4. Derivadas

4.1 Definición de derivada

Se abre aquí el estudio de uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial: **la derivada de una función.**

En este tema, además de definir tal concepto, se mostrará su significado y se hallarán las derivadas de las funciones más usuales. Es de capital importancia dominar la derivación para después poder abordar el trazado de curvas, así como para comprender la utilidad del cálculo integral, que se estudiarán a continuación.
La noción de derivada es históricamente anterior al concepto de límite aunque actualmente se estudie aquélla inmediatamente después de éste, por razones que serán fácilmente comprensibles.

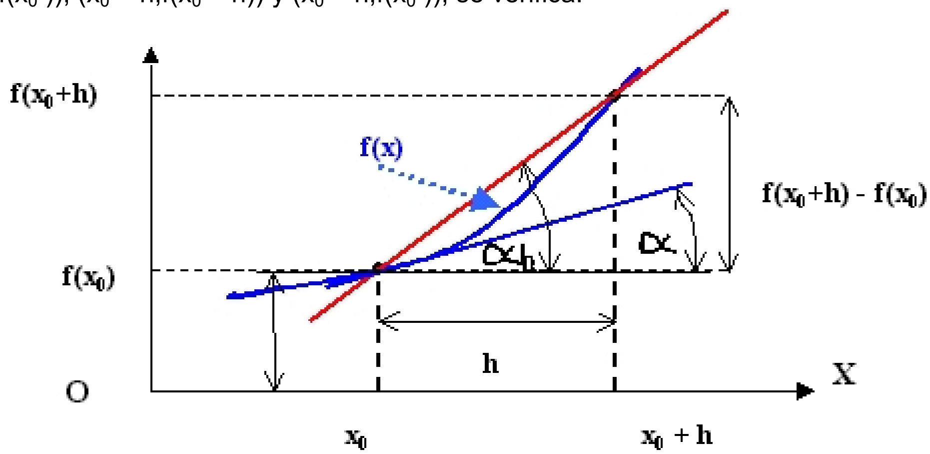
La derivada de una función en un punto x_0 surge del problema de **calcular la tangente a la gráfica** de la función en el punto de abscisa x_0, y fue **Fermat** el primero que aportó la primera idea al tratar de buscar los máximos y mínimos de algunas funciones. En dichos puntos las tangentes han de ser paralelas al eje de abscisas, por lo que el ángulo que forman con éste es de cero grados. En estas condiciones, **Fermat** buscaba aquellos puntos en los que las tangentes fueran horizontales

4.2. Interpretación geométrica y fisca de la Derivada

Sea una función y = f(x) y x_0 un punto del eje X. Si se toma un punto x_0 + h muy próximo a x_0 (h es un número infinitamente pequeño), a medida que se hace tender h a cero, la recta secante (*en rojo de la figura)* que une los puntos
(x_0, $f(x_0)$) y (x_0 + h, $f(x_0 + h)$), **tiende a confundirse con la tangente** *(en azul de la figura)* **a la curva en el punto** (x_0,$f(x_0)$).

Si α_h es el ángulo que forma la secante con el eje de abscisas, y α el ángulo
que determina la tangente con ese mismo eje, en el triángulo rectángulo de vértices

$(x_0,f(x_0))$, $(x_0 + h,f(x_0 + h))$ y $(x_0 + h,f(x_0))$, se verifica:



$$tag\, \alpha_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Al hacer tender h a cero, y puesto que la secante tiende a confundirse con un segmento de la tangente, es decir, **si miras la figura, al hacer que h tienda a cero la línea roja se acerca a la línea azul por lo que:**

tg a_h tiende a tg a, es decir,
a la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(x_0,f(x_0))$.
Esto se expresa matemáticamente así:

NOTA: Es importante que entiendas esto, pues es el núcleo por el que después entenderás otros conceptos, si no es así, dímelo

$$\lim_{h\to 0} tg\, \alpha_h = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = tg\, \alpha$$

Derivada de una función en un punto

Dada una función y = f(x), se llama derivada de la función f en un punto x0 al

límite, si existe y es finito (un número), $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y se simboliza por

f '(x_0) (***efe prima de equis sub-cero)*** o por D(f(x0)):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = D(f(x_0))$$

Cuando este límite existe (*y es finito*) se dice que la función f(x) es derivable en el punto x_0.

Significado de la derivada

Puesto que

$$tg\, \alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

la derivada de la función en un punto x_0 no es otra cosa que la pendiente de la tangente a la curva (gráfica de la función) en $(x_0, f(x_0))$.

Calcular la derivada de la función f(x) = 3x + 5 en el punto de abscisa x = 1.

Resolución:

Se pide el valor de f '(1) (en este caso, $x_0 = 1$).

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \left.\begin{matrix} f(1+h) = 3(1+h)+5 = 3h+8 \\ f(1) = 3\cdot 1+5 = 8 \end{matrix}\right\}$$

- $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{3h+8-8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$

Por tanto, f '(1) = 3.

Calcular la derivada de la función

f(x) = $\sqrt{x}$ en el punto 2.

Resolución:

- $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad \left.\begin{matrix} f(2+h) = \sqrt{2+h} \\ f(2) = \sqrt{2} \end{matrix}\right\}$
- $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$, multiplicando numerador y denominador por

$\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ (conjugado del numerador)

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})\,(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$$

Recordando que suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados:

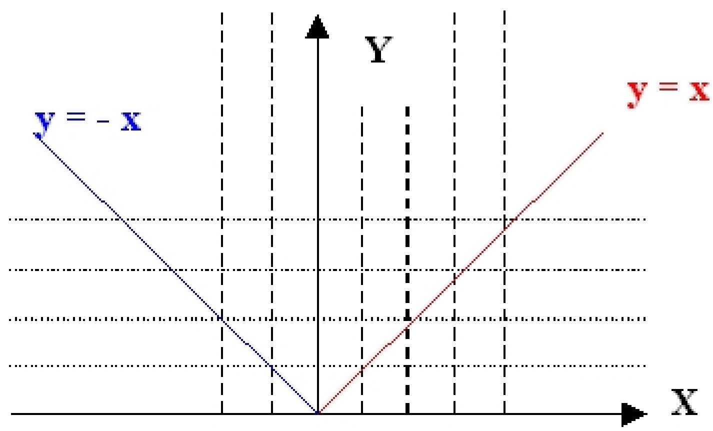
$(\sqrt{2+h}-\sqrt{2})\,(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}) = 2+h-2 = h$

- $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Estudiar la derivabilidad de la función

f (x) = |x| (valor absoluto de x) definida por $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en el punto $x_0 = 0$.

