3.- Límites y continuidad

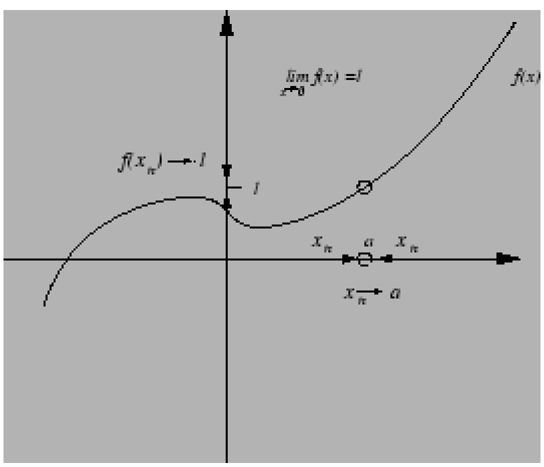
El límite de una función está íntimamente unido a su representación gráfica y a la interpretación de la misma debido a que lo que nos indica es el comportamiento o tendencia de la gráfica. Por esta razón, el concepto de límite es básico en el Análisis Matemático.

Las primeras definiciones de límite aparecen en la obra de Jonh Wallis (1616-1703) y en ella se utiliza por primera vez el símbolo infinito. Con posterioridad Jean Le Rond D'Alembert perfeccionó la definición de límite. Fue Ausgustin Cauchy (1789-1857) quien dio la definición de límite que utilizamos hoy en día.

3.1 definición de limite

Definición 10.1 *(Heine)*
Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ *tiene límite* l *cuando* x *tiende a* a *(punto de acumulación de* A*), y se denota* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, *si las imágenes de cualquier sucesión* $\{x_n\}$ *que converja a* a *con* $x_n \neq a$, *convergen a* l. *O sea,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\{x_n\},\ x_n \neq a \ y \ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$



Definición de limite según Heine

Definición 10.2 *(Weiersstras)*
Se dice que una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$*tiene límite* l *cuando* x *tiende a* a *(punto de acumulación de* A*) si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$*tal que si* $0 < |x - a| < \delta$, *entonces* $|f(x) - l| < \epsilon$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$$

Es decir que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si y sólo si cualquiera sea el entorno $U(l)$ de l que escojamos, existe un entorno $U_a(a)$ de a, que no contiene a a tal que $f(U_a(a)) \subset U(l)$ (ver la figura 23).

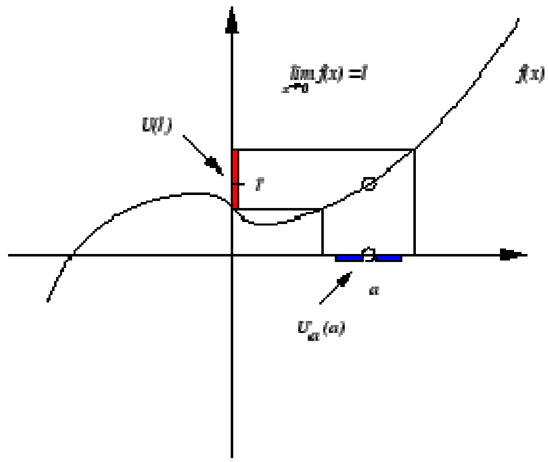


Figura 23: Definición de límite según Weierstrass

Teorema 10.1 *Las definiciones de Heine 10.1 y Weierstrass 10.2 son equivalentes.*

Definición 10.3 *Diremos que una función es continua en $x = a \in \mathrm{Dom}(f)$ (punto de acumulación del dominio de f) si f está definida en el punto $x = a$ y*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definición 10.4 *Si una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ no es continua en un punto $x = a$ se dice que es discontinua.*

Existen cuatro tipos fundamentales de discontinuidad:

Discontinuidad evitable

Esta discontinuidad tiene lugar si existe el límite $\lim_{x \to a} f(x) = l$ pero la función en $x = a$, o no está definida, o $f(a)$ no coincide con el límite l. Es evitable pues en $x = a$ podemos redefinir la función f de la tal forma que $f(a) = l$.

