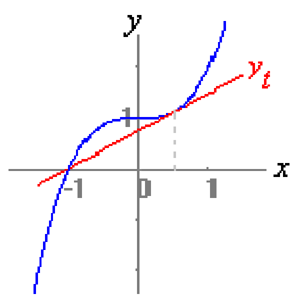
5. Aplicaciones de la Derivada

5.1. Recta tangente , normal e intersección de curvas

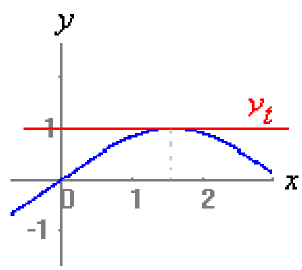
Recta tangente

Desde la escuela primaria se sabe que la recta tangente en un punto de una circunferencia es aquella recta que intercepta a la circunferencia en un solo punto, pero lo cierto es que tal definición no es suficiente para una curva en general porque en otros casos la recta tangente puede llegar a interceptar a la curva en uno o más puntos, además de ser inclinada, horizontal o vertical.



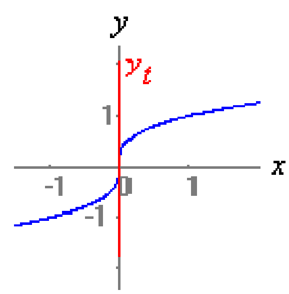
$y = x^3+1$

Ejemplo 1



$y = sen\ x$

Ejemplo 2



$y = \sqrt[3]{x}$

Ejemplo 3

Para obtener una definición adecuada de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto se emplea el concepto de límite

Ecuación de la recta tangente
Sea *f* una función continua en *xo*. La ecuación de la recta tangente a la curva en *xo* es: i) $y = f'(x_o) \cdot x + b$, si la función es derivable en *xo*. ii) $x=x_o$, si la derivada, cuando x tiende a x_o por la izquierda y por la derecha, es más infinito (o menos infinito).

1. Cálculo de la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3+1$ en $x_o=0.5$.

1. Derivamos la función $f'(x)=3x^2$.
2. Evaluamos la derivada en 0,5, $f'(0.5)=m_t=0.75$.

3. Calculamos la ordenada de $x_o=0.5$ que es $y_o=f(xo)=1.13$.
4. Sustituimos los valores dados en la ecuación de la recta tangente a la curva, es decir en $y_o=m_t x_o + b$, para obtener $b=0.75$.
5. Escribimos la ecuación de la recta tangente: $y = 0{,}75\, x + 0{,}75$

2. Cálculo de la ecuación de la recta tangente a $y= sen\ x$ en $x_o=pi/2$.

1. Derivamos la función $y' = cos\ x$.
2. Evaluamos la derivada en pi/2 para obtener $m_t= 0$
3. Calculamos la ordenada de $x_o=pi/2$, que es $y_o=1$.
4. Calculamos la ordenada en el origen de la recta tangente, $b=1$.
5. Escribimos la ecuación de la recta tangente: $y=1$

3. Cálculo de la ecuación de la recta tangente a la siguiente curva en el punto de abscisa cero.

$$y = \sqrt[3]{x}$$

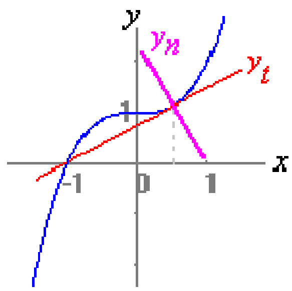
1. La derivada $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2. Se observa que el dominio de la función es $D=R$, pero que la primera derivada no está definida en cero.
3. Analizando la derivada cuando x tiende a 0 por la izquierda y derecha se sabe que y' es más infinito en ambos casos, entonces la ecuación de la recta tangente es vertical y su ecuación: $x=0$

4. Cálculo de la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en $x_o= -2$.

1. La derivada es $y' = -(x/y)$ (Obtenerla derivando la función implícitamente).
2. La ordenada para $x_o= - 2$ es $y_o= -1$.
3. La derivada evaluada en (-2,1) es $m_t= - 2$.
4. La ordenada en el origen de la recta tangente $b= - 5$.
5. La ecuación de la recta tangente: $y = - 2x- 5$

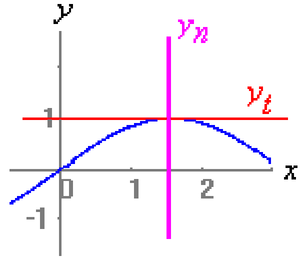
Recta normal

Si se traza una perpendicular a la recta tangente se obtiene la recta normal. Los gráficos muestran la recta tangente y la normal a la curva en un punto dado.



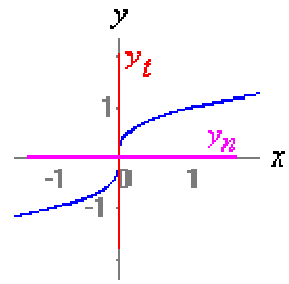
$y = x^3+1$

Ejemplo 1



$y = sen\ x$

Ejemplo 2



$y = \sqrt[3]{x}$

Ejemplo 3

Recta normal

La recta normal a la curva en el punto de abscisa x_o es la recta perpendicular a la tangente a la curva en el mismo punto.

Pendiente y ecuación de la recta normal

i) Si la pendiente de la recta tangente es $m_t=f\,'(x_o)$, la pendiente de la recta normal satisface la relación $m_t \,.\, m_n = -1$, es decir

$$m_n = -\frac{1}{f\,'(x_o)}$$

y la ecuación de la recta normal:

$$y_n = -\frac{1}{f\,'(x_o)}.x + b$$

ii) Si la recta tangente es vertical, la pendiente de la recta normal es

m_n=0, y la ecuación de la recta normal: $y = f(xo)$

5. Cálculo de la ecuación de la recta normal a $y=x^3+1$ en x_o=0,5.

1. Derivamos la función, $y'=3x^2$.
2. Evaluamos la derivada en $y'(0.5) = m_t = 0.75$.
3. Calculamos la pendiente de la recta normal m_n= - 1.33.
4. Calculamos la ordenada de x_o=0.5 que es y_o=1.13.
5. Calculamos la ordenada en el origen de la recta normal, b=1.79.
6. Escribimos la ecuación de la recta normal:

$$y_n = -1.33\,x + 1.79$$

6. Cálculo de la ecuación de la recta normal a $y= sen\ x$ en x_o=pi/2.

1. Derivamos la función, $y' = cos\ x$.
2. Evaluamos la derivada en pi/2 para obtener m_t= 0.
3. Calculamos la pendiente de la recta normal, m_n= 1/0 = infinito. La recta normal forma un ángulo de 90º con el eje de las abscisas, es decir se trata de una recta vertical de ecuación

$$x = \text{pi}/2$$

7. Cálculo de la ecuación de la recta normal a la siguiente curva en el punto de abscisa cero.

$$y = \sqrt[3]{x}$$

1. La derivada $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2. La ecuación de la recta tangente es x=0 (recta vertical
3. La ecuación de la recta normal es $y=f(x$o), es decir

$$y=0$$

8. Cálculo de la ecuación de la recta normal a la circunferencia x_o= -2 y con pendiente positiva.

$$x^2 + y^2 = 5$$

1. La derivada es $y' = -(x/y)$ (se obtiene derivando la función implícita).
2. La ordenada para x_o= -2 es y_o= -1.
3. La derivada evaluada en (-2,-1) es m_t= - 2.
4. La pendiente de la recta normal, m_t = 0.5.
5. La ordenada en el origen de la recta normal $b=0$.
6. La ecuación de la recta normal:

$$y= 0.5x$$

9. Determine las ecuaciones de la recta tangente L_T y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) L_N a la curva de ecuación: $y = f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$, en el punto *P* (3, 1).

Solución

Note en primer lugar que el punto de tangencia *P* (3, 1) pertenece a la curva (fig. 1.)

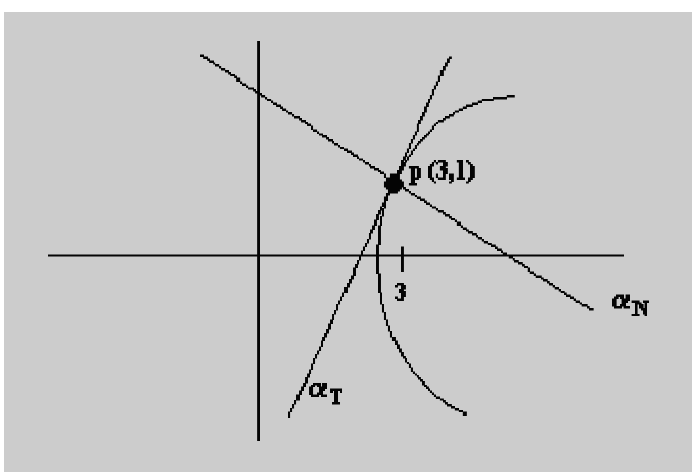


fig. 1.

La pendiente de L_T, viene dada por:

$$m_T = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{P(3,1)} = f'(3)$$

Pero, $f'(x) = \frac{1}{2}(2x)(x^2-8)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}$

Asi que, $m_T = f'(3) = 3$

Usando ahora la forma: **punto – pendiente** de la ecuación de la recta, se tiene entonces para L_T: $y-1=3(x-3) \Leftrightarrow 3x-y-8=0$, es la ecuación de la recta tangente.

Ahora, como $m_T . m_N = -1$, se deduce que $m_N = -\frac{1}{3}$.
Usando nuevamente la forma: **punto – pendiente** de la ecuación de la recta, se tiene para L_N: $y-1=-\frac{1}{3}(x-3) \Leftrightarrow x+3y-6=0$ es la ecuación de la recta normal.

10. Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y=f(x)=x^3+1$, que es paralela a la recta de ecuación: x+12y-6=0

Solución

En la fig. 2. aparece la gráfica de la curva y de la recta dada.

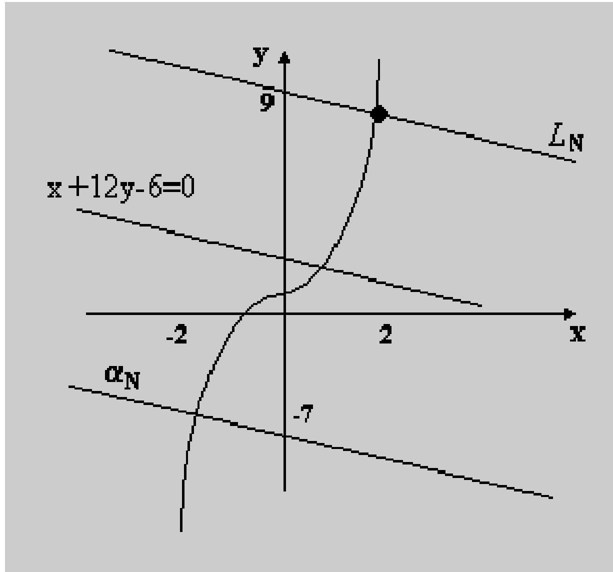


fig. 2.

Si se denota por L_N la recta normal, como L_N es paralela a $x + 12y - 6 = 0$,

se tiene que $m_N = -\dfrac{1}{12}$ (sección 4.5.).

Para determinar la ecuación de L_N, hace falta conocer el punto *P(x₁, y₁)* de tangencia.

Para ello, se usa el hecho de que $m_T = 12$ (m_T: pendiente de la tangente).

De otro lado, $m_T = f'(x_1) = 3x_1^2$

Asi que $3x_1^2 = 12 \therefore x_1 = \pm 2$

Este último resultado, indica que existen dos puntos de tangencia a saber: P_1 (2, 9) y P_2 (-2, -7).

En consecuencia, existen dos rectas normales que verifican las condiciones iniciales del problema.

Una de ellas, pasa por P_1 (2, 9) y pendiente $m_N = -\dfrac{1}{12}$.

Su ecuación viene dada por: $y - 9 = -\dfrac{1}{12}(x - 2) \Leftrightarrow x + 12y - 110 = 0$

La otra, pasa por P_2 (-2, -7) y pendiente $m_N = -\dfrac{1}{12}$.

Su ecuación viene dada por: $y - (-7) = -\dfrac{1}{12}(x - (-2)) \Leftrightarrow x + 12y - 86 = 0$

5.2. Máximos y mínimos (criterio de la primera derivada)

Extremos Absolutos

Las palabras máximo y mínimo, pertenecen a un lenguaje habitual y los usamos generalmente cuando deseamos expresar, lo más grande o lo más pequeño de la cantidad comparada. Este es el mismo significado que toma en el cálculo. *“Para cada función es posible establecer comparaciones entre las imágenes, en un intervalo dado, y de acuerdo a la medida conocer la mayor imagen y desde luego, al menor. Estos serán llamados extremos de la función, o de manera más específica, máximo absoluto y mínimo absoluto respectivamente”.*

Precisaremos aun más:

Definición:

Máximo y mínimo absolutos: Sea *f* una función continua definida en [a, b].

Sea *c* y *d* dos números del intervalo, tales que:

$f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

y $f(d) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$

llamamos a *f(c)* el **máximo absoluto** de *f* en [a, b] y a *f(d)* el **mínimo absoluto** de *f* en [a, b].

Es conveniente hacer algunas reflexiones sobre la definición anterior. Primeramente, es evidente en la Figura 51 que:

Máximo absoluto = f (b)

Mínimo absoluto = f (a)

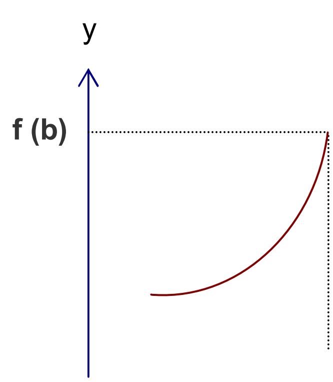


Figura 51

Sin embargo, ¿Cuál es el máximo absoluto y el mínimo absoluto en la función constante que aparece en la Figura 52?

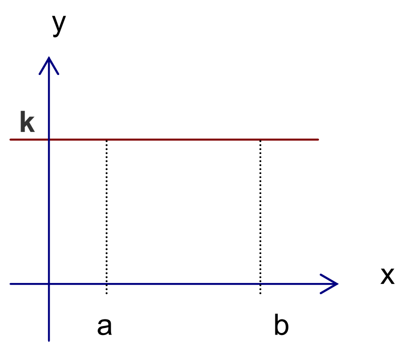


Figura 52

Como observarás la imagen para toda $x \in [a, b]$ es el número k. Si comparamos, en el lenguaje ordinario tendríamos que concluir que no hay mayor o menor. Sin embargo, de acuerdo a la definición:

Máximo absoluto = k

Mínimo absoluto = k

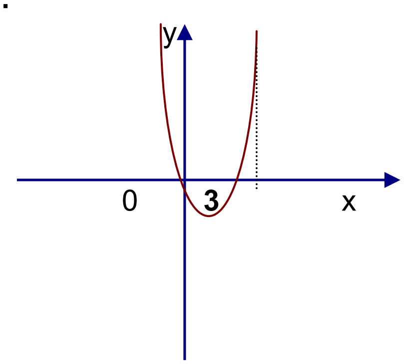
Con esto deseamos enfatizar lo siguiente: el m

resultan de la comparación de los valores que toma la función en su dominio. No representa la imagen de algún argumento en particular, independientemente de que ésta los tome. Así, este número llamado máximo (o mínimo) absoluto, puede corresponder al valor de la función para uno o más argumentos del dominio.

Otro aspecto importante es el hecho de que los extremos absolutos pueden o no coincidir con los límites del intervalo que da el dominio, como se verá en el ejemplo 1:

Ejemplo 1.- Dada $f(x) = x^2 - 2x$, calcular los extremos absolutos en el intervalo [0, 3].

SOLUCIÓN:



Como se observa, su vértice se encuentra en x = 1, y en él se encuentra el mínimo absoluto.

Resulta también evidente que el máximo absoluto corresponde a

Si x = 0
f (x) = $(0)^2 - 2(0) = 0$
Si x = 1
F (x) = $(1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$

Si x = 2
f (x) = $(2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$
Si x = 3
f (x) = $(3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$

$\therefore$ *Máximo absoluto = 3 para x = 3*
Mínimo absoluto = -1 para x = 1

Ejemplo 2.- Dada *f (x) = 3x – 5*, calcular los extremos absolutos en el intervalo [-2, 4].

SOLUCIÓN.

Si x = -2
f (x) = $3(-2) - 5 = -6 - 5 = -1$

Si x = 4
f (x) = $3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$

$\therefore$ *Máximo absoluto = 7 para x = 4*
Mínimo absoluto = -1 para x = -2

Observación:

Una regla práctica que se usa para determinar los **extremos absolutos** de una función continua *f* en un intervalo cerrado *[a, b]* es la siguiente:

1. Se determinan los puntos críticos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ (resolviendo $f'(x) = 0$, o donde $f'(x)$ no existe).

2. Se calcula $f(a)$ y $f(b)$.

3. Máximo absoluto de *f* = máx $\{ f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \ldots\ldots, f(c_n) \}$

Mínimo absoluto de *f* = mín $\{ f(a), f(b), f(c_1), f(c_2), \ldots\ldots, f(c_n) \}$

Extremos Relativos

Definición:

Máximos y mínimos relativos: Sea f una función derivable en [a, b]. Sea $c \in$ (a, b), tal que *f'(c) = 0*. Decimos que ***f(c)* es un extremo relativo (o extremo local)**, si es posible encontrar un subintervalo de [a, b] que contenga a *c* en donde *f (c)* sea un extremo absoluto.

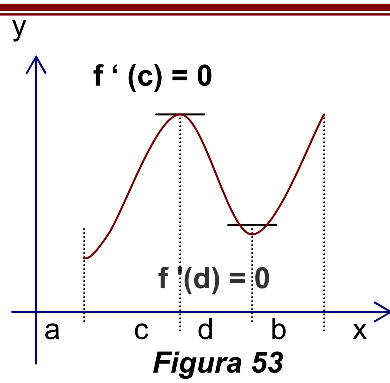


Figura 53

Por ejemplo, en la Figura 53, los extremos absolutos son:

Máximo absoluto = f (b)

Mínimo absoluto = f (a)

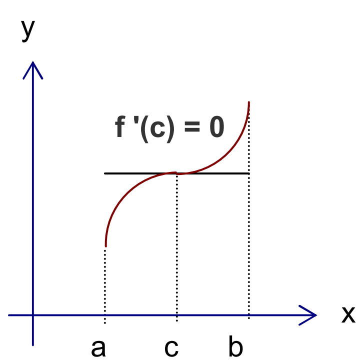
Sin embargo existen otros casos en donde si se restringe el dominio, los números anteriores se comportan como extremos. Por ejemplo, la función de la Figura 53 tiene un máximo en *x* = *c*, dentro del intervalo [a, d], y un mínimo en *x* = *d*, dentro del intervalo [c, d]. Así, de acuerdo a la definición:

Máximo relativo = f (c)

Mínimo relativo = f (d)

Los extremos relativos podrán localizarse al resolver la ecuación ***f '(x) = 0***, ya que entre sus raíces se encuentran las abscisas de estas; sin embargo, no todas las raíces corresponderán necesariamente a un extremo. Podría tratarse también de un punto como el que se ilustra en la Figura 54.

Figura 54



En donde, a pesar de que la derivada se anula en *x* = *c*, no se puede hallar en [a, b] ningún subintervalo en donde *f(c)* sea, ya un máximo o un mínimo.

*"Llamaremos **número crítico** a cualquier argumento c del dominio de la función f, tal que **f '(c) = 0**. Así, los máximos y mínimos locales tendrán siempre como abscisa un número crítico. Por otra parte, si c es un número crítico para f, entonces el punto (c, f(c)) será llamado **punto crítico de f**".*

Ejemplo 1.- Cuales son los números críticos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$ y cuales son sus puntos críticos.

Números Críticos

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$f'(x) = 0$

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$(x + 3)(x - 1) = 0$

Puntos críticos

Si $x = -3$

$f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 3$

$= -27 + 27 + 27 + 3 = 30$

$(-3, 30)$

Si $x = 1$

$f(1) = (1) + 3(1) - 9(1) + 3 = 1 + 3 - 9 + 3 = -2$

$(1, -2)$

Criterio de la Primera Derivada para Extremos Relativos

Sea *f* una función continua en un intervalo I; sean *a, b, c* puntos de I, tales que $a < c < b$ y *c* un punto crítico de *f* (*f ′(c)* = 0 o *f ' (c)* no existe).

Entonces:

i. Si $f'(x) > 0$ para todo *x* en (*a, c*) y $f'(x) < 0$ para todo *x* en (*c, b*), entonces, ***f(c)* es un máximo relativo.** (fig. 9.13. (a), fig. 9.13. (b)).
ii. Si $f'(x) < 0$ para todo *x* en (*a, c*) y $f'(x) > 0$ para todo *x* en (*c, b*), entonces, ***f(c)* es un mínimo relativo.** (fig. 9.13. (d), fig. 9.13. (e)).
iii. Si $f'(x) > 0$ para todo *x* en (*a, c*) y $f'(x) > 0$ para todo *x* en (*c, b*), entonces, ***f(c)* no es un extremo relativo.** (fig. 9.13. (c)).
iv. Si $f'(x) < 0$ para todo *x* en (*a, c*) y $f'(x) < 0$

para todo *x* en (*c, b*), entonces, ***f(c)* no es un extremo relativo.** (fig. 9.13. (f)).

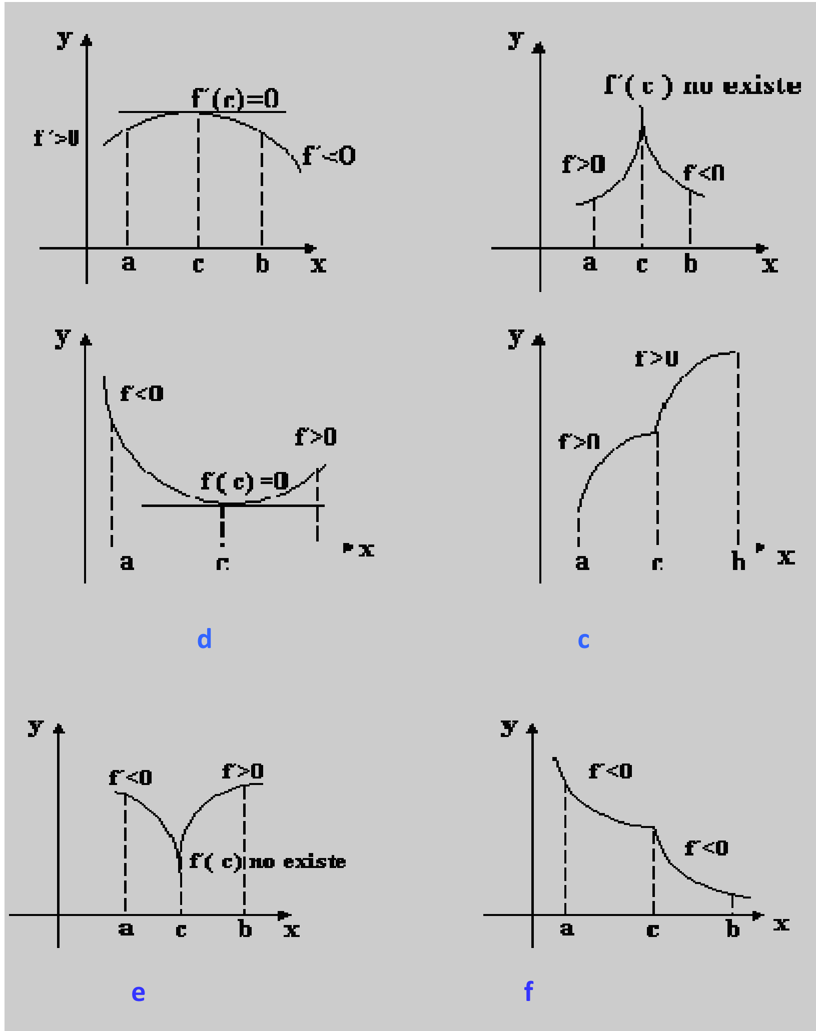


fig. 9.13.

Observación:

En el lenguaje corriente, las partes i. y ii. del teorema , se expresan respectivamente, en la siguiente forma:

Si la derivada pasa de **positiva** a **negativa**, entonces, el punto crítico corresponde a un **máximo relativo**; y si la derivada pasa de **negativa** a **positiva**, el punto crítico corresponde a un **mínimo relativo**.

5.3. Máximos y mínimos (criterio de la segunda derivada)

A partir de las propiedades de los extremos locales estamos en condiciones de establecer para diversos tipos de funciones, cuando un extremo relativo corresponda a un máximo y cuando a un mínimo. De hecho, a partir de la resolución de la ecuación ***f '(x) = 0***, es posible determinar su ubicación.

Además, como se observa en la Figura 55, el máximo relativo, se encuentra en algún punto de la curva en donde ésta es convexa. Por el contrario, para el punto en donde se localiza el mínimo relativo, la curva es cóncava. De acuerdo a los criterios y propiedades de concavidad y puntos de inflexión, se establece la siguiente propiedad.

Definición:

Criterio de la Segunda Derivada: Sea f una función tal que su primera y segunda derivada existan en $x = c$. Para la curva de f:

- Existe un **máximo relativo** en x = c si:
  $f'(c) = 0$ *y* $f''(c) < 0$
- Existe un **mínimo relativo** en x = c si:
  $f'(c) = 0$ *y* $f''(c) > 0$

y

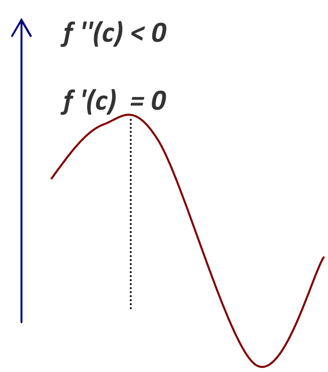
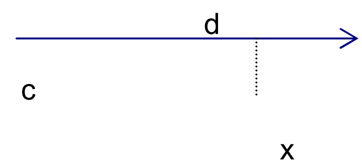


Figura 55



$$f''(d) > 0$$
$$f'(d) = 0$$

Cuando la función permite un cálculo rápido de sus derivadas sucesivas, el teorema resulta ser el mejor camino para la determinación de los extremos relativos.

Ejemplo 1.- Calcular los máximos y mínimos por el criterio de la segunda derivada de la función

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5.$

a) Calcular los números críticos.

$f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)\ (x - 2) = 0$

$x - 3 = 0 \quad x - 1 = 0$

$x = 3 \qquad x = 1$

b) Calculo de la segunda derivada.

$f''(x) = 6x - 12$

c) Sustitución de los números críticos.

Si $x = 1$

$f''(x) = 6\,(1) - 12 = 6 - 12 = -6 < 0$ *(máximo).*

Si $x = 3$

$f''(x) = 6\,(3) - 12 = 18 - 12 = 6 > 0$ *(mínimo).*

d) Calculo de los valores relativos.

Si $x = 1$

$f(x) = (1)^3 - 6\,(1)^2 + 9\,(1) + 5$

$= 1 - 6 + 9 + 5 = 9$

Máximo $= 9$ *para* $x = 1$

En forma de coordenada:

(1, 9) máximo

Si $x = 3$

$f(x) = (3)^3 - 6\,(3)^2 + 9\,(3) + 5$

$= 27 - 54 + 27 + 5 = 5$

Mínimo $= 5$ *para* $x = 3$

En forma de coordenada:

(3, 5) mínimo

Calcular los máximos y los mínimos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Siempre comenzamos calculando las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

Ahora igualamos la primera derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante,

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones,

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \begin{cases} x = \dfrac{12+6}{6} = 3 \\ x = \dfrac{12-6}{6} = 1 \end{cases}$$

Por tanto, podemos afirmar que :

$$x = 3 \qquad x = 1$$

son los puntos candidatos a ser máximo o mínimo. Esos puntos puede que sean máximos, mínimos o no sean nada. Para decidirlo los sustituimos en la derivada segunda :

Fíjate que lo importante no es el número que salga al sustituir. ¡ Lo importante es el signo que salga !

$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ es un mínimo}$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es un máximo}$$

Recuerda que la ordenada es el eje Y y la abcisa es el eje X

Por último, calculamos la ordenada que corresponde a cada punto sustituyéndolos en la función:

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = 0$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = 4$$

Por tanto ya podemos decir que la función $f(x)$ tiene:

Un máximo en el punto $(1, 4)$
Un mínimo en el punto $(3, 0)$

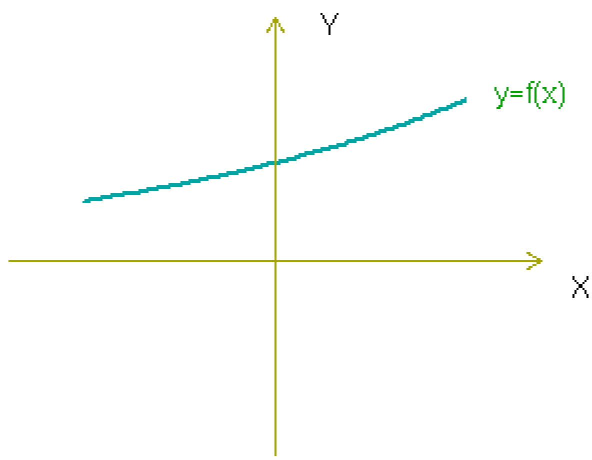
Solución: $\mathit{Máximo}: (1,4)$ $\mathit{Mínimo}: (3,0)$

5.4. Funciones crecientes y decrecientes

Función estrictamente creciente en un intervalo

Una función $f(x)$ es ***estrictamente creciente*** en un intervalo (a, b), si para dos valores cualesquiera del intervalo, x_1 y x_2, se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



Cuando en la gráfica de una función estrictamente creciente nos movemos hacia la derecha también nos movemos hacia arriba:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Una función f es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = a$ si existe algun número positivo h tal que f es estrictamente creciente en el intervalo $(x - h, x + h)$.

De esta definición se deduce que si f es derivable en $x = a$ y f es estrictamente creciente en el punto de abscisa $x = a$, entonces $f'(a) \geq 0$.

Función creciente en un intervalo

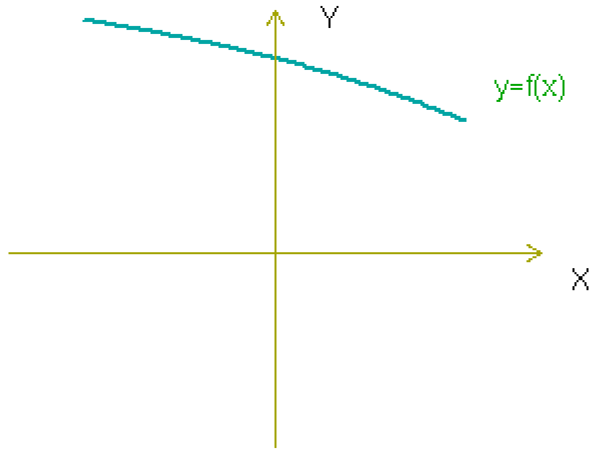
Una función $f(x)$ es ***creciente*** en un intervalo (a, b), si para dos valores cualesquiera del intervalo, x_1 y x_2, se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Función estrictamente decreciente en un intervalo

Una función $f(x)$ es ***estrictamente decreciente*** en un intervalo (a, b), si para dos valores cualesquiera del intervalo, x_1 y x_2, se cumple que:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



Cuando en la gráfica de una función estrictamente decreciente nos movemos hacia la derecha tambien nos movemos hacia abajo:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Una función f es estrictamente decreciente en el punto de abcisa $x = a$ si existe algun número positivo h tal que f es estrictamente decreciente en el intervalo $(x - h, x + h)$.

De esta esta definición se deduce que si f es derivable en $x = a$ y f es estrictamente decreciente en el punto de abcisa $x = a$, entonces $f'(a) \le 0$.

Función decreciente en un intervalo

Una función $f(x)$ es ***decreciente*** en un intervalo (a, b), si para dos valores cualesquiera del intervalo, x_1 y x_2, se cumple que:

5.5. $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le 0$$

5.6. Estudio general de las curvas

1. Trazar la curva correspondiente a la función:

$$y = f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+4} = \frac{x^2+3}{(x-2)(x+2)}$$

Solución

Determinemos los elementos fundamentales de la curva como son:

1. Dominio natural de f (x).

Los únicos valores de *x* para los cuales no existe la función son $x = 2$ y $x = -2$ (valores de *x* que anulan el denominador). De esta forma: $D_f = R - \{2, -2\}$.

2. Interceptos:

i. Con el eje *x* (se hace *y* = o en (1)): $0 = \frac{x^2+3}{x^2-4} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 0$

Esta última ecuación no tiene Solución real, indicando con esto que la curva no corta al eje *x*.

ii. Con el eje *y* (se hace *x* = o en (1)): $y = \frac{0^2+3}{0^2-4} = -\frac{3}{4}$ Asi que, la curva corta al eje *y* en el punto $P(0, -3/4)$.

3. Asíntotas:

i. Verticales: son aquellos valores de *x* que anulen el denominador de (1). En este caso, las rectas verticales *x* = 2 y *x* = – 2 son asíntotas verticales de la curva.

Además, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = +\infty$$

ii. Horizontales:

Como: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1$, se deduce que y = 1 es una **asíntota horizontal** de la curva. De otro lado, como, $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1 + \frac{7}{x^2 - 4}$, se deduce entonces que los valores de la función para valores grandes de x en valor absoluto, son mayores que 1, indicando con esto que la curva siempre está por encima de la curva.

En la fig. 3. se indica el intercepto de la curva con el eje y, el comportamiento de la curva cerca de las asíntotas.

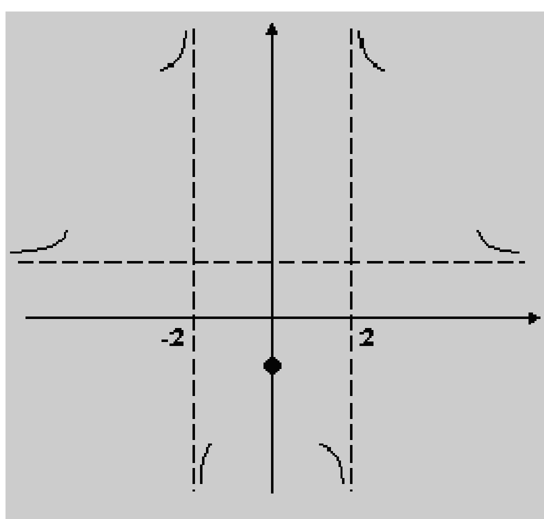


fig. 3

iii. Oblicuas: No tiene. ¿Porqué?.

4. Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos.

Para ello, se hace el análisis de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+3)}{(x^2-4)^2} = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$$

Como $(x^2-4)^2 > 0$ (positivo), el signo de la derivada, solo depende del signo del factor (−14 *x*). Asi:

Signo de (−14 *x*) ó Signo de *f ′(x)* ++++++++++++++| - - - - - - - - - - - - - - -

0

El diagrama indica que: *f (x)* es creciente en $(-\infty,0]$

f (x) es decreciente en $[0,+\infty)$

En consecuencia,

x = 0, corresponde a la abscisa de un punto máximo relativo. $P_m(0,f(0)) \Leftrightarrow P_m(0,-3/4)$.

5. Intervalos de concavidad. Posibles puntos de inflexión.

Para ello, se hace uso de la segunda derivada.

Si $$f'(x) = \frac{-14x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{42x^2+56}{(x-2)^3\cdot(x+2)^3}$$

Como $42x^2+56>0$ (positivo), el signo de la segunda derivada depende del signo de los factores del denominador.

Signo de $(x-2)^3$- - - - - - - - - - - - - - - | ++++++++++++++

Signo de $(x + 2)^3$ - - - - - - -| ++++++++ ++++++++++++++

-2

Signo de $f''(x)$ +++++++++| - - - - - - - |+++++++++++++++

-2 2

El signo de la segunda derivada indica que:

f (x) es cóncava hacia arriba (+) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

f (x) es cóncava hacia abajo (-) en $(-2,2)$

En los puntos $x = -2$ y $x = 2$ la concavidad cambia de signo, indicando con esto que hay "inflexión" pero, no existe punto de inflexión (¿Porqué?).

La fig. 4. recoge toda la información obtenida y proporciona una muy buena aproximación a la gráfica de la función dada.

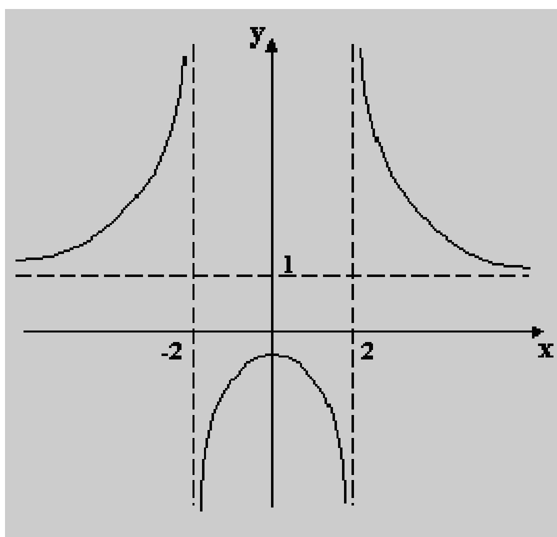


fig. 4

2. Trazar la curva correspondiente a la función:

$$y = f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (1)$$

Solución

1. Dominio natural de *f(x)*:

El único valor de x para el cual no existe f es $x = 1$ (valor de x que anula el denominador). Asi que $D_f = R - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

la función es continua para todo $x \neq 1$, por ser el cociente de dos polinomios.

2. Interceptos:

i. Con el eje x (se hace $y = 0$ en (1)): $0 = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \Rightarrow x = -1$. Luego el punto $P(-1, 0)$ es el intercepto de la curva con el eje x.

ii. Con el eje y (se hace $x = 0$ en (1)): $y = \frac{(0+1)^3}{(0-1)^2} = 1$. Luego el punto $Q(0,1)$ es el intercepto de la curva con el eje y.

3. Asíntotas:

i. Verticales: El único valor de x que anula el denominador es $x = 1$ y esta es la única asíntota vertical de la curva.

De otro lado:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x+1)^3 \rightarrow tiende, a, 8(+)}{(x-1)^2 \rightarrow tiende, a, 0(+)} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+1)^3 \rightarrow tiende, a, 8(+)}{(x-1)^2 \rightarrow tiende, a, 0(+)} \rightarrow +\infty$$

ii. Horizontales: No tiene (¿Porqué?).

iii. Oblicuas: Como el grado del numerador es 3, una unidad mas que el grado del denominador que es 2, la curva tiene una asíntota oblicua de la forma $y = mx + b$.

Para determinarla, se efectúa la división entre el numerador y el denominador y se obtiene:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} = (x + 5) + \frac{12x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

Asi que $y_A = x + 5$ es la asíntota oblicua de la curva.

Para estudiar el comportamiento de la curva "cerca" de la asíntota se estudia la diferencia: $y_C - y_A$, para un mismo valor de x.

Donde y_C: la ordenada de la curva y y_A: ordenada de la asíntota.

Esto es, $$y_C - y_A = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 1} - (x + 5) = \frac{12x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$ Si $x > 0$, entonces, $y_C - y_A > 0$, indicando con esto, que para valores grandes de x (positivos), la curva esta por encima de la asíntota.

Si $x < 0$, entonces, $y_C - y_A < 0$, lo cual indica que para valores grandes de x (negativos), la curva esta por debajo de la asíntota.

En la figura 5 se ilustra los interceptos de la curva con los ejes coordenados, asi como también el comportamiento de la curva "cerca" de las asíntotas.

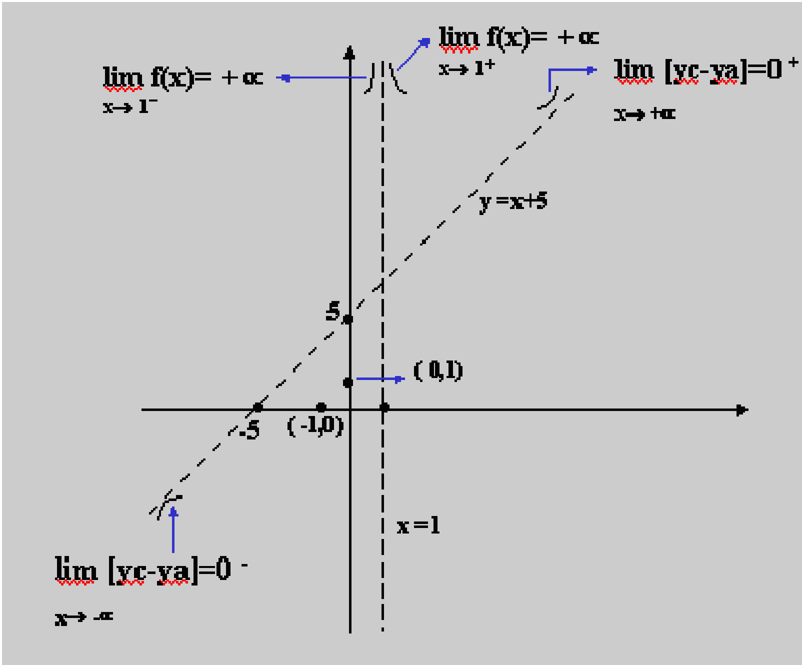


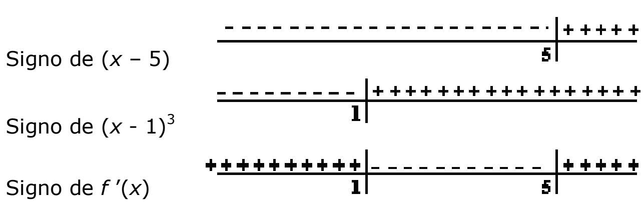
fig. 5.

4. Intervalos donde crece y decrece la curva. Extremos relativos.

Para ello se hace el análisis del signo de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{3(x+1)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1)^3}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2 \cdot (x-5)}{(x-1)^3}$$

El signo de *f ′(x)* depende de los signos que poseen los factores (x – 5) y (x – 1)^3, puesto que
(x + 1)^2 es siempre positivo.



El signo de *f ′(x)* indica:

f crece en los intervalos $(-\infty,1]$ y $[5,+\infty)$

f decrece en el intervalo $(1,5]$

$x = 1$ corresponde a un **máximo relativo**. $P_M(1, f(1)) = P_M(1,0)$

$x = 5$ corresponde a un **mínimo relativo**. $P_m(5, f(5)) - P_m(5,13.5)$

5. Intervalos de concavidad. Posibles puntos de inflexión

Para ello se analiza el signo de la segunda derivada *f''(x)*.

$$f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

El signo de *f''(x)* solo depende del signo del factor ($x + 1$), puesto que 24 y $(x-1)^4$ son siempre positivos.

Signo de (x + 1)	- - - - - - - - -	+ + + + + + + + + + + + + + + + +
	$\cap$ -1	$\cup$

El signo de *f ''(x)* indica:

f(x) es cóncava hacia abajo $(\cap)$ en $(-\infty,1]$

f(x) es cóncava hacia arriba $(\cup)$ en $[-1,+\infty)$.

El punto $P_I(-1, f(-1))$ corresponde a un punto de inflexión, es decir en $P_I(-1,0)$ la curva cambia de concavidad.

En la fig. 6. se traza la curva con todos los elementos asi obtenidos

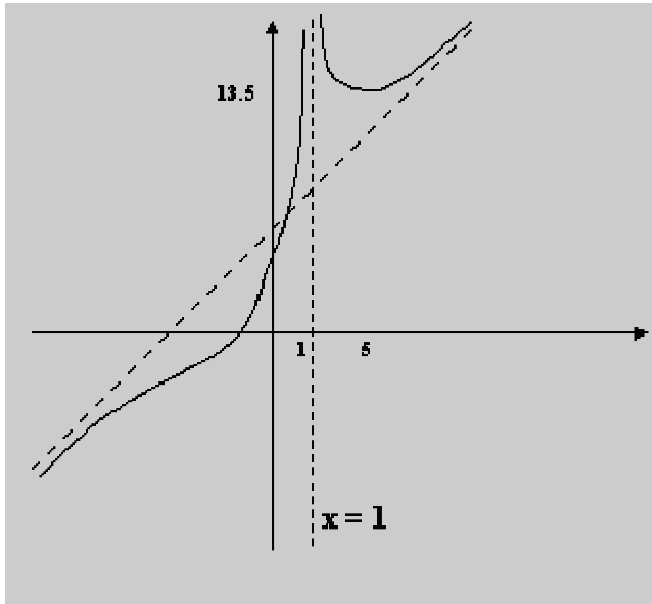


fig. 6.

5.7. Derivada como razón de cambio y aplicaciones

La expresión $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *representa el cuociente entre la variación de la variable dependiente (función) y la variación experimentada por la variable independiente, por este motivo se le denomina razón media de cambio de la función f(x), cuando se toma el límite a esta expresión en que Δx → 0, es decir la derivada, se le denomina también razón instantánea de cambio.*

Este concepto se aplica también en cinemática al expresar la posición de un cuerpo con movimiento unidimensional en función del tiempo x = x(t), en tal caso la razón instantánea de cambio de la posición, corresponde al concepto de rapidez instantánea.

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Para encontrar entonces la razón de cambio se debe determinar en primer lugar la relación entre las variables mediante una función y posteriormente obtener su derivada.

***Ejemplo**:*

Encontrar la rapidez de variación del volumen de un cubo con respecto a la longitud de un lado.

Solución:

Si la relación entre el volumen de un cubo (V) y la longitud de uno de sus aristas (a) es:

$V = a^3$ entonces obteniendo dV/da se tiene la variación, esto es: $V' = 3a^2$

5.8. Problemas de aplicación

La expresión $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ representa el cociente entre la variación de la variable dependiente (función) y la variación experimentada por la variable independiente, por este motivo se le denomina razón media de cambio de la función f(x), cuando se toma el límite a esta expresión en que $\Delta x \to 0$, es decir la derivada, se le denomina también razón instantánea de cambio.

Este concepto se aplica también en cinemática al expresar la posición de un cuerpo con movimiento unidimensional en función del tiempo x = x(t), en tal caso la razón instantánea de cambio de la posición, corresponde al concepto de rapidez instantánea.

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Para encontrar entonces la razón de cambio se debe determinar en primer lugar la relación entre las variables mediante una función y posteriormente obtener su derivada.

La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma.

Por definición la derivada de una función f(x) es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las aproximaciones numéricas que podamos hacer (para $h > 0$) serán:
Diferencias hacia adelante:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diferencias hacia atrás:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

La aproximación de la derivada por este método entrega resultados aceptables con un determinado error. Para minimizar los errores se estima que el promedio de ambas entrega la mejor aproximación numérica al problema dado:
Diferencias centrales:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

Bibliografía

HAEUSSLER, ERNEST F. JR., *Matemáticas para Administración y Economía*, Décima Edición, Editorial Pearson, México, 2003

JAGDISH, C. ARYA, *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía,* Cuarta Edición, Editorial Pearson, México, 2002

HOFFMANN, LAWRENCE D., *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Sexta Edición, Editorial Mc Graw Hill, Bogotá, 1998

WEBER, JEAN E., *Matemáticas para Administración y Economía*, Cuarta Edición, Editorial Harla, México, 1984