Resolución:



- Si $h > 0$, $\lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{h-0}{h} = 1$
- Si $h < 0$, $\lim_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{-h+0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \frac{-h}{h} = -1$

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 0, la función f (x) = |x| no es derivable en dicho punto.
¿Cuándo hay que considerar límites a derecha e izquierda al calcular la derivada de una función en un punto?

Si al dibujar la curva se observa que en el punto considerado ésta cambia bruscamente de dirección, es necesario considerar límites a derecha e izquierda, puesto que, en este caso, la tangente no se comporta de igual modo y se «quiebra».

Consecuencias de la definición de derivada en un punto

1. Si existe la derivada de una función f(x) en un punto (x_0, f(x_0)), existen las derivadas a derecha e izquierda de x_0 y tienen que ser iguales; de lo contrario no existiría f'(x_0).

Puede ocurrir, no obstante, que existiendo las derivadas a derecha e izquierda éstas sean distintas. En este caso no existe la tangente en (x_0, f(x_0)), sino dos semirrectas, cada una tangente a uno de los arcos en que el citado punto divide a la curva. Los puntos en que esto ocurre se llaman puntos angulosos.

Los puntos x_1 de la primera figura y x_0 de la segunda que hemos estudiado son puntos angulosos: la curva cambia bruscamente de dirección en ellos. La función correspondiente no es derivable en las abscisas de dichos puntos.

No es difícil, consecuentemente, imaginar la gráfica de una función que no sea derivable en muchos e, incluso, infinitos puntos.

Tangente a una curva en un punto

El concepto de derivada facilita la definición de tangente a una curva en un punto como el límite de una secante que pasa por él y por otro punto cualquiera de la curva cuando éste último, recorriendo la curva, tiende a coincidir con el primero.

Propiedad

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Demostración:
Sea una función y = f(x) derivable en un punto x_0. Para probar que la función es continua en él, es preciso demostrar que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0),$$

o lo que es equivalente, que

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$$

Veamos, si la expresión f(x_0 + h) - f(x_0) la multiplicamos y dividimos por h

$f(x_0 + h) - f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$ Tomando límites cuando h tiende a 0,

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h,$$

aqui vemos que el primer término del producto anterior es precisamente la derivada de f(x) en el punto x_0, (recordar que partímos de la tesis que f(x) es derivable) es decir vale f ' (x_0) y el segundo

término vale 0 pues es el límite de h cuando h tiende a cero.-
Así pues tenemos que:

$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, resultado al que se quería llegar.

Esta propiedad evita el trabajo de estudiar la derivabilidad de una función en un punto donde ésta no sea continua.

Por el contrario, puede darse el caso de una función continua en todos los puntos y no ser derivable en alguno, e incluso infinitos puntos. Valga como ejemplo la función |x|, que siendo continua en todos los puntos de la recta real, no es derivable, **como ya se ha comprobado**, en el origen.

4.2.1. derivada de una constante

La **derivada de una constante** es **cero**.

$f(x) = k$ $\qquad f'(x) = 0$

Ejemplo

$f(x) = -2$

$f'(x) = 0$

4.2.2. Derivada del producto de una constante por una función

Para derivar una constante por una función, es decir *cf(x)*, su derivada es la constante por la derivada de la función, o *cf'(x)*, por ejemplo:

$f(x) = 3x^5$

$f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$

4.2.4. Derivada de la suma de funciones

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

4.2.5. Derivada del producto de funciones

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

4.2.6. Derivada del cociente de funciones

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

4.3. derivada de funciones exponenciales

- Exponenciales: $\boxed{y = e^x \Rightarrow y' = e^x}$

$$y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\boxed{y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot La}$$

$$y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot La$$

4.4 . Derivada de funciones trigonométricas

$$\boxed{y = senx \Rightarrow y' = \cos x}$$

$$\boxed{y = \cos x \Rightarrow y' = -senx}$$

$$\boxed{y = tgx \Rightarrow y' = \sec^2 x}$$

$$y = sen\ f(x) \Rightarrow y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$y = \cos f(x) \Rightarrow y' = -sen\ f(x) \cdot f'(x)$$

$$y = tg\ f(x) \Rightarrow y' = \sec^2 f(x) \cdot f'(x)$$

4.5 Regla de la cadena

Esta propiedad asegura que si *y = f(x)* es una función derivable en un cierto intervalo I,

$$f: I \longrightarrow \mathbf{R},$$

y *z = g(y)* es otra función derivable y definida en otro intervalo que contiene a todos los valores (imágenes) de la función *f,*

$$g: f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

entonces la función compuesta

$$g\circ f : I \longrightarrow f(I) \longrightarrow \mathbf{R},$$

definida por ($g \circ f$) (x) = $g[f(x)]$, es derivable en todo punto x de I y se obtiene

$$(g\circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

4.6 . Derivada de la función inversa

- $\boxed{y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2}}$

$$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{-1}{[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

4.7. Derivada de de las funciones trigonométricas

$$\boxed{y = senx \Rightarrow y' = \cos x}$$

$$\boxed{y = \cos x \Rightarrow y' = -senx}$$

$$\boxed{y = tgx \Rightarrow y' = \sec^2 x}$$

$$y = sen\ f(x) \Rightarrow y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$y = \cos f(x) \Rightarrow y' = -sen\ f(x) \cdot f'(x)$$

$$y = tg\ f(x) \Rightarrow y' = \sec^2 f(x) \cdot f'(x)$$

4.8. Derivada de la función inversas trigonométricas

$$\boxed{y = arcsenx \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{y = arctgx \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$y = arcsenf(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \cdot f'(x) = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$y = arctgf(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+[f(x)]^2} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

4.9.- Derivadas de las funciones implícitas

En la ecuación y^3 + 7y = x^3

no podemos despejar a y en términos de x. Sin embargo, aún puede ser el caso de que exista exactamente una y correspondiente a cada x. Por ejemplo, podemos preguntar qué valores de y (si existe alguno) corresponde a x=2. Para responder esta pregunta debemos resolver

```
y^3 + 7y = 8
```

Desde luego, y=1 es una solución, y resulta que y = 1 es la única solución real. Dado x = 2, la ecuación y^3 + 7y = x^3 determina un correspondiente valor de y. Decimos que la eciación define a y como una ecuacion IMPLICITA de x. Al graficar, se ve como la gráfica de una función derivable. El nuevo elemento es que no tenemos una ecuación de la forma y = f(x). Con base a la gráfica, suponemos que y es alguna función desconocida de x. Si denotamos a esta función como y(x), podemos escribir la ecuacion como

```
[y(x)]^3 + 7y(x) = x^3
```

Aunque no tenemos una fórmula para y(x), podemos, a pesar de eso, obtener una relación entre x, y(x) y y'(x), por medio de la derivación, con respecto a x, de ambos lados de la ecuacion. Recordando aplicar la regla de la cadena, obtenemos

```
d/dx (y^3)+ d/dx (7y) = d/dx x^3
```

```
3y^2 dy/dx + 7 dy/dx = 3x^2
```

```
dy/dx (3y^2 + 7) = 3x^2
```

```
dy/dx = (3x^2)/(3y^2 + 7)
```

Observese que nuestra expresion para dy/dx incluye tanto a x como a y, un hecho que con frecuencia es una molestia. Pero si solo deseamos determinar la pendiente en un punto en donde conocemos ambas coordenadas, no existe dificultad. En (2,1),

```
dy/dx = 3(2)^2 / [3(1)^2 + 7]= 12/10 = 6/5
```

La pendiente es 6/5.