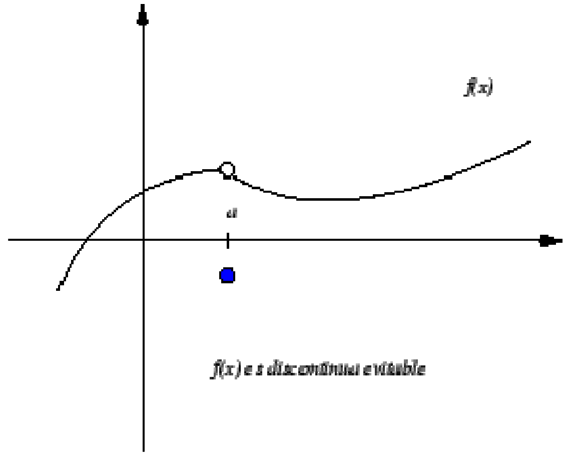


Figura 24: Función con discontinuidad evitable en $x = a$.

Discontinuidad no evitable (o escencial) de salto finito

Esta discontinuidad tiene lugar si existen los límites laterales $\lim_{x \to a+} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a-} f(x) = l_2$ existen pero son diferentes. Por tanto, no existe el límite de f en $x = a$. Además en este caso es imposible redefinir la función f de la tal forma que $l_1 = l_2$.

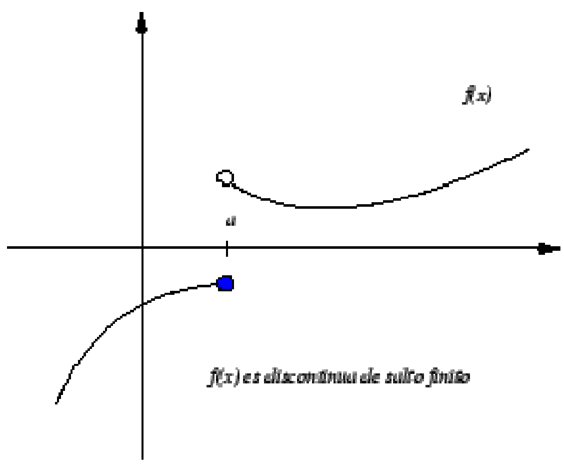


Figura 25: Función con discontinuidad de salto finito en $x = a$.

Discontinuidad no evitable (o escencial) de salto infinito

Esta discontinuidad tiene lugar si alguno de los límites laterales es igual a $\pm\infty$, o sea, si $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$. Por tanto, no existe el límite finito de f en $x = a$. Además en este caso también es imposible redefinir la función f.

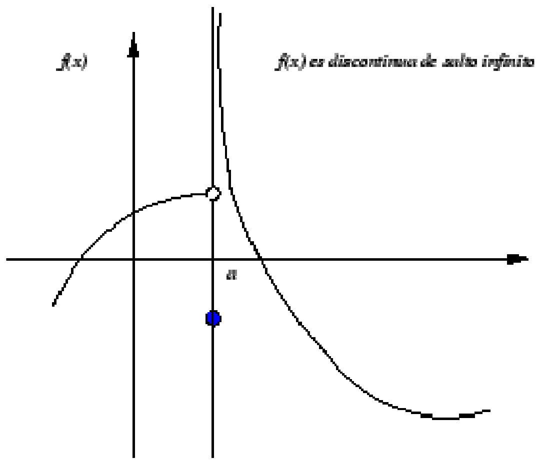


Figura 26: Función con discontinuidad de salto infinito en $x = a$.

Discontinuidad no evitable (o escencial)

Este caso corresponde cuando la función esta bien definida en todo el entorno de a pero no existen los límites laterales (no son siquiera $\pm\infty$).

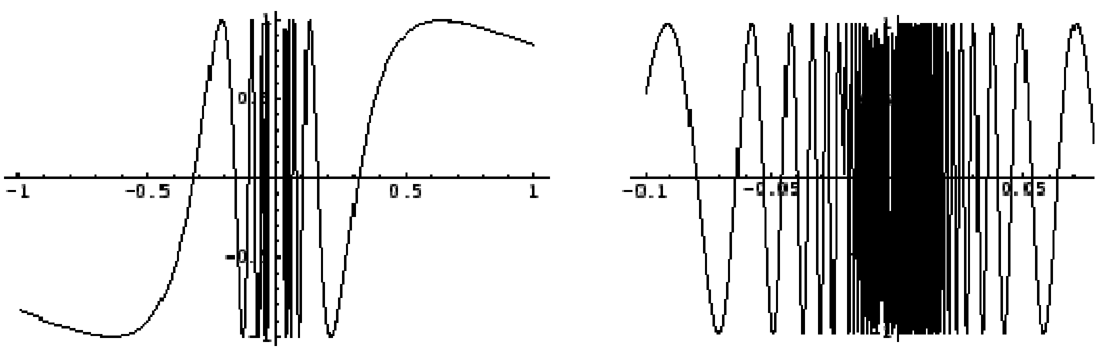


Figura: La función $\sin\frac{1}{x}$ en $[-1,1]$ (izquierda) y en $[-\frac{1}{10},\frac{1}{10}]$ (derecha).

Muy distinto es el caso de la función $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

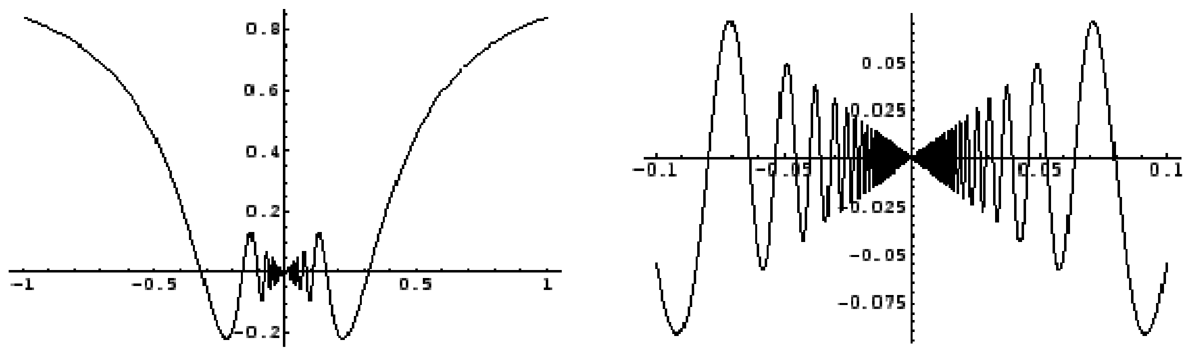


Figura: La función $x \sin \frac{1}{x}$ en $[-1,1]$ (izquierda) y en $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ (derecha).

3.2 Propiedades de los limites

Propiedades de límites

Sean b, c números reales y n un número entero positivo.

1) $$\lim_{x \to c} b = b$$

Ej. $\lim_{x \to 5} 4 = 4$

2) $$\lim_{x \to c} x = c$$

Ej $\lim_{x \to 5} x = 5$

3) $$\lim_{x \to c} x^n = c^n$$

Ej. $\lim_{x \to 5} x^n = 5^n$

4) Si $\lim_{x \to c} [f(x)] = L$ y $\lim_{x \to c}[g(x)] = K$ entonces

a) $\lim_{x \to c}[bf(x))] = bL$

Ej. $\lim_{x \to c}[3f(x)] = 3L$

b) $\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

Ej. $\lim_{x \to 2}[(2x^2 + 5) + (3x^3 - 2x)] = \lim_{x \to 2}(2x^2 + 5) + \lim_{x \to 2}(3x^3 - 2x)$

c) $\lim_{x \to c}[f(x) \bullet g(x)] = L \bullet K$

Ej. $\lim_{x \to 2}[(2x^2 + 5) \bullet (3x^3 - 2x)] = \lim_{x \to 2}(2x^2 + 5) \bullet \lim_{x \to 2}(3x^3 - 2x)$

d) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$ (K $\neq$ 0)

Ej. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x + 5}{x - 3} = \dfrac{\lim_{x \to 2}(2x + 5)}{\lim_{x \to 2}(x - 3)}$

e) $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = L^n$

Ej. $\lim_{x \to 4}[2x + 5]^3 = [\lim_{x \to 4}(2x + 5)]^3$

5) Función Polinomial

Si p es una función polinomial, c un número real,

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

6) Función racional

Si r(x) = $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, q(c) $\neq$ 0,

$$\lim_{x \to c} r(x) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

7) Función radical

Sea n un entero positivo.

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

siempre que n sea impar o para c>0 si n es par

8) Función compuesta

Sean f y g dos funciones tales que

$$\lim_{x \to c} g(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to L} f(x) = f(L)$$

entonces:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$$

9)Funciones trigonométricas

Sea c un número real en el dominio de la función trigonométrica dada.

$$\lim_{x \to c} sen(x) = sen(c)$$

$$\lim_{x \to c} \cos(x) = \cos(c)$$

$$\lim_{x \to c} \tan(x) = \tan(c)$$

$$\lim_{x \to c} \csc(x) = \csc(c)$$

$$\lim_{x \to c} \sec(x) = \sec(c)$$

$$\lim_{x \to c} \cot(x) = \cot(c)$$

10) Sea c un número real y sea f(x)=g(x) para toda x $\neq$ c en un intervalo abierto que contiene a c. Si existe el $\lim_{x \to c} g(x)$, entonces también existe el de f(x) y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

11) Funciones trigonométricas especiales

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

b) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

12) Teorema del encaje

Si h(x) $\leq$ f(x) $\leq$ g(x) para toda x en un intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en c.

Si $\lim_{x \to c} h(x) = L$ y $\lim_{x \to c} g(x) = L$,

entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$

3.3. Limites laterales

Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la izquierda es L, si y sólo si para todo ε > 0 existe δ > 0 tal que si x (a+δ, a) , entonces |f (x) - L| <ε .

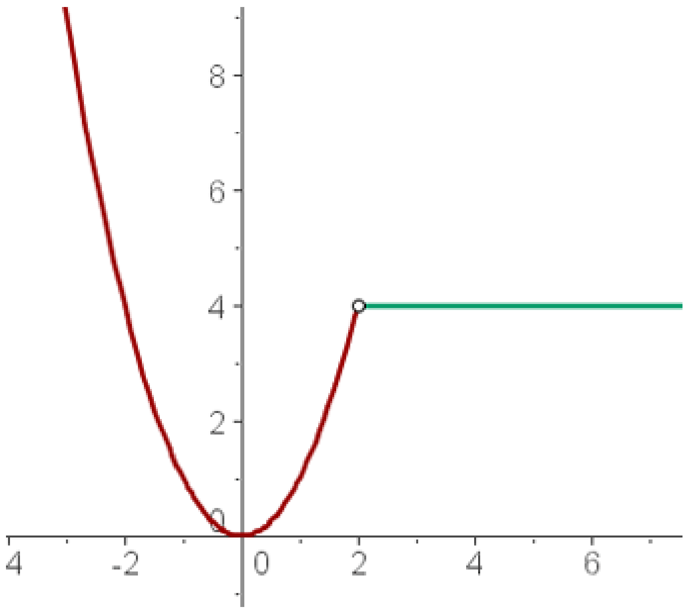
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / x \in (a+\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Diremos que el límite de una función f(x) cuando x tiende hacia a por la derecha es L , si y sólo si para todo ε > 0 existe δ > 0 tal que si x (a, a + δ), , entonces |f (x) - L| <ε .

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 / x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

El límite de una función en un punto si existe, es único.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$

En este caso vemos que el límite tanto por la izquierda como por la derecha cuando x tiende a 2 es 4.

El límite de la función es 4 aunque la función no tenga imagen en x = 2.

Para calcular el límite de una función en un punto, no nos interesa lo que sucede en dicho punto sino a su alrededor.

Ejemplo

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} & x < 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ 1 & \text{si} & x > 0 \end{cases}$$

Hallar $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite en x = 0.

3.4 Asíntotas

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.

Una definición más formal es:

<u>DEFINICIÓN</u>

Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función y=f(x) de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.

Las asíntotas se clasifican en:

$$\text{Asíntotas}\begin{cases}\text{Verticales}\\ \text{Horizontales}\\ \text{Oblicuas}\end{cases}$$

a. Asíntotas verticales (paralelas al eje OY)

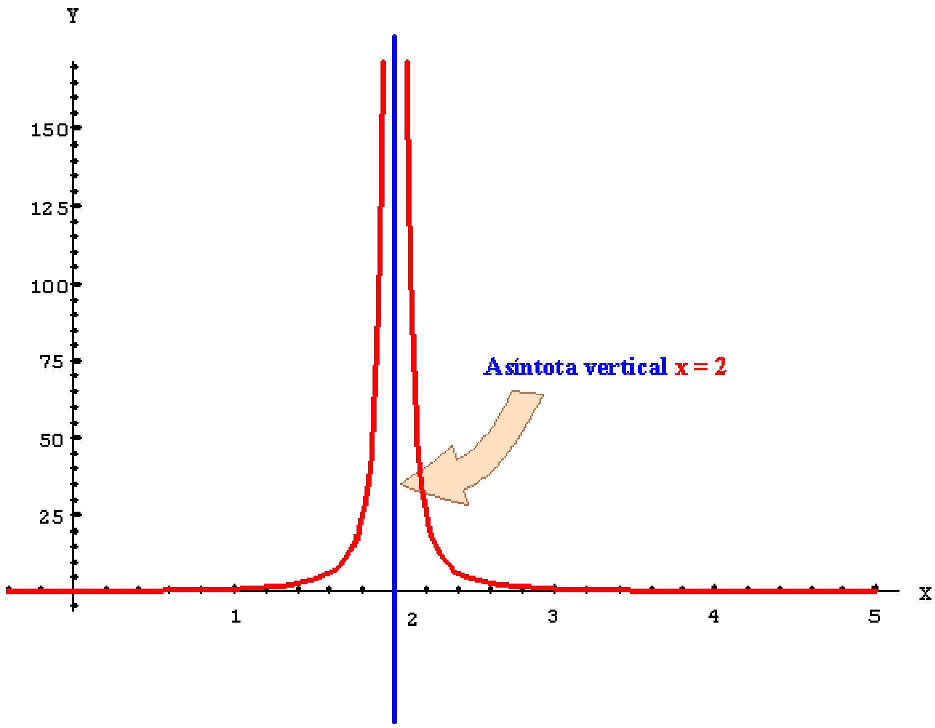
   Si existe un número "a" tal, que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

   La recta "x = a" es la asíntota vertical.

   Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad , \quad \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \quad , \quad x = 2$$ es la asíntota vertical.



b. Asíntotas horizontales (paralelas al eje OX)

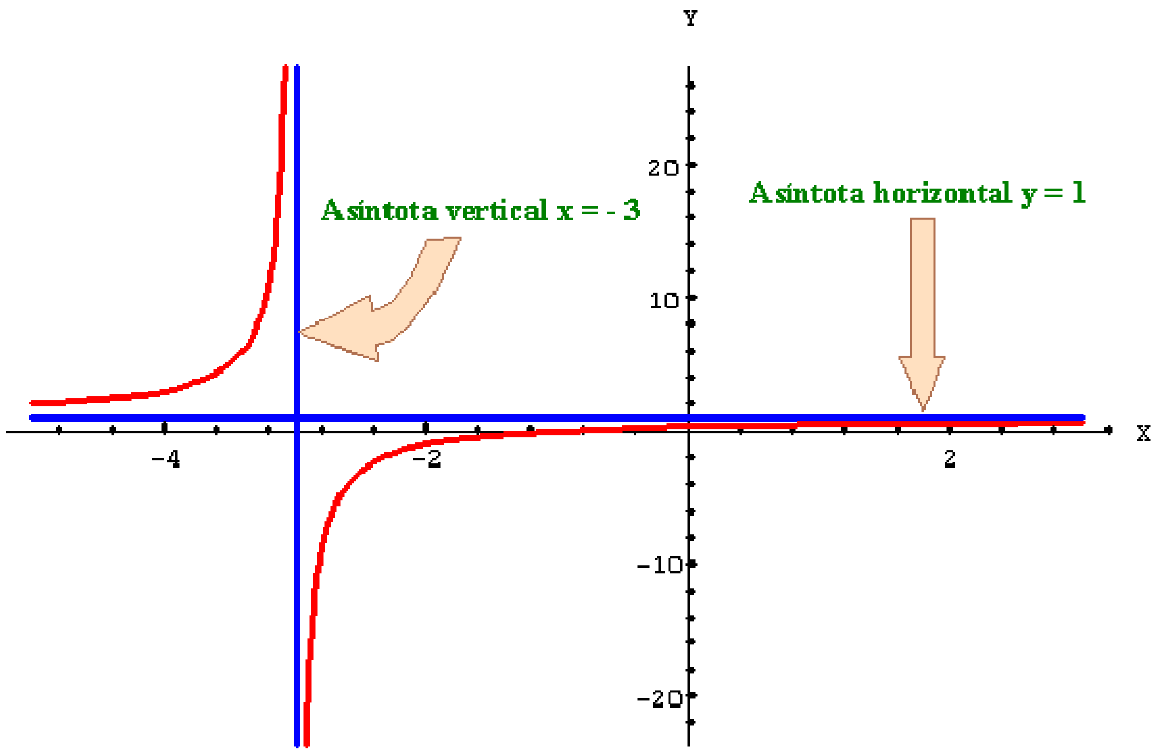
Si existe el límite: :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

La recta "y = b" es la asíntota horizontal.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3} \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x+3} = 1 \quad , \quad y = 1$$ es la asíntota horizontal.



c. Asíntotas oblicuas (inclinadas)

Si existen los límites: :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = m \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - m\cdot x\right] = n$$

La recta "y = mx+n" es la asíntota oblicua.

.

Nota-1

Las asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes, es decir la existencia de unas, implica la no existencia de las otras.

Nota-2

En el cálculo de los límites se entiende la posibilidad de calcular los límites laterales (derecho, izquierdo), pudiendo dar lugar a la existencia de asíntotas por la derecha y por la izquierda diferentes o solo una de las dos.

Posición relativa de la función con respecto a la asíntota

Para estudiar la posición relativa de la función con respecto a la asíntota, primero calcularemos los puntos de corte de ambas resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{y = f(x)} \\ \mathbf{y = Asíntota} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{P(a, b)}$$

Estos puntos determinan los cambios de posición de la función respecto de la asíntota. Estos cambios quedarán perfectamente establecidos estudiando el SIGNO[f(x)-Asíntota].

Ejemplo:

La función $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ tiene por asíntota oblicua la recta $y = x + 2$

Calculamos los puntos de intersección de ambas:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2} = x + 2 \Rightarrow x^3 = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$$

El punto de corte de las dos funciones es P(2/3, 8/3).

Ahora estudiamos el signo de FUNCIÓN-ASÍNTOTA.

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) > 0 \Rightarrow \frac{3x-2}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

Esto nos indica que en el intervalo $(2/3, +\infty)$ la función está por encima de la asíntota y en el intervalo $(-\infty, 2/3)$ la función está por debajo de la asíntota.

3.5. Limites especiales

Dos límites especiales

En esta sección se calcula el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y se utiliza para calcular otros límites en los que aparecen funciones trigonométricas.

Un límite especial:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Recuerde que el dominio de las funciones senx y cosx es todo R, el dominio de tanx y secx es

$$R - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi / n \in \mathbf{Z} \right\}$$

el dominio de cot x y csc x es

R - { np / n $\in$ Z}

A partir de las gráficas de las funciones trigonométricas podemos deducir que ellas son continuas en todo su dominio, de manera que si c pertenece al dominio de la función correspondiente, entonces se tiene:

$$\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c \qquad \lim_{x \to c} \cos x = \cos c$$

$$\lim_{x \to c} \tan x = \tan c \qquad \lim_{x \to c} \cot x = \cot c$$

$$\lim_{x \to c} \sec x = \sec c \qquad \lim_{x \to c} \csc x = \csc c$$

Por otra parte, si c no pertenece al dominio de la función entonces el límite no existe.

Ejemplo 1.Cálculo de límites con funciones trigonométricas

Como una aplicación de lo anterior tenemos, por ejemplo, que

$\lim_{x \to \pi}$ sen x = sen p = 0

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}}$ cos x = cos

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}}$ tanx = tan $\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cot x = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}}$ sec x = sec $\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} \csc x = \csc \frac{3}{2}\pi = -1$

Por otra parte, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tanx$ no existe (vea la gráfica de y = tan x) pero sí podemos decir que

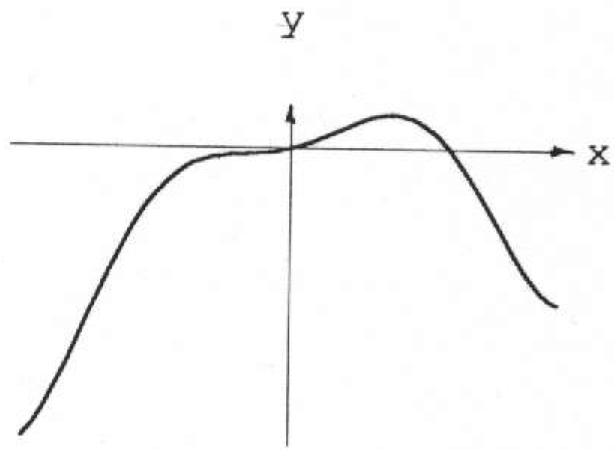
$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tanx = -\infty$ y $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tanx = \infty$

También tenemos que:

$\lim_{x \to \pi^+} \csc x = -\infty$ y $\lim_{x \to \pi^-} \csc x = \infty$

Ejemplo 2.Cálculo de un límite de funciones trigonométricas con algebraicas

Calcular $\lim_{x \to \pi}$ (x + x^2 cos x).



$$f(x) = x + x^2 \cos x$$

Figura 6.18.

Solución: Utilizando las propiedades de los límites estudiadas en capítulos anteriores, tenemos:

$$\lim_{x \to \pi} (x + x^2 \cos x) = \lim_{x \to \pi} x + \lim_{x \to \pi} x^2 \cdot \lim_{x \to \pi} \cos x$$
$$= p + p^2 \text{ ´ } (-1)$$
$$= p - p^2$$

Tenemos, igual que antes: si al evaluar no encontramos problemas entonces obtenemos el límite directamente. Pero, también, aquí podemos encontrar problemas. Piense en el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

Tenemos una situación especialmente difícil puesto que al evaluar obtenemos la forma indeterminada 0/0; con un agravante: no podemos ni factorizar, ni racionalizar, ni operar como lo hacíamos antes. Es evidente que aquí debemos utilizar otros métodos. Dentro de un momento aprenderemos cuál es el valor de ese límite y podremos utilizarlo para calcular otros parecidos. Pero para llegar a ese valor antes veremos un teorema que nos será de mucha utilidad.

Otro límite especial

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

3.6 definición de continuidad

Diremos que una función f es **continua** en un punto $x=a$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Existe $f(a)$ 2. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ 3. $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

Discontinuidades:
Si una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en ese punto, la discontinuidad puede ser:

- **Evitable.** si existen $f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$ es un número real, pero no coinciden. Se evita la discontinuidad haciendo $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$
- **No evitable**, ésta a su vez se divide en discontinuidad de **primera especie**, existen los limites laterales en el punto pero no coinciden y de s**egunda especie**, no existe alguno de los límites laterales.
    - Discontinuidad de primera especie:
        - **Salto finito**, los dos límites laterales son un número real, el salto es la diferencia entre los límites laterales.
        - **Salto infinito**, uno de los límites laterales es infinito.

3.7 propiedades de la continuidad

Si b es un número real y f, g son continuas en x = c, entonces:

1) bf es continua en c (múltiplo escalar)

2) f ± g es continua en x = c (suma o diferencia)

3) fg es continua en x = c (producto)

4) $\frac{f}{g}$ es continua en x = c si $g(c) \neq 0$ (cociente)

Funciones continuas en su dominio:

1) Funciones polinomiales

2) Funciones racionales

3) Funciones radicales

4) Funciones trigonométricas

Teorema-Función compuesta

Si g es continua en c y f es continua en g(c) , entonces (f o g)(x) = f(g(x)) es continua en x = c.

Bibliografia

- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.

- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.

- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.

- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.

- Análisis matemático; Tom M. Apostol.

- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.

- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.

- Apuntes de análisis matemático II(del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.

- Apuntes de análisis matemático(de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.

- Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich.