6. Sucesiones y series

6.1. Definición de sucesión

Sucesiones

Definición

Sucesión

> Se denomina sucesión a una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Para denotar el n-ésimo elemento de la sucesión se escribe a_n en lugar de f(n).

Ejemplo:

$a_n = 1/n$

$a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, ...

Definición

Sucesión monótona creciente

> Una sucesión es monótona creciente si se cumple que para todo n natural $a_n <= a_{n+1}$ ($a_1 <= a_2 <= a_3 <= ... <= a_n$).

Ejemplo:

$a_n = n$ es monótona creciente.

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, ...

Definición

Sucesión monótona decreciente

> Una sucesión es monótona decreciente si se cumple que para todo n natural $a_n >= a_{n+1}$ ($a_1 >= a_2 >= a_3 >= ... >= a_n$).

Ejemplo:

$a_n = 1/n$ es monótona decreciente.

$a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 1/4$, ...

6.2. Limites de una sucesión

Límite finito de una sucesión

Consideremos la sucesión $a_n = 1/n$.

$a_1 = 1$
$a_2 = 1/2 = 0.5$
$a_3 = 1/3 \approx 0.33$
$a_4 = 1/4 = 0.25$
$a_5 = 1/5 = 0.2$
$a_6 = 1/6 \approx 0.17$

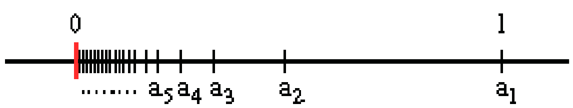
$a_7 = 1/7 \approx 0.14$

$a_8 = 1/8 \approx 0.12$

$a_9 = 1/9 \approx 0.11$

$a_{10} = 1/10 = 0.1$

A medida que aumenta n, los términos de la sucesión son cada vez más cercanos a 0. Si representamos los términos como puntos en una línea, esto significa que los puntos a_n se apiñan cada vez más cerca del punto 0 conforme n crece.



Se dice que a_n tiende a 0, o que tiene límite 0.
Se expresa simbólicamente por: lim $a_n = 0$ o bien, ocasionalmente, por la notación abreviada $a_n \to 0$.

Definición

Límite finito

lim $a_n = a \iff$ para todo $\varepsilon>0$ existe N natural / para todo $n > N$ $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, o lo que es lo mismo, $|a_n - a| < \varepsilon$.

Para cualquier número positivo ε, por pequeño que sea, podemos encontrar un natural N suficientemente grande tal que a partir del índice N en adelante se tiene que $|a_n - a| < \varepsilon$.
Es decir, si tomamos un entorno de a de cualquier radio siempre habrá un subíndice N tal que desde N en adelante todos los términos de la sucesión pertenecen a dicho entorno.

Límite infinito de una sucesión

Consideremos la sucesión $a_n = n^2$.

$a_1 = 1$
$a_2 = 4$
$a_3 = 9$
$a_4 = 16$
...
$a_{10} = 100$
...
$a_{100} = 10.000$

Al crecer n, a_n no tiende a un límite definido, sino que crece más allá de toda cota. Se dice que a_n tiende a infinito.

Definición

Límite infinito

lim a_n = +inf <=> para todo K>0 existe N natural / para todo n > N a_n > K.

Para cualquier número positivo K (tan grande como se quiera), podemos encontrar un natural N, tal que a_N y todos los términos siguientes son mayores que K. Esto quiere decir que a_n puede hacerse mayor que cualquier cota, con tal de que n sea lo suficientemente grande.

Del mismo modo se define lim a_n = -inf <=> para todo K<0 existe N natural / para todo n > N a_n < K.

Definición

Convergencia y divergencia

Cuando una sucesión tiene límite finito a se dice que es convergente y converge a a.
Una sucesión que tiene límite infinito se llama divergente.
Una sucesión que carece de límite se llama oscilante.

La sucesión $a_n = 1/n$ converge a 0.
La sucesión $a_n = n^2$ es divergente.
La sucesión $a_n = \text{sen } n$ es oscilante, pues sus valores varían entre 1 y -1.

Propiedades del límite finito de sucesiones

Unicidad del límite

Si una sucesión tiene límite es único.

H) $\lim a_n = b$

T) b es único

Demostración:

La demostración se hace por reducción al absurdo.
Suponemos que a_n tiene dos límites distintos b y c.
Suponemos que $b > c$.

$\lim a_n = b \Rightarrow$ (por def. de límite finito de una sucesión) para todo $\varepsilon>0$ existe n_1 natural / para todo $n > n_1$ $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$;

$\lim a_n = c \Rightarrow$ (por def. de límite finito de una sucesión) para todo $\varepsilon>0$ existe n_2 natural / para todo $n > n_2$ $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$

Consideremos un ε tal que $c+\varepsilon < b-\varepsilon$, o sea $\varepsilon < (b - c)/2$

Sea N = max $\{n_1,n_2\}$

Para todo n > N se cumple

- $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$
- $c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$

Absurdo, pues a_n no puede pertenecer a dos entornos disjuntos.
Absurdo de suponer $b \neq c$.
Por lo tanto $b = c$.

Límite de la sucesión comprendida

Si una sucesión está comprendida entre otras dos que tienen igual límite, entonces tiene el mismo límite.

H) $\lim a_n = \lim b_n = p$

Para todo $n > n_0$ $a_n <= c_n <= b_n$

T) $\lim c_n = p$

Demostración:

$\lim a_n = p$ => (por def. de límite de una sucesión) para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe n_1 natural / para todo $n > n_1$ $p - \varepsilon_1 < a_n < p + \varepsilon_1$

$\lim b_n = p$ => (por def. de límite de una sucesión) para todo $\varepsilon_2 > 0$ existe n_2 natural / para todo $n > n_2$ $p - \varepsilon_2 < b_n < p + \varepsilon_2$

Sea N = max $\{n_0, n_1, n_2\}$

Para todo $n > N$ se cumple $p-\varepsilon_1 < a_n <= c_n <= b_n < p+\varepsilon_2$

$p-\varepsilon_1 < c_n < p+\varepsilon_2$

Sea $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$

Para todo $n > N$ $p-\varepsilon < c_n < p+\varepsilon$

=> (por def. de límite de una sucesión) $\lim c_n = p$.

Operaciones con límites

El límite de la suma, producto y cociente de sucesiones se determina por las mismas reglas que para las funciones de variable continua. Las demostraciones son iguales, basta sustituir $f(x)$ por a_n y considerar que la tendencia siempre es hacia +infinito. Aquí sólo demostraremos el límite de una suma. Para ver las demás reglas visitar la página sobre operaciones con límites.

Límite de la suma

Si dos sucesiones tienen límite finito, entonces su suma tiene límite finito y es igual a la suma de esos límites.

H) $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

T) $\lim a_n + b_n = a + b$

Demostración:

Queremos probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$ $|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon' = \varepsilon/2$

$\lim a_n = a$ => (por def. de límite finito de una sucesión) para todo $\varepsilon' > 0$ existe n_0 natural / para todo $n > n_0$ $|a_n - a| < \varepsilon'$.

$\lim b_n = b$ => (por def. de límite finito de una sucesión) para todo $\varepsilon' > 0$ existe n_1 natural / para todo $n > n_1$ $|b_n - b| < \varepsilon'$.

Sea $N = \max \{n_0, n_1\}$

Para todo $n > N$ se cumple:

- $|a_n - a| < \varepsilon'$
- $|b_n - b| < \varepsilon'$

=> $|a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon' = \varepsilon$

$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| <= (*)\ |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$

(*) Desigualdad triangular: $|x + y| <= |x| + |y|$

Resumiendo, dado $\varepsilon>0$ existe N / para todo $n > N$ $|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon$

=> (por def. de límite finito de una sucesión) $\lim a_n + b_n = a + b$

Definición

Sucesiones equivalentes

Dos sucesiones se dicen equivalentes cuando el límite de su cociente es 1.

6.3. Sucesiones monótonas y acotadas

Sucesión acotada

M es cota superior de la sucesión a_n si $a_n < M$ para todo n.
m es cota inferior de la sucesión a_n si $a_n > m$ para todo n.
Una sucesión es acotada si tiene tanto cota superior como inferior.

Teorema

Toda sucesión monótona y acotada converge.

H) a_n monótona

Existen m y M / $m < a_n < M$ para todo n.

T) $\lim a_n = b$

Demostración:

Queremos probar que existe N / para todo n > N $|a_n - b| < \varepsilon$.

Supongamos que a_n es creciente (si suponemos que es decreciente, la demostración es análoga).

$a_n < M$ para todo n

Es decir que el conjunto de todos los términos de la sucesión $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ tiene extremo superior (la menor de las cotas superiores), llamémosle b.

Sea $\varepsilon>0$

$b - \varepsilon$ no es cota superior de S pues es menor que el extremo superior

=> existe N / $a_N > b-\varepsilon$.

a_n es creciente => para todo $n > N$ $a_n >= a_N$ => $a_n > b-\varepsilon$ => $-(a_n - b) < \varepsilon$ (1)

$b+\varepsilon$ también es cota superior de S

=> para todo n $a_n < (b+\varepsilon)$ => => $a_n - b < \varepsilon$ (2)

=> De 1) y 2) para todo $n > N$ $|a_n - b| < \varepsilon$

Teorema

Toda sucesión convergente es acotada.

H) a_n convergente

T) a_n acotada

Demostración:

a_n es convergente, eso significa que tiene límite finito: lim $a_n = a$

=> (por def. de límite finito de una sucesión) para todo $\varepsilon>0$ existe N / para todo $n > N$ $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$

=> (por def. de sucesión acotada) a_n está acotada.

Nota: El recíproco no es cierto. Que una sucesión esté acotada no implica que sea convergente.

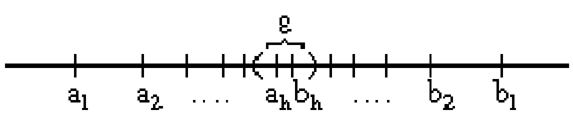
Contraejemplo: $a_n = (-1)^n$ está acotada pero no es convergente.

-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...

Definición

Par de sucesiones monótonas convergentes

> $((a_n),(b_n))$ es un par de sucesiones monótonas convergentes si
> a) a_n es creciente y b_n decreciente.
> b) Para todo n natural $a_n <= b_n$
> c) Para todo $\varepsilon>0$ existe h natural / $b_h - a_h < \varepsilon$



Ejemplo:

$a_n = -1/n$, $b_n = 1/n$

- a_n es creciente.

Debemos probar que $a_{n+1} >= a_n$, o sea $a_{n+1} - a_n >= 0$

$$\frac{-1}{n+1} - \frac{-1}{n} = \frac{-n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n} > 0$$

- b_n es decreciente.

Debemos probar que $b_{n+1} <= b_n$, o sea $b_n - b_{n+1} >= 0$

```
 1      1     n + 1 - n      1
```

```
--- - --- = --------- = ------ > 0
 n    n+1     n(n+1)     n^2 + n
```

- Para todo n $a_n < b_n$

```
-1     1
--- < --- pues -n < n para todo n.
 n     n
```

- Dado ε>0, existe h / $b_h - a_h < ε$

```
 1    -1     2
--- - --- = --- < ε
 h     h     h
```

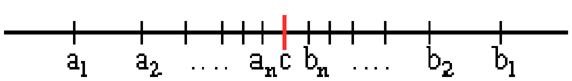
Para que se cumpla basta tomar un h > 2/ε

Propiedad

Todo PSMC tiene frontera

((a_n),(b_n)) es un PSMC => existe c / para todo n $a_n <= c <= b_n$, lim a_n = c- y lim b_n = c+.

lim a_n = c- significa que a_n se aproxima a c por la izquierda, y lim b_n = c+ significa que b_n se aproxima a c por la derecha.



El número e

A menudo un número a se describe por medio de una sucesión infinita a_n de aproximaciones; esto es, el valor a está dado por el valor a_n con cualquier grado de precisión deseado si el índice n se elige suficientemente grande.

Este es el caso del número e (e = 2,718281...), que puede definirse como el límite de la sucesión $a_n = (1 + 1/n)^n$ o de la sucesión $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$.

Probaremos que estas sucesiones forman un PSMC.

- a_n es creciente.

Demostración:

Utilizando la fórmula del binomio de Newton, podemos expresar $(1+1/n)^n$ como:

$$a_n = (1 + 1/n)^n = \sum_{i=0}^{n} C^{n}_{i}.1^{n-i}.(1/n)^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!n^i}$$

$$a_{n+1}=(1 + 1/(n+1))^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C^{n+1}_{i}.1^{n+1-i}.(1/(n+1))^i = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!(n+1)^i}$$

El desarrollo de a_{n+1} tiene un término más que el de a_n y cada término es positivo. Si probamos que cada sumando de a_n es menor o igual que el correspondiente de a_{n+1} probaremos que a_n es creciente.

$$\frac{n!}{(n-i)!i!n^i} \overset{?}{\leq} \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!i!(n+1)^i}$$

$$\frac{n(n-1)...(n-i+1)}{n.n....n} \overset{?}{\leq} \frac{(n+1)(n)...(n+1-i+1)}{(n+1)(n+1)...(n+1)} \quad \begin{matrix} \text{--> i factores} \\ \text{--> i factores} \end{matrix}$$

$(n-1) \quad (n-i+1) \quad ? \quad n \quad n+1-i+1$

```
-----...------- <= ---...-------
  n         n       n+1     n+1
```

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \overset{?}{\le} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{i-1}{n+1}\right)$$

Cada factor es de la forma 1 - p/n donde p es el mismo en ambos miembros.

$1 - p/n < 1 - p/(n+1)$

Entonces cada factor del primer miembro es menor que el correspondiente del segundo.

Por lo tanto, cada sumando del desarrollo de a_n es menor que el correspondiente de a_{n+1}.

=> a_n es creciente.

- b_n es decreciente.

$b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$

$b_{n+1} = (1 + 1/n+1)^{n+2} = (1 + 1/n+1)^{n+1}.(1 + 1/n+1)$

$$b_{n+1} \overset{?}{\le} b_n$$

$$(1 + 1/n+1)^{n+1}.(1 + 1/n+1) \overset{?}{\le} (1 + 1/n)^{n+1}$$

$$\frac{(1 + 1/n)^{n+1}}{(1 + 1/n+1)^{n+1}} \overset{?}{\ge} 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(\frac{n+1/n}{n+2/n+1}\right)^{n+1} \overset{?}{\ge} 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \overset{?}{\ge} 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \overset{?}{>=} 1+\frac{1}{n+1}$$

Desigualdad de Bernoulli: $(1+p)^q >= 1 + pq$ si $p>=-1$ y $q>1$

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} >= 1+\frac{n+1}{n^2+2n}$$

$$1+\frac{n+1}{n^2+2n} \overset{?}{>=} 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n^2+2n} \overset{?}{>=} \frac{1}{n+1}$$

$n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ se cumple para todo n.

- Para todo n $a_n < b_n$

$a_n = (1 + 1/n)^n$

$b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$

$$b_n - a_n \overset{?}{>} 0$$

$$(1+1/n)^{n+1} - (1+1/n)^n \overset{?}{>} 0$$

Sacamos factor común:

$(1+1/n)^n(1+1/n - 1) = 1/n(1+1/n)^n > 0$ para todo $n >= 1$.

- Dado $\varepsilon>0$ existe n natural / $b_n - a_n < \varepsilon$

$$b_n - a_n = 1/n(1+1/n)^n = (1/n)a_n \overset{(1)}{<} (1/n)b_n \overset{(2)}{<} (1/n)b_1 = (1/n)4 < \varepsilon$$

(1) $a_n < b_n$

(2) b_n decreciente

Basta elegir $n > 4/\varepsilon$

Por lo tanto, a_n y b_n forman un PSMC. El elemento frontera es el número e.

```
n=1:      2 < e < 4
n=2:   2,25 < e < 3,375
n=3:   2,37 < e < 3,16
n=4:   2,44 < e < 3,05
...
n=100: 2,70 < e < 2,73
```

6.4. Definición de un aserie infinita

DEFINICIÓN DE SERIE:

Del mismo modo en que se maneja la idea de la sucesión tenemos también la idea de serie; de tal manera que ambos conceptos están relacionados, como podrás observar en la siguiente definición..

Si $\{a_1\}$ es la sucesión $a_1, a_2, a_3, ...a_n,...$, entonces a la suma $a_2 + a_3 + ...+ a_n +...$ Se le llama serie.

Los elementos $a_1, a_2, a_3, ...$ se denominan los términos de la serie y una forma simplificada para representarla es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n +...$$

Esta representación conocida como notación tiene las siguientes propiedades:

1.- $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

2.- $\sum_{i=1}^{n} kx_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i$

3.- $\sum_{i=1}^{n} k = nk$

La primera afirma que la sumatoria de una suma de dos términos es igual a la suma de las sumatorias individuales. La segunda asevera que la constante de una sumatoria puede factorizarse, y la tercera afirma que la sumatoria de una constante es simplemente n veces la cte.

Retomando el concepto de serie, abordaremos la siguiente pregunta ¿Una serie infinita tiene por suma un número?.

Veamos el siguiente ejemplo:

Ej. 1.- El número racional $\frac{1}{3}$ = 0.333... Entonces podemos escribir:

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$$

Esta sumatoria, por la construcción que realizamos, se espera que sea igual a $\frac{1}{3}$.

Ahora la serie $10 + 100 + 1000 + 10000 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} 10^n$, intuitivamente no tiene por suma un número, es decir, la serie no converge. El concepto de convergencia de una serie,

se define en términos de la convergencia de una sucesión llamada de sumas parciales $\{S_n\}$ y que describimos a continuación:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

.
.
.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

.
.

.

Así, si la sucesión de sumas parciales converge, entonces la serie $\sum a_n$ converge y la suma de la serie (S) la representaremos por:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Analógicamente si $\{S_n\}$,diverge, la serie será divergente.

Analicemos un ejemplo de sumas parciales:

Ej. 2.- Calculemos la sucesión de sumas parciales de:

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{3}{10^k}$$

Solución:

$$S_1 = \frac{3}{10}$$

$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$$

$$S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

Como podrás observar cuando n es muy grande, S_n será una aproximación para $\frac{1}{3}$, es decir, la suma de la serie es: $^1/_3$.

Lo anterior lo podemos representar