El metodo que se acaba de ilustrar para determinar dy/dx sin despejar primero de la ecuacion dada a y de manera explicita en terminos de x se denomina DERIVACION IMPLICITA.

4.10 Derivadas sucesivas

Si la función f ' es derivable, podemos calcular la derivada de esta función y obtenemos una nueva función que llamamos **derivada segunda** de f y representamos por **f ''**.

Si razonamos de forma análoga con **f ''**, podemos obtener la **derivada tercera** de f que llamamos **f '''** y así sucesivamente: **f ^{iv}, f ^{v}, ...**

Ejemplo:

f	f '	f ''	f '''	f ^{iv}
x^3	$3x^2$	6x	6	0
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
ln x	1/x	$-1/x^2$	2/x	$-2/x^2$
sen x	cos x	-sen x	-cos x	sen x

Nota:

La función exponencial e^x también se expresa como **exp(x)**

Criterio del signo se la derivada primera

En lo sucesivo vamos a tratar con funciones continuas y derivables. En un curso superior sobre derivadas se considerarán otras situaciones.

Ya vimos que hay una relación entre la monotonía de la función f(x) (crecimiento ó decrecimiento) y el valor de la derivada primera f ´(x).

f(x) creciente: f ´(x) > 0

f(x) decreciente: f ´(x) < 0

También veíamos que en los puntos donde la función cambia de creciente a decreciente o de decreciente a creciente la derivada se hace cero f ´(x) = 0 ya que el cambio de signo de la derivada se hace con continuidad y necesariamente tiene que pasar por el valor 0.

Tenemos dos esquemas posibles, cuando cambia la monotonía de la función al pasar por el punto x = a donde la función es continua

Crecimiento	**Máximo local**	**Decrecimiento**
f ´(a-h) > 0	f ´(a) = 0	f ´(a+h) < 0

Decrecimiento	**Mínimo local**	**Crecimiento**
f ´(x-h) < 0	f ´(a) = 0	f ´(a+h) >0

Ejemplo 1:

La función

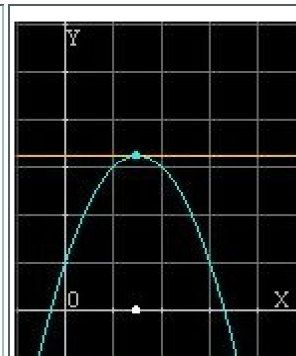
f(x) = $-x^2+3x+1$ presenta un punto máximo

Las derivadas sucesivas

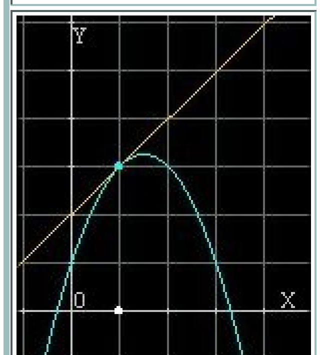
f´(x) = -2x+3

f ´´(x) = -2

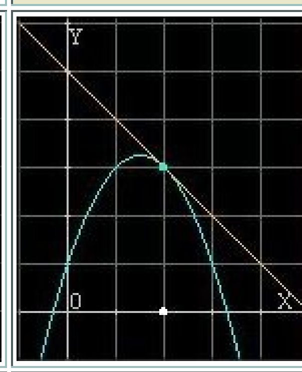
Utilizar el Nippe Descartes para funciones polinómicas para comprobar todas las observaciones que hagamos aquí.



El máximo local se alcanza para x=1.5 y la tangente a la curva es horizontal f '(1.5)=0



Para x < 1.5 la función es creciente y la pendiente positiva, f ´> 0



Para x > 1.5 la función es decreciente y la pendiente negativa, f ´< 0

Sea la función $f(x) = x^3-6x^2+9x+2$, la función derivada es $f\,'(x) = 3x^2-12x+9$

Si igualamos a cero $f\,'(x)$ obtendremos los posibles máximos o mínimos locales.

$3x^2-12x+9 = 0$, resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene $x=1$ y $x=3$ es decir $f\,'(1) = 0$, $f\,'(3) = 0$

Podemos descomponer el dominio de la función en tres regiones (-infinito, 1), (1, 3) y (3, +infinito)

¿ Cómo es la monotonía en cada intervalo ?

Bastará calcular el signo de la derivada en un punto cualquiera de un intervalo cualquiera. Por ejemplo, para el intervalo (-infinito, 1) tomemos $x=0$ donde la derivada vale $f\,'(0) = 9 > 0$, luego en este intervalo la función f(x) es creciente, por tanto en (1,3) es decreciente y en (3,+infinito) creciente

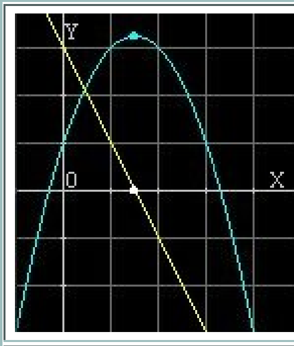
(-inf , 1)	**x=1**	**(1 , 3)**	**x=3**	**(3 ,+inf)**
$f' > 0$	$f\,' = 0$	$f\,' < 0$	$f\,' = 0$	$f\,' > 0$
Crece	**Máximo**	**Decrece**	**Mínimo**	**Crece**

Criterio del signo de la derivada segunda

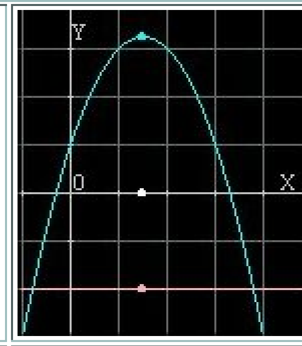
En un punto x = a donde la exista un **máximo local** la derivada primera cambia de signo de $f\,' > 0$ a $f\,' < 0$, esto significa que la derivada primera $f\,'(x)$ pasa decreciendo por el punto x=a, necesariamente **la derivada segunda** tiene que ser **negativa**

$$f\,''(a) < 0$$

En un punto x = a donde exista un **mínimo local** la derivada primera cambia el signo de $f\,' < 0$ a $f\,' > 0$, esto significa



La función $f\,'(x)$ es decreciente y el corte con el eje OX indica la abcisa del máximo, $f\,'(1.5) = 0$



La función $f\,''(x)$ es negativa

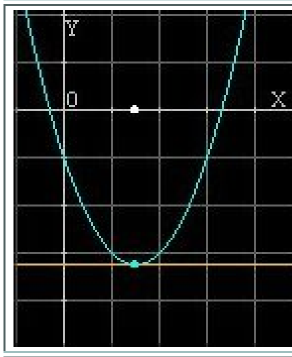
La función

$f(x) = x^2-3x-1$ presenta un punto mínimo para x=1.5

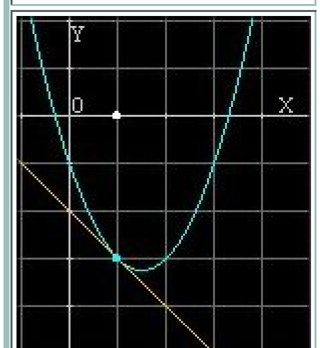
Las derivadas sucesivas son

$f\,'(x) = 2x-3$

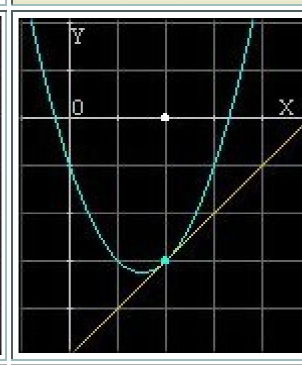
$f\,''(x) = 2$



En x=1.5 la tangente es horizontal y $f\,'(1.5)=0$



Para x < 1.5 la función es decreciente y la pendiente negativa, $f\,' < 0$



La función $f\,''(x)$ es positiva

Resuelve el problema anterior de forma analítica utilizando los dos criterios explicados al margen y contrasta esta solución con la que la derivada primera f ´(x) pasa creciendo por el punto x = a, necesariamente la **derivada segunda** tiene que ser **positiva**

f ´´(a) > 0

Donde	habrá	siempre que
f ´(a) = 0	**Máximo local**	**f ´´(a) < 0**
	Mínimo local	**f ´´(a) > 0**

Veamos ahora cómo se puede resolver el problema de hallar máximos y mínimos con el criterio de la derivada segunda.

En el **Ejemplo 1** nos daban la función **$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$**.

Se calculan las derivadas sucesivas f ´(x) = $3x^2$-12x+9, f ´´(x) = 6x-12

Se iguala a cero la primera derivada para hallar las abcisas de posibles puntos máximos o mínimos:

$3x^2$-12x+9 = 0, resolviendo x = 1, x = 3. Ahora veamos el signo de la derivada segunda en cada abcisa:

f ´´(1) = - 6 < 0, f ´´(3) = 6 > 0

Por tanto en x = 1 hay un máximo y en x = 3 hay un mínimo.

Para las ordenadas de estos puntos basta calcular los valores numéricos f(1) = 6, f(3)=2.

obtenida mediante el Nippe Descartes.

Experimenta con Descartes

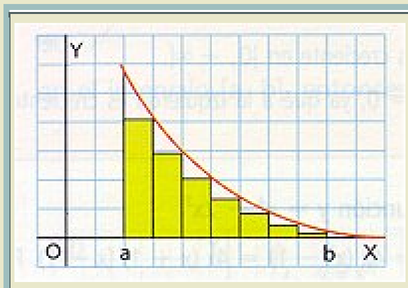
Utiliza el Nippe Descartes para funciones polinómicas y determina los puntos máximos y mínimos locales de la función **$f(x)=x^4 - 2x^2$**

Después calcula analíticamente los mismos utilizando los dos métodos explicados en el margen izquierdo. Contrasta las soluciones con las halladas por el método de experimentación.

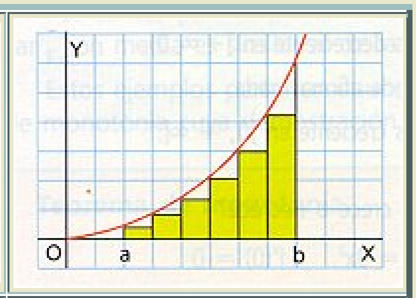
4. INFORMACIÓN QUE APORTAN LAS DERIVADAS SUCESIVAS: CURVATURA

La curvatura de una función está relacionada con el crecimiento de la derivada. Si la tasa de variación media de una función va aumentando a lo largo de un intervalo la función tiene curvatura **convexa** en dicho intervalo. Si la tasa de variación media va disminuyendo la función tiene curvatura **cóncava** . Si la tasa de variación media se mantiene constante la función no tiene curvatura, la función aumenta o disminuye de forma **lineal.**

Los siguientes dibujos nos dan idea de la curvatura.

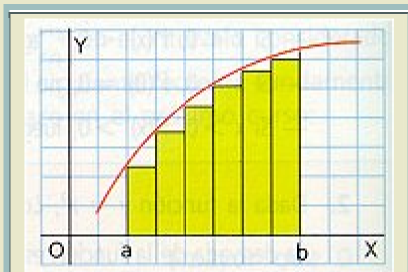


Convexa y decreciente

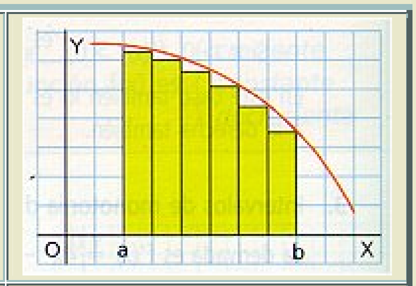


Convexa y creciente

En ambos casos la TVM (tasa de variación media) a lo largo del intervalo [a,b] aumenta: en el caso de la función creciente porque la TVM se hace cada vez vez más positiva (aumenta más), en el caso de la función decreciente porque la TVM se hace cada vez menos negativa (disminuye menos).



Cóncava y creciente



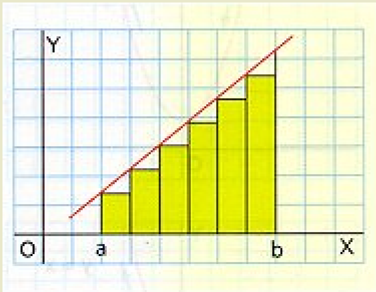
Cóncava y decreciente

En ambos casos la TVM a lo largo del intervalo [a,b] disminuye: en el caso de la función creciente porque la TVM se hace cada vez menos positiva (aumenta menos), en el caso de la función decreciente porque la TVM se hace cada vez más negativa (disminuye más)

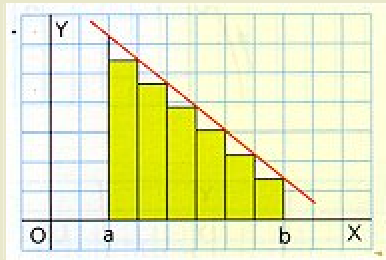
La curvatura es una manifestación de la rapidez con que aumenta o disminuye la función y no del propio crecimiento o decrecimiento de la función.

Tanto en la región cóncava como en la convexa se observa que la función puede crecer o decrecer. Pero la derivada en la región cóncava es decreciente, es decir el crecimiento medio va disminuyendo, y en la región convexa es creciente, es decir el crecimiento medio va aumentando.

Observa las siguientes **magnitudes macroeconómicas** y haz una **valoración de la evolución de las mismas** a lo largo del tiempo a la vista de la forma de la **curvatura que presentan**



Lineal y creciente



Lineal y decreciente

La función lineal, creciente o decreciente, no tiene curvatura y es debido a que la tasa de variación media a lo largo del intervalo [a,b] se mantiene constante.

Puesto que la derivada es la tasa de variación instantánea llegamos a la siguiente conclusión, que relaciona la curvatura con el crecimiento o decrecimiento de la función derivada f ´(x) y por tanto con **el signo de la derivada segunda**

Función convexa	Función cóncava
f ´(x) es creciente	f ´(x) es decreciente
f ´´(x) > 0	**f ´´(x) < 0**

Observar que si la derivada segunda es nula en un intervalo [a,b] es porque la derivada primera es constante y por lo tanto la función f(x) es lineal.

Determinación analítica de los intervalos de concavidad y convexidad.

Ejemplo 1

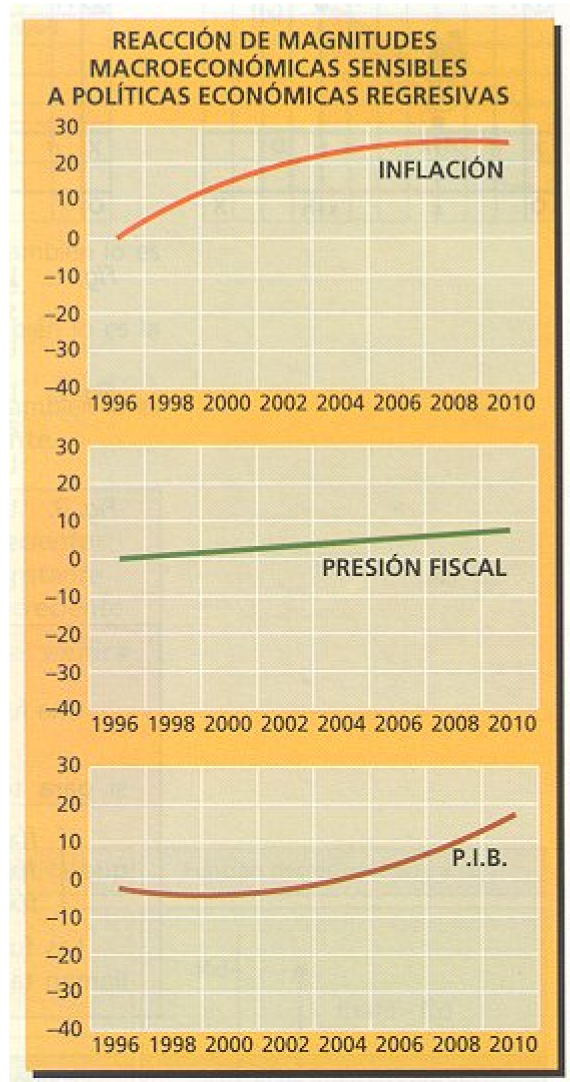
Sea la función $f(x) = x^4-2x^2$, cuyos intervalos de concavidad o convexidad queremos determinar.

Empecemos por calcular las derivadas sucesivas

$f\,´(x) = 4x^3-4x$

$f\,´´(x) = 12x^2-4$

Para f ´´ > 0 hay convexidad y para f ´´ < 0 hay concavidad. La solución consiste en resolver las inecuaciones



Experimenta con Descartes

Considera la función polinómica siguiente

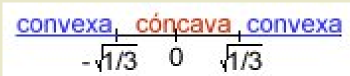
$$f(x) = 0.3x^4+x^3+0.5x^2+x+1$$

Se trata de que determines los intervalos de concavidad y convexidad.

Observa las escenas y ajusta la posición de la abcisa x para resolver el problema. Los coeficientes polinómicos son a= 0.3, b=1, c=0.5, d=1, e=1

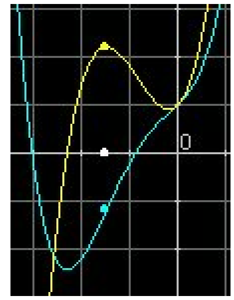
$12x^2-4 > 0$ para hallar la región convexa y $12x^2-4 < 0$ para la región cóncava. En este caso no se complica mucho el cálculo ya que

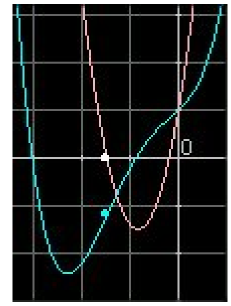
$12x^2-4 > 0$ implica $12x^2 > 4$ implica $x^2 > 4/12$ es decir $x^2 > 1/3$, de donde x > raíz(1/3) ~ 0.5774 ó x < -raíz(1/3) ~ -0.5774



En este caso y en otros similares donde podamos calcular las raíces de la derivada segunda con facilidad se puede llegar al mismo resultado. Supuesto que f ´´ es continua la función se tendrá que anular en los puntos de paso de una región a otra (pues hay cambio de signo de f ´´). Así que, igualando a cero f ´´ = 0, se obtiene:

$12x^2-4 = 0$ implica $12x^2 = 4$ implica x = ± raíz(1/3). Estos dos valores dividen al dominio de la función en tres regiones: (-inf,-raíz(1/3)), (-raíz(1/3),+raíz(1/3)) y (+raíz(1/3), +inf). Basta averiguar cual es el signo de f ´´ en uno cualquiera, por ejemplo en el central; tomemos un punto cualquiera p.e x=0 y comprobamos que f ´´(0) = -4. Luego se trata de un intervalo de concavidad, y por alternancia los otros dos son de convexidad.





La línea **azul** es la función **f(x)** y la línea **amarilla** la de su derivada **f ´(x)** Donde ésta crece la región es convexa y donde decrece es cóncava.

La línea **rosa** representa la función derivada segunda **f ´´(x)** Donde ésta es positiva f ´´> 0 la región es convexa y donde es negativa f ´´< 0 es cóncava.

Realiza después el cálculo de forma analítica y contrasta el resultado con el obtenido con Descartes.

Utiliza el método que consiste en hallar las raíces de la derivada segunda

Experimenta con Descartes

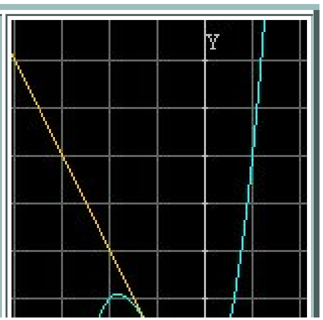
Determina los intervalos de concavidad y convexidad de la función **$f(x) = x^4-2x$** que se ha resuelto en el **Ejercicio 1** utilizando la escena de Descartes para funciones polinómicas.

Los coeficientes que hay que poner ahora en la escena son

a=1, b=0, c=-2, d=0, e=0

5. INFORMACIÓN QUE APORTAN LAS DERIVADAS SUCESIVAS: PUNTO DE INFLEXIÓN

Se trata de la



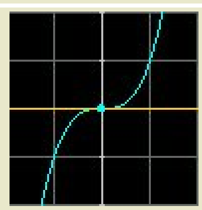
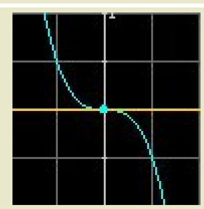
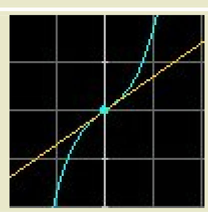
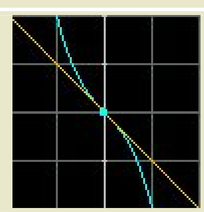
Supongamos una función continua f(x)

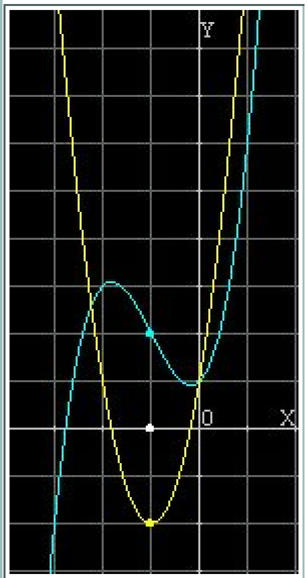
otro de convexidad (concavidad). En la región cóncava la derivada segunda es negativa, $f'' < 0$ y en la región convexa es positiva, $f'' > 0$. El punto de paso de una región a otra es un punto característico de cambio de curvatura llamado **punto de inflexión**. Si $f''(x)$ es continua necesariamente en el punto de inflexión se satisface que $f'' = 0$.

El punto de inflexión es un punto característico debido a que el ritmo de variación de la función cambia al pasar por él, ya que la tasa de variación media venía disminuyendo (aumentando) en la región cóncava (convexa) y al producirse la inflexión la tasa de variación media empieza a aumentar (disminuir) en la siguiente región convexa (cóncava).

Como la recta tangente a la curva f(x) queda por debajo en los puntos de convexidad y por encima en los puntos de concavidad, resultará que en el punto de inflexión la recta tangente queda a un lado por encima y al otro lado por debajo, es decir la tangente atraviesa la curva en dicho punto.

A continuación se muestran algunos casos:

	
Inflexión con tangente horizontal	**Inflexión con tangente horizontal**
	
Inflexión con tangente positiva	**Inflexión con tangente negativa**

	Observar la función f(x) y la recta tangente a la curva donde cambia la curvatura. Se puede apreciar como la tangente atraviesa la curva dejando por debajo la región cóncava y por encima la región convexa.
	
Observar como la **f ´(x)** es decreciente donde f(x) es cóncava y como es creciente donde es convexa.	Observar que la **f ´´(x)** es negativa donde hay concavidad y es positiva donde hay convexidad.

4.11. funciones hiperbólicas y sus derivadas

En las ecuaciones hiperbólicas , se acostumbra escribir el modelo matemático que le corresponde utilizando las funciones hiperbólicas definidas como sigue:

La función f: [R→[R, definida por:

a) f(x) = senh x = $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, x ∈ R, se denomina función seno hiperbólico.

b) f(x) = cosh x = $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, x ∈ R, se denomina función coseno hiperbólico.

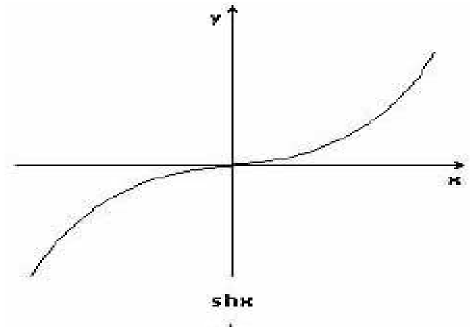
c) f(x) = tgh x = $\dfrac{senh\, x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, , x ∈ R, se llama función tangente hiperbólico.

d) f(x) = cotgh x = $\dfrac{\cosh x}{senh\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, , x ≠ 0, se llama función cotangente hiperbólico.

e) f(x) = sech x = $\dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$, , x ∈ R, se llama función secante hiperbólico.

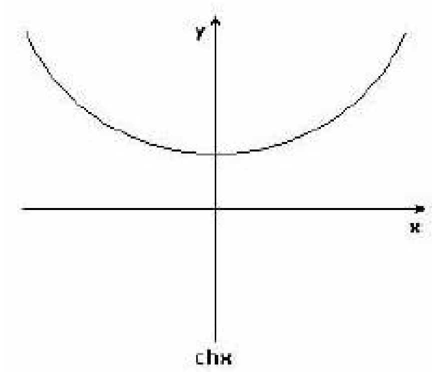
f) f(x) = cosch x = $\dfrac{1}{senh\, x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$, , x ≠ 0, se llama función cosecante hiperbólico.

Con la ayuda de las derivadas y los límites para hallar los extremos, concavidades y asíntotas, se pueden graficar estas funciones fácilmente. Su gráficos se muestran en las siguientes figuras.



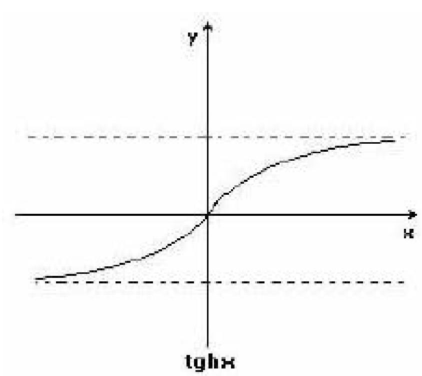
$$y = shx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad Dom(shx) = R$$

$$sh(0) = 0 \qquad sh(-x) = -shx \quad (IMPAR)$$



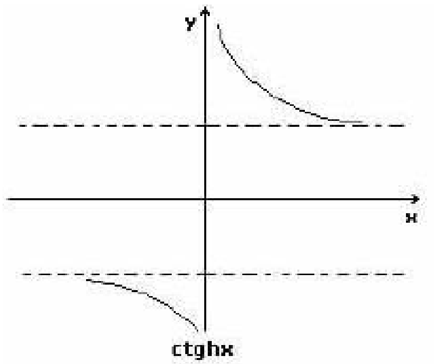
$$y = chx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad Dom(chx) = R$$

$$ch(0) = 1 \qquad ch(-x) = chx \quad (PAR)$$



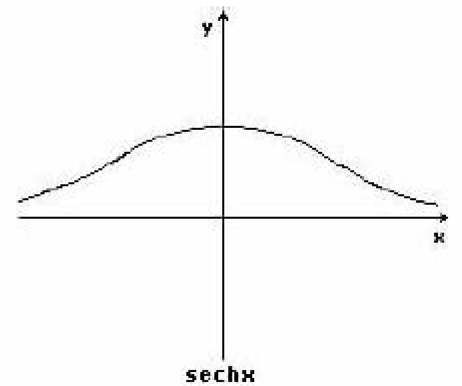
$$y = thx = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$Dom(tghx) = R$$



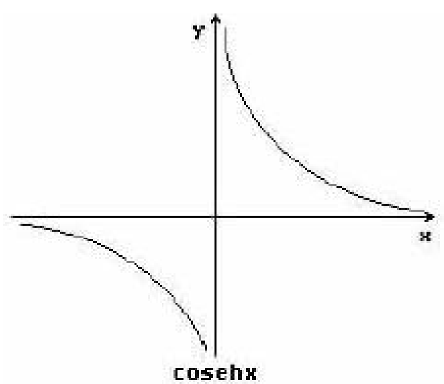
$$y = ctghx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$Dom(ctghx) = R - \{0\}$$



$$y = \sec hx = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$Dom(\sec hx) = R$$



$$y = \cos ehx = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$Dom(\cos ehx) = R - \{0\}$$

Considerando las definiciones de cada una de las funciones hiperbólicas, se puede mencionar algunas propiedades tales como:

1) senh(x) = 0 $\leftrightarrow$ x = 0, cosh(x) = 1 $\leftrightarrow$ x

2) son funciones impares, [f(-x) = - f(x)] y por tanto sus gráficas son simétricas respecto al origen, las funciones:

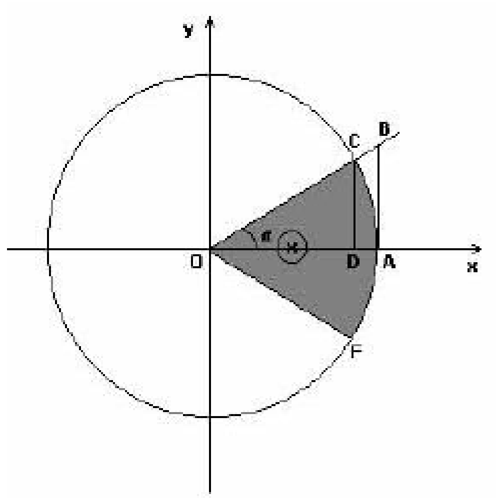
f(x) = senh x ; f(x) = tgh x; f(x) = cotgh x; f(x) = cosch x

3) Son funciones pares, [f(-x) = f(x)] y por tanto sus gráficas son simétricas respecto al eje y, las funciones:

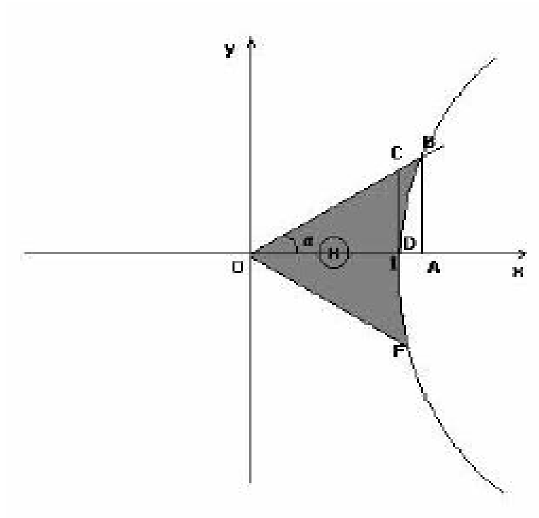
f(x) = cosh x; f(x) = sech x

4) De las definiciones se seno hiperbólico y coseno hiperbólico los valores de estas funciones están relacionados a las coordenadas de los puntos de una hipérbola equilátera, de manera similar a la que los valores de las correspondientes funciones trigonométricas están relacionadas a las coordenadas de los puntos de una circunferencia.

Área $= x = \frac{1}{2} R^2 2\alpha = \alpha = \acute{a}ngulocentralmitad$



sen x = dis DC = sen α, cos x = dis OD = cos α, tg x = dis AB = tg α



IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

Las funciones hiperbólicas, verifican ciertas identidades, similares a las que satisfacen las funciones trigonométricas. Por ejemplo.

$$\text{Cosh}^2\, x - \text{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{2+2}{4} = 1$$

Esta y otras identidades, son las que a continuación se presenta, dejando al lector la verificación de las mismas.

1) $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$
2) $\text{sech}^2 x + \text{tgh}^2 x = 1$
3) $\text{cotgh}^2 x - \text{cosch}^2 x = 1$
4) $\text{senh}\,(x \pm y) = \text{senh}\, x \cosh y \pm \cosh x\, \text{senh}\, y$
5) $\cosh\,(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$
6) $\text{tgh}\,(x \pm y) = \dfrac{tgh\, x \pm tgh\, y}{1 \pm tgh\, x\, tgh\, y}$
7) $\text{senh}\,(2x) = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$
8) $\cosh\,(2x) = \cosh^2 h + \text{senh}^2 x$

9) senh a + senh b = 2 senh $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

10) cosh a + cosh b = 2 cosh $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

11) 2senh² $\dfrac{x}{2}$ = cosh x – 1

12) 2cosh² $\dfrac{x}{2}$ = cosh x + 1

13) (senh x + cosh x)^n = senh (nx) + cosh (nx) , (Fórmula de Moivre)

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las fórmulas de derivación para las funciones hiperbólciicas se deducen fácilmente aplicando las reglas de derivación de la función exponencial e^x.

Así por ejemplo $\dfrac{d}{dx}(senh\,x)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas lo resumimos en la siguiente proposición, dejando al lector la verificación correspondiente.

Proposición 1.- Las funciones hiperbólicas son derivables en sus correspondientes dominios y se tiene:

a) Si f(x) = senh x, entonces, f'(x) = cosh x
b) Si f(x) = cosh x, entonces, f'(x) = senh x
c) Si f (x) = tgh x, entonces, f'(x) sech²x
d) Si f(x) = cotgh x, entonces, f' (x) = - cosch²x
e) Si f(x) = sech x, entonces, f'(x) = - sech x tgh x
f) Si f(x) = cosh x, entonces, f'(x) = - cosch x cotgh x

En virtud de esta proposición y de la regla de la cadena, si u = u(x) es función diferenciable (respecto a la variable x) se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 1.- Si u = u(x) es diferenciable, entonces:

a) D_x (senh u) = cosh u. $D_x(u)$
b) D_x (cosh u) = senh u. $D_x(u)$
c) D_x (tgh u) = sech² u. $D_x(u)$
d) D_x (cotgh u) = - cosch² u. $D_x(u)$
e) D_x (sech u) = sech u. Tgh u. $D_x(u)$
f) D_x (cosch u) = - cosch u. cotgh u. $D_x(u)$

Corolario 2.- (LIMITES HIPERBÓLICOS)

i) $\lim\limits_{x^+} senh\, x = 0$

ii) $\lim\limits_{x^+ o} \cos x = 1$

iii) $\lim\limits_{x^+ o} \dfrac{senh\, x}{x} = 1$

iv) $\lim\limits_{x^+ o} \dfrac{tgh\, x}{x} = 1$

v) $\lim\limits_{x^+ o} \dfrac{1-\cosh x}{x} = 0$

vi) $\lim_{x^+ o} \dfrac{1-\cosh x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

4.12 Teorema de valor medio y teorema de rolle

Teorema de Rolle y Teorema del Valor medio

Teorema de Rolle:

Si f es una función en la que se cumple:

(i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

(ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

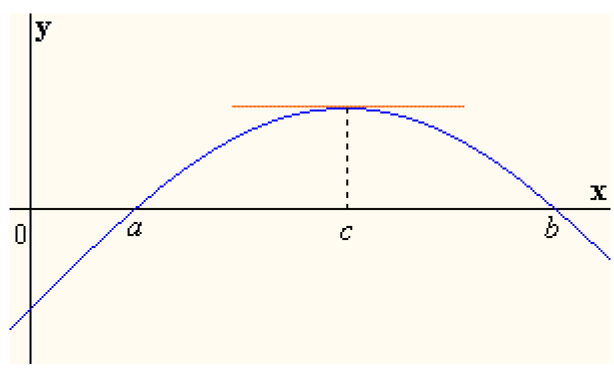
(iii) $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$

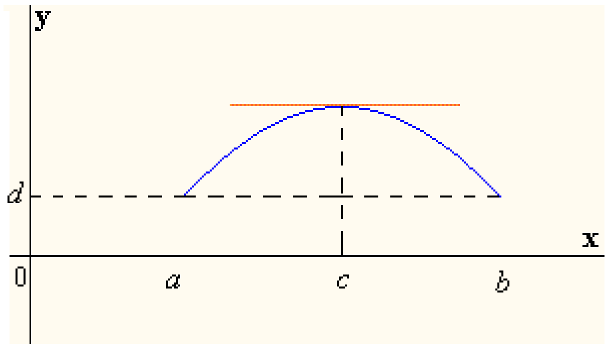
Entonces, existe un número c que pertenece a (a, b) tal que

$f'(c) = 0$

El Teorema de Rolle se atribuye al matemático francés Michel Rolle (1652-1719).

En la figura de la derecha se ilustra la interpretación geométrica del Teorema de Rolle. Como se puede observar se cumplen las tres condiciones que requiere el Teorema: f es continua en $[a, b]$ e integrable en (a, b), y $f(a) = f(b) = 0$. También se puede observar el punto (cuya abscisa es c) donde la recta tangente a la gráfica de f es paralela al eje x, es decir donde se cumple que $f'(c) = 0$.





El Teorema de Rolle es susceptible de una modificación en su enunciado que no altera para nada la conclusión del mismo. Esta se refiere al punto (iii) $f(a) = f(b)$: basta con que el valor de la función sea el mismo para $x = a$ y $x = b$ y no necesariamente sean iguales a cero. En la figura de la izquierda se ilustra este hecho.

Teorema del Valor medio:

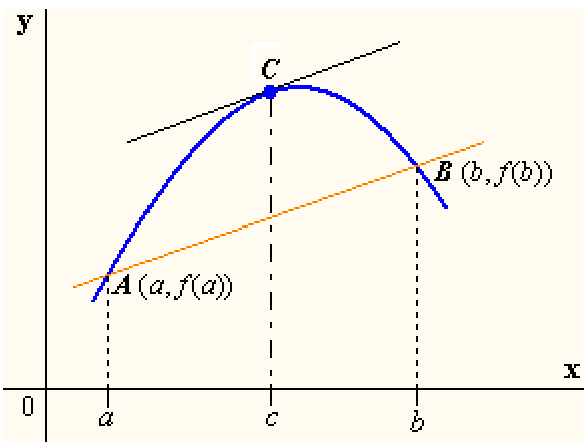
Si f es una función en la que se cumple que:

(i) f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$

(ii) f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces, existe un número c que pertenece a (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



A la izquierda se observa una ilustración de la interpretación geométrica del Teorema del Valor medio.

El teorema afirma que si la función es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), existe un punto c en la curva, entre A y B, donde la recta tangente es paralela a la recta que pasa por A y B. Esto es,

$$\exists\, c \in (a, b), \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bibliografia

- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.

- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.

- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.

- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.

- Análisis matemático; Tom M. Apostol.

- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.

- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.

- Apuntes de análisis matemático II(del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.

- Apuntes de análisis matemático(de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.

- Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich.