamente al punto destino correcto.

2.3.5 Función exponencial

Se llaman así a todas aquellas funciones de la forma $f(x) = b^x$, en donde la base b, es una constante y el exponente la variable independiente. Estas funciones tienen gran aplicación en campos muy diversos como la biología, administración, economía, química, física e ingeniería.

La definición de función exponencial exige que la base sea siempre positiva y diferente de uno ($b>0$ y $b\neq1$). La condición que b sea diferente de uno se impone, debido a que al reemplazar a b por 1, la función b^x se transforma en la función constante $f(x) = 1$. La base no puede ser negativa porque funciones de la forma $f(x)=(-9)^{1/2}$ no tendrían sentido en los números reales.

El dominio de la función exponencial está formada por el conjunto de los números reales y su recorrido está representado por el conjunto de los números positivos.

Se llama así a la función $y= f(x) = a^x$, cuando $a>0$, es decir una potencia donde la variable independiente es el exponente, siendo la base una constante positiva.

Tendremos, por ejemplo, $f(3/2)= a^{3/2}$. Tomando la raíz aritmética, la función queda unívocamente definida para todo x racional, y su variación en este campo resulta de lo siguiente:

Las potencias de exponente racional de los números positivos mayores(menores) que uno, son mayores(menores) que uno si el exponente es positivo, y son menores(mayores) que uno si es negativo. En ambos casos crecen(decrecen) al crecer el exponente.

Si $a=1$, se reduce a la función constante $f(x) =1$ y no la consideramos como función exponencial.

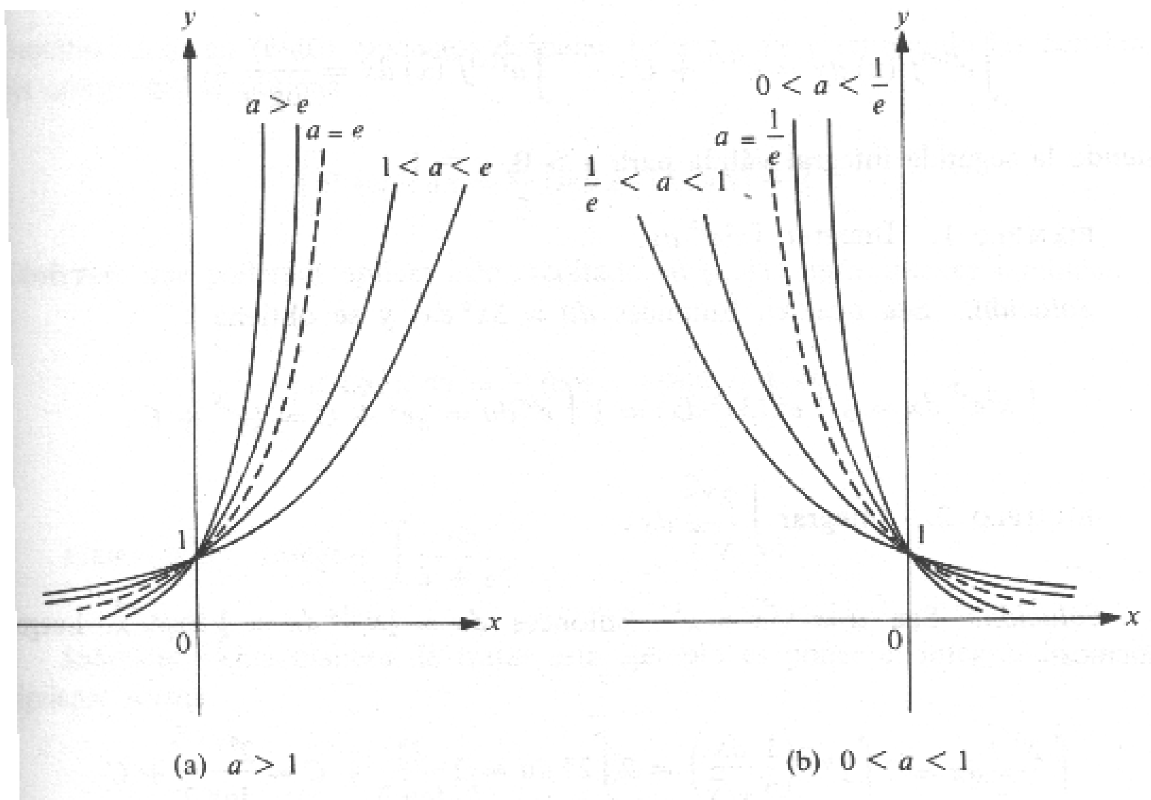
Con lo establecido anteriormente, podemos enunciar las siguientes propiedades de la función exponencial:

1. Para todo x es $a^x>0$. En particular, la función exponencial no se anula nunca.
2. $f(0) = a^0 =1$. [Todas las gráficas pasan por el punto (0, 1)]
3. $f(1) = a^1 = a$.
4. Para $a>1$ (es decir, $b>0$) es monótona creciente desde 0 hasta ∞; para $a<1$(es decir, $b<0$) es monótona decreciente desde ∞ hasta 0, tanto más rápidamente cuanto mayor sea $|b|$.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (a>1) \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad (0<a<1)$$

5. La curva se aproxima asintóticamente al eje x(para b>0 a la izquierda, para b<0 a la derecha), tanto más rápidamente cuanto mayor sea |b|.

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a>1) \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad (0<a<1)$$



Representación gráfica de la función exponencial

Ejemplos de funciones exponenciales

1. La función $y = 2^x$ es una función exponencial de base 2. Algunos de los valores que toma esta función, f: **R** $\longrightarrow$ **R**, son:

$$f(-4) = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \qquad f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

2. La función $y = 1/2^x$ es una función exponencial de base 1/2. Algunos de los valores que toma esta función son:

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 2^4 = 16 \qquad f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2^2}$$

Exponenciales expresadas como potencias de *e*

La ecuación funcional $E(a+b) = E(a)E(b)$ tiene muchas consecuencias interesantes. Por ejemplo podemos utilizarla para demostrar que

(1) $$E(r) = e^r$$

Para todo número racional r.

Tomamos primero $b = -a$ en la ecuación funcional obteniendo

(2) $$E(a)E(-a)=E(0)=1,$$

y por lo tanto $E(-a)=1/E(a)$ para todo a real. Tomando b= a, b= 2ª, . . ., b= na en la ecuación funcional obtenemos, sucesivamente, $E(2\ a)= E(a)^2$, $E(3\ a)= E(a)^3$, y, en general,

(3) $$E(na)= E(a)^n$$

para todo n entero positivo. En particular, cuando a=1, obtenemos

(4) $$E(n)= e^n,$$

mientras que para $a= 1/n$, se obtiene $E(1)= E(1/n)^n$. Puesto que $E(1/n)>0$, ello implica

(5) $$E(1/n)= e^{1/n}.$$

Por consiguiente, si ponemos a= 1/m en (3) y aplicamos (5), encontramos

(6) $$E(n/m)= E(1/m)^n= e^{n/m}$$

para m y n enteros positivos cualesquiera. Dicho de otro modo, hemos demostrado (1) para cada número racional positivo. Como $E(-r)= 1/E(r)= e^{-r}$, también es válida para todo r racional negativo.

Definición de e^x para x real cualquiera

En el apartado anterior se ha probado que $e^x = E(x)$ cuando x es un racional cualquiera. Ahora se definirá e^x para x irracional por

(7) $$e^x = E(x) \quad \text{para cada x real.}$$

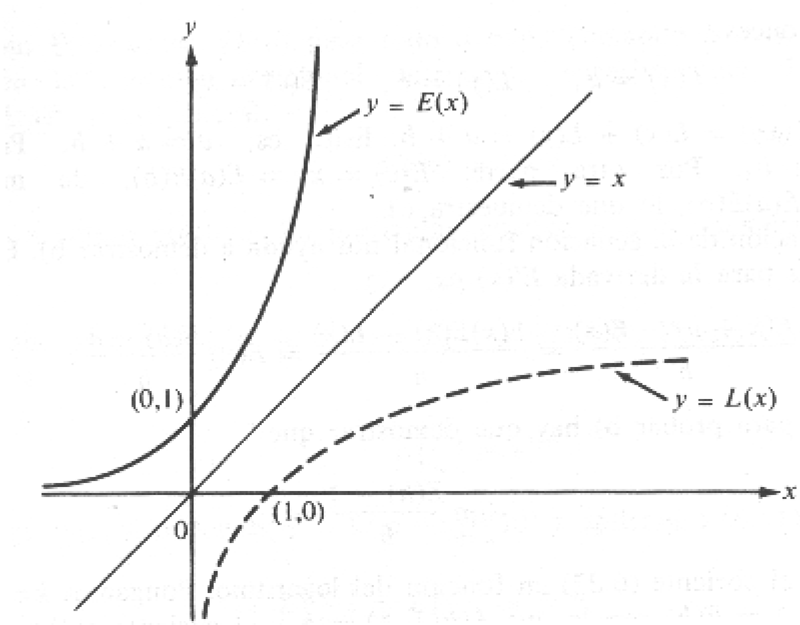
La máxima justificación que se puede dar de esta definición es que con ella la ley de los exponentes

(8) $$e^a e^b = e^{a+b}$$

es válida para todos los números reales a y b. Cuando se toma la definición (7), la demostración de (8) es trivial puesto que (8) no es más que la misma afirmación de la ecuación funcional.

Se ha definido la función exponencial de manera que las dos ecuaciones

$y = e^x$ y $x = \ln y$ signifiquen exactamente lo mismo.



La gráfica de la función exponencial $y = e^x$ la obtenemos de la del logaritmo y=L (x) por una simetría respecto a la recta y= x.

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece como exponente son ecuaciones exponenciales.

No existe fórmula general alguna que nos muestre cómo resolver todas las ecuaciones exponenciales. Sólo a través de la práctica podremos determinar, en cada caso, qué camino tomar.

Para resolver estas ecuaciones hay que tener presente algunos resultados y propiedades que ya se han descrito anteriormente.

2.3.6.- Función logarítmica

Se llama así a la función inversa a la exponencial, que existe en base a lo demostrado anteriormente:

$x = \varphi(y) = \log_a y$, definida para $0<y<+\infty$, si $a>0$ y $a\neq1$.

Escribamos ahora la función de otra forma:

$$y = \varphi(x) = \log_a x,$$

donde llamamos de nuevo x a la variable independiente e y a la función, y obtenemos de la gráfica de la función exponencial, la gráfica de la función logarítmica por simetría de primer y tercer cuadrantes.

Por las propiedades de los logaritmos vistas previamente enunciamos las siguientes:

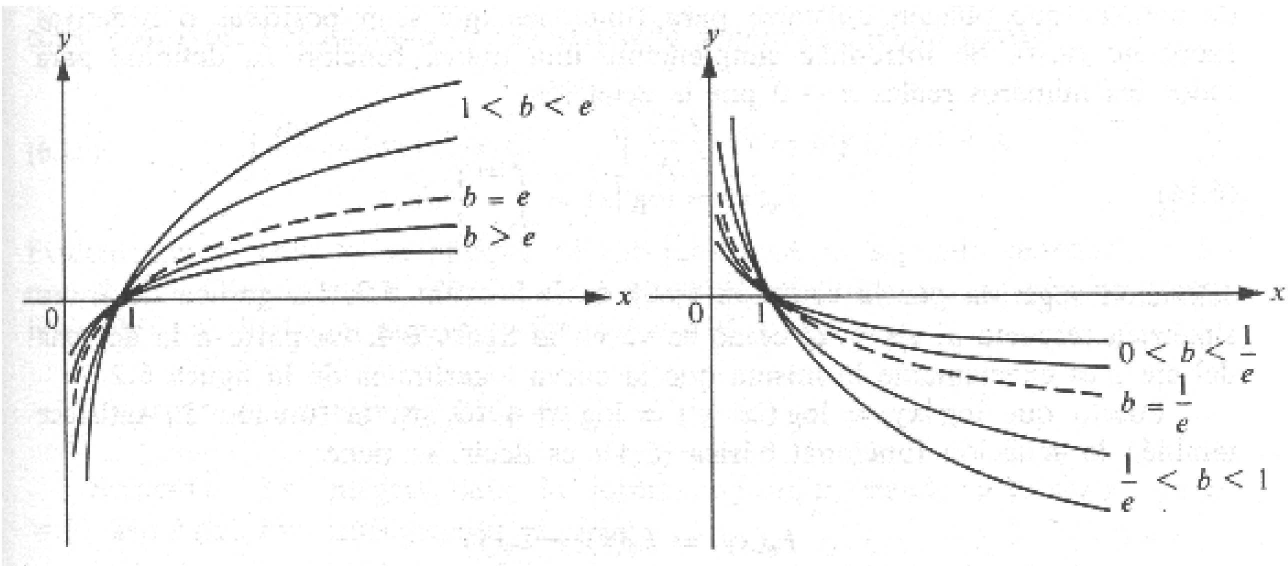
1. La función $\log_a x$ sólo está definida para $x>0$.
2. $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$. [Todas las gráficas pasan por el punto (1, 0)]
3. Para a>1 (es decir, b>0) es monótona creciente desde -∞ hasta +∞; para a<1 (es decir, b<0) es monótona decreciente desde +∞ hasta -∞, tanto más lentamente cuanto mayor sea $|\log_a x|$.

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \quad (a>1) \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \quad (0<a<1)$$

4. La curva se aproxima asintóticamente al eje y(para a>1 hacia abajo, para a< 1 hacia arriba), tanto más rápidamente cuanto mayor sea $|\log_a x|$.

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \quad (a>1) \qquad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \quad (0<a<1)$$

Representación gráfica de la función logarítmica



(a) b > 1 (b) 0 < b < 1

2.3.7. Función definida parte por parte

Función parte entera

La función parte entera f: R \rarr Z / f(x) = [x] = ent(x) está definida por:

1. La función piso si es el menor número de los dos números enteros entre los que está comprendido x. De esta forma, si x es un número entero, su parte entera es el mismo entero. Si x = 5/2 entonces su parte entera será 2.

2. La función techo si es el mayor número de los dos números enteros entre los que está comprendido x.

Siempre se tiene que

$\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x + 1 \rfloor$

y a la izquierda hay una igualdad si y sólo si x es entero. Para todo entero k y para todo número real x se tiene:

$\lfloor k+x \rfloor = k + \lfloor x\rfloor$

El redondeo usual del número x al entero más próximo se puede expresar como la parte entera de x + 0,5.

La derivada de la función parte entera no está definida en los números enteros, y en cualquier otro punto vale 0.

2.3.8 Función inversa

Una función es:

1. Inyectiva, si para x_1 □□x_2 se cumple que $f(x_1)$ □□ $f(x_2)$.
2. Sobreyectiva, si cualquier elemento de R es imagen de un elemento de D.

Cuando la función f(x) cumple estas condiciones, existe la función inversa de la f, cuyo dominio es R y cuyo recorrido el D. La función inversa es además inyectiva y sobreyectiva.

Sea y un elemento de R; por 1. y 2., le asociamos el elemento de D que existe por 2. Esta correspondencia es la función inversa buscada.

Así es que dos funciones y= f(x) e y= □(x) se llaman inversas entre sí, si para cada par de valores (a, b) que verifican la condición b= f(a), se verifica también la condición a= □(b), y viceversa. Una de las dos funciones inversas entre sí se puede llamar directa (es indiferente cual de ellas); entonces la otra se llama inversa con respecto a la primera.

Para obtener una inversa de una función directa y= f(x), se deben cambiar de lugares el argumento y la función; la ecuación x= f(y) determina implícitamente la función inversa a y= f(x). Resolviendo x= f(y) con respecto a y se obtiene en forma explícita la función inversa y= □(x).

Las gráficas de las funciones directas e inversas son simétricas con respecto a las bisectrices de los ángulos del primero y tercer cuadrantes.

2.3.9 Función implícita

Es **función implícita** de la que no se puede despejar la variable independiente de la variable dependiente.

Un ejemplo de una función implícita seria:

$$y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$$

En la cual no es posible expresar una de las variables en términos de la otra.

Diferenciación

Para poder derivar una función implícita se usa la **Regla de la cadena**, en el caso de la variable independiente no hay problema ya que se deriva directamente, para la variable dependiente se considera como una función que a su vez esta en función de la variable independiente:

Dada una función $F(x, y)$, implícita, si queremos calcular la derivada de **y** respecto de **x**: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Si consideramos $y = f(x)$ es una función en términos de la variable independiente **x** y $G(y)$ es una función en términos de la variable dependiente **y**, dado que $y = f(x)$, entonces para obtener la derivada:

$$D_x(G(y)) = D_x(G(f(x))) = G'(x)(f'(x))$$

2.4. Clasificación de funciones por sus propiedades

2.4.1. Función creciente y decreciente

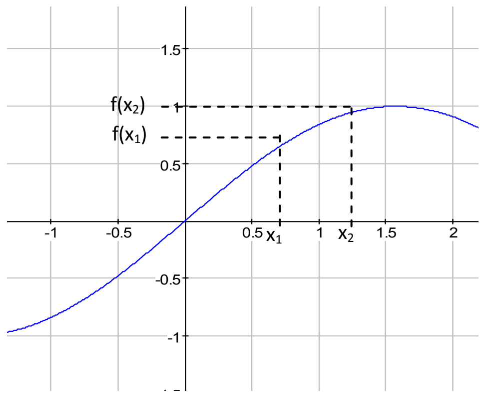
Función creciente y función decreciente

Sea f una función. Entonces:

(1) Se dice que f es una función **creciente** si:

$x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$

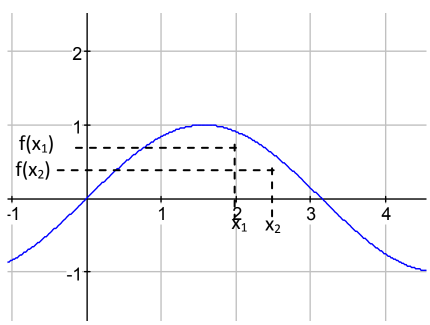
de donde x_1 y x_2 son números cualesquiera del dominio de f.



(2) Se dice que f es una función **decreciente** si:

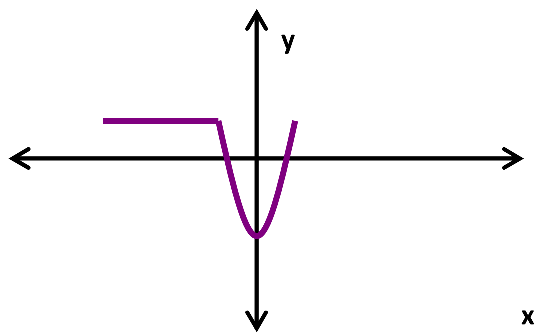
$x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$

de donde x_1 y x_2 son números cualesquiera del dominio de f.



-

ILUSTRACION

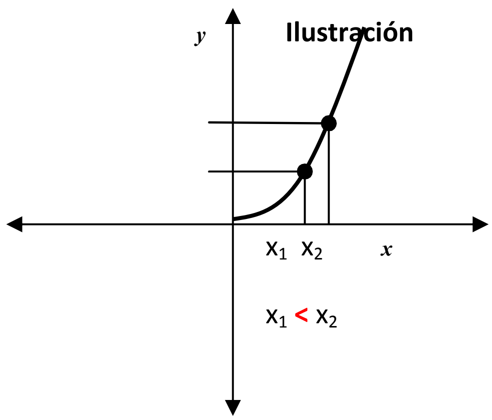


Observa que **parte** de la **gráfica** se **eleva**, parte de la gráfica **baja** y parte de la gráfica es **horizontal.** En estos casos se dice que la gráfica **crece**, **decrece** o es **constante**.

Una **función** f se dice que es **creciente** si al considerar dos puntos de su gráfica, **$(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ con**

x_1	$<$	x_2	**Se tiene que**	$f(x_1)$	$<$	$f(x_2)$.

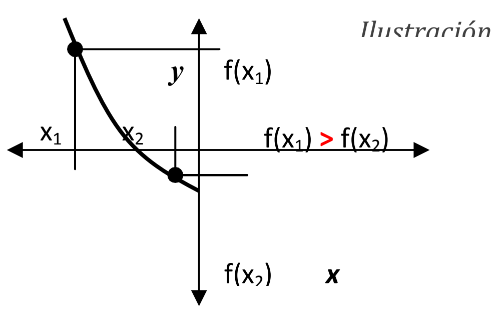
Prevalece la relación <



Una **función** f se dice que es **decreciente** si al considerar dos puntos de su gráfica, **$(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ con**

$x_1 < x_2$ Se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.

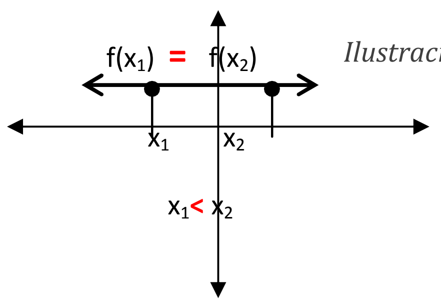
Cambia la relación de < a >



Una **función** f se dice que es **constante** si al considerar dos puntos de su gráfica, **$(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ con**

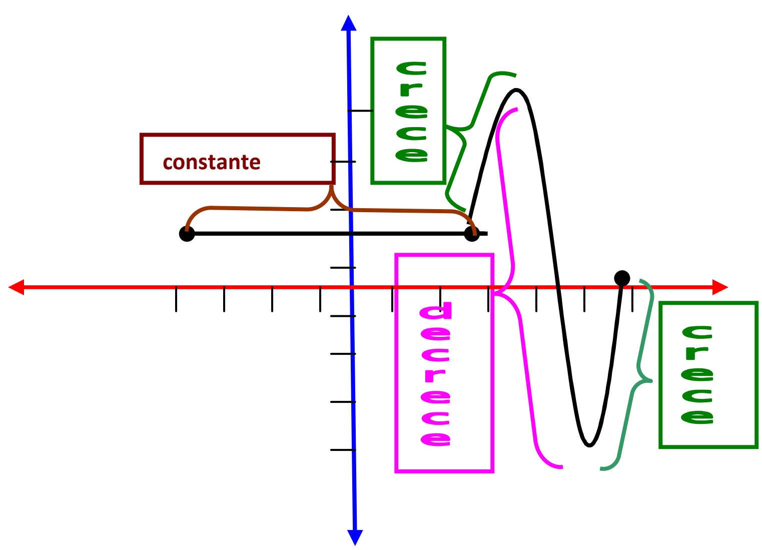
x_1	**<**	**x_2**	**Se tiene que**	**$f(x_1)$**	**=**	**$f(x_2)$.**

Las y no cambian, son fijas



Ilustración

considera la siguiente gráfica:



2.4.2. Función par e impar

Función par e impar

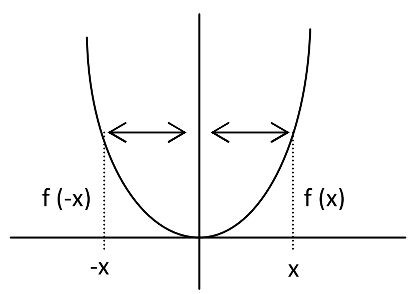
SIMETRÍA.

***FUNCIÓN PAR*. Si una función f satisface que f(-x) = f(x) para todo x en su dominio, entonces f es una función par.**

Ejemplo. Comprobar que $f(x) = x^2$ es par.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Como f(-x) = f(x), entonces la función es par!



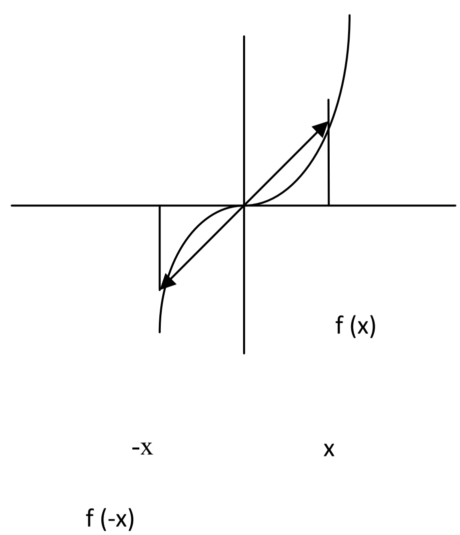
<u>La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.</u>

***FUNCIÓN IMPAR*. Si una función f satisface que f(-x) = - f(x) para todo x en su dominio, entonces f es una función impar.**

Ejemplo. Demostrar que $f(x) = x^3$ es una función impar.

$f(-x) = (-x)^3 = - x^3 = - f(x)$

Como f(-x) = - f(x), entonces la función es impar!



<u>**La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.**</u>

Ejemplos. Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguno de los dos.

$f(x) = x^5 + x$

$f(x) = 1 - x^4$

$f(x) = 2x - x^2$

Funciones pares e impares:

Sea *f* una función tal que si *x* está en el dominio de *f*, *-x* también lo está:

(i) ***f* es una función par si *f* (*-x*) = *f* (*x*), para toda *x* en el *domf*.**

(ii) ***f* es una función impar si *f* (*-x*) = □*f* (*x*), para toda *x* en el *domf*.**

- **La gráfica de una función *par* es simétrica con respecto al eje*y***
- **La gráfica de una función *impar* es simétrica con respecto al origen de coordenadas.**

2.4.3. Función simétrica

Funciones simétricas

Funciones pares

Una función f(x) es par cuando cumple f(x) = f(-x).

Es decir, las imágenes de valores opuestos coinciden.

f(2) = f(-2), f(3) = f(-3), f(1/3) = f(-1/3),..

Por coincidir las imágenes de valores opuestos, la gráfica de una función par es simétrica respecto del eje Y.

Funciones impares

Una función f(x) es impar si cumple f(-x) = - f(x).

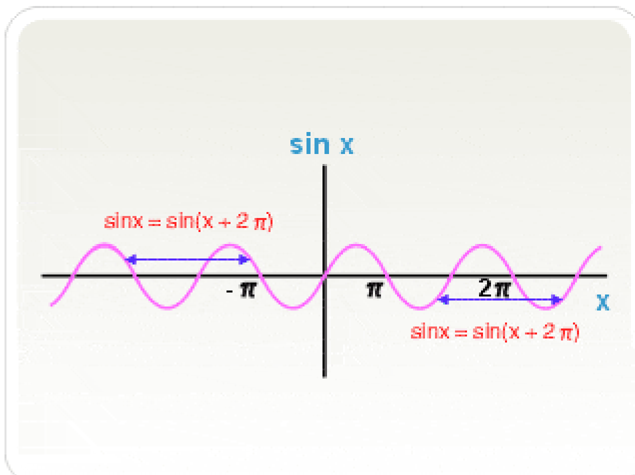
A valores opuestos de x corresponden imágenes opuestas. (La imagen de 2 es la opuesta de la imagen de -2; la imagen de -1 es la opuesta de la imagen de 1...).

Por corresponder a valores opuestos de x, imágenes opuestas, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2.4.4. Función periódica

Función que repite el mismo valor a intervalos regulares de la variable.

Una función f(x) es periódica si existe un número p tal que pueda hacer f(x+p) = f(x) para todas las x. Al menor número p se le llama período. Por ejemplo, y = sen (x) es una función periódica con un período de 2π porque 2π es el menor número p que hace que sen (x+p) = sen (x) para todas las x.



2.5. operaciones con funciones y composición de funciones

OPERACIONES CON FUNCIONES

a) Suma (diferencia) de dos funciones f y g, f + g (f - g): función cuyo dominio es la intersección de los dominios de f y g, $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ ($D_{f-g} = D_f \cap D_g$), y las imágenes se calculan sumando (restando) las de f y g, (f + g)(x) = f(x) + g(x) ((f - g)(x) = f(x) - g(x)).

a-1) Ejemplo: si f(x) = y g(x) = , D_f = [-1, +∞] y D_g = R - {1}.

D_{f+g} = [-1, 1) ∪ (1, +∞) y (f + g)(x) = +.

D_{f-g} = [-1, 1) ∪ (1, +∞) y (f + g)(x) = -.

b) Producto de dos funciones f y g, f·g: función cuyo dominio es la intersección de los dominios de f y g, $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$, y las imágenes se calculan multiplicando las de f y g, (f·g)(x) = f(x)·g(x).

b-1) Ejemplo: si f(x) = y g(x) = , D_f = [-1, +∞) y D_g = R - {1}.

$D_{f\cdot g}$ = [-1, 1) ∪ (1, +∞) y (f·g)(x) = ·.

c) Cociente de dos funciones f y g, f/g: función cuyo dominio es la intersección de los dominios después de quitar los valores para los que se anula g, $D_{f/g} = D_f \cap D_g$ - , y las imágenes se calculan dividiendo las de f y g, (f/g)(x) = .

c-1) Ejemplo: si f(x) = y g(x) = , D_f = [-1, +∞), D_g = R - {1} y g(x) = 0 ⇔ x = 0.

$D_{f/g}$ = [-1, 0) ∪ (0, 1) ∪ (1, +∞) y (f/g)(x) = .

d) Potentación de dos funciones f y g, f^g: función cuyo dominio es la intersección de los de f y g después de quitar los valores que anulan la base y el exponente al mismo tiempo,

$D_{fg} = D_f \cap D_g$ - {}.

d-1) Ejemplo: si f(x) = x^3 - 1 y g(x) = , D_f = R, D_g = R - {0}, f(1) = g(1) = 0,

D_{f^g} = R - {0, 1} y (f^g)(x) = .

e) Composición de funciones f y g, f compuesta con g, g∘f: función cuyo dominio es el conjunto de elementos del dominio de f cuyas imágenes pertenecen al dominio de g,

$D_{f^\circ g}$ = {x ∈ D_f/f(x) ∈ D_g} = $D_f \cap f^{-1}(D_g)$, y las imágenes se calculan aplicando la función g a la imagen de f, (f∘g)(x) = g(f(x)).

La composición de dos funciones inversas es igual a la función identidad $(f\circ f^{-1})(x) = (f^{-1}\circ f)(x) = x$.

e-1) Ejemplo: si f(x) = y g(x) = ,

(g∘f)(x) = g(f(x)) = y x ∈ $D_{g^\circ f}$ ⇔ ≥ 0 y x ≠ 1.

 > 0 ⇔ (2x - 1)(x - 1) > 0 (la gráfica de y = (2x - 1)(x - 1) es una parábola cóncava que corta al eje OX en x = 1/2 y x = 1) ⇔ x ∈ (–∞, 1/2) ∪ (1, +∞).

 ≥ 0 ⇔ x ∈ (–∞, 1/2] ∪ (1, +∞).

2.6. Translación de funciones

I) REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POR TRASLACIÓN

En primer lugar trataremos las funciones trasladadas de otras, que lo pueden ser en la dirección del eje OY, traslación vertical ; en la dirección del eje OX, traslación horizontal,o traslación oblicua en la dirección de cualquier vector del plano.

Tomemos como ejemplo de trabajo la parábola y=x y observaremos en las distintas escenas como podemos representar parábolas trasladadas de ésta.

TRASLACIÓN VERTICAL

En la ESCENA 1, observa que se ha representado la parábola y=x en color rojo y el punto P(x,y) que pertenece a la misma, va moviéndose sobre ella al variar su coordenada x o su coordenada y. En esta escena encontrarás las coordenadas del punto P en la esquina superior izquierda, en color amarillo.

Observa que se ha diseñado un parámetro de nombre k, que según va variando, la parábola se traslada verticalmente en la dirección del vector v=(0,k).

De esta manera se obtiene la nueva parábola y = x + k, trasladada vertical de y = x y cuyo vertice V se encuentra en el punto V(0,k).

Observa que si el valor de k es negativo, la parábola se desplaza verticalmente hacia abajo y si el valor de k es positivo la parábola se desplaza verticalmente hacia arriba.

ESCENA 1

PROPUESTA DE TRABAJO:

1.- Representa las parábolas:

y = x

+ 5

y = x

- 2

2.- En el ejercicio anterior señala si los desplazamientos de las parábolas son hacia arriba o hacia abajo y relaciónalo con los valores de k.

3.- Representa las parábolas trasladadas de y = x

según la dirección de los vectores siguientes:

u = (0,−4)

v = (0, 3)

TRASLACIÓN HORIZONTAL

En la ESCENA 2 está representada la parábola $y = x$

 en color rojo y se ha diseñado un parámetro p, que según va variando, la parábola se va trasladando horizontalmente en la dirección del vector v(-p,0).

De esta forma se obtiene la parábola $y = (x + p)$, trasladada horizontal de $y = x$

 y cuyo vertice V se encuentra en el punto V(-p,0)

Observa que si el valor de p es negativo, la parábola se desplaza horizontalmente hacia la derecha y si el valor de p es positivo la parábola se desplaza horizontalmente hacia la izquierda.

ESCENA 2

PROPUESTA DE TRABAJO

4. Represental las parábolas:

$y = (x - 3)$

$y = (x + 1)$

5. En el ejercicio anterior señala si los desplazamientos de las parábolas son hacia la derecha o hacia la izquierda y relaciónalo con los valores de p.

6. Representa las funciones trasladadas de $y = x$ según la dirección de los siguientes vectores:

$u = (-3,0)$

$v = (5,0)$

TRASLACIÓN OBLICUA

En la ESCENA 3 está representada la parábola $y = x$

 en color rojo y se han diseñado dos parámetrosm p y k, que según van variando, la parábola se va trasladando de manera oblicua en la dirección del vector v(-p,k).

De esta forma se obtiene la parábola $y = (x + p)$

 + k, trasladada de manera oblicua de $y = x$

 y cuyo vértice V se encuentra en el punto V(-p,k)

Bibliografia

- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.

- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.

- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.

- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.

- Análisis matemático; Tom M. Apostol.

- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.

- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.

- Apuntes de análisis matemático II(del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.

- Apuntes de análisis matemático(de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.

- Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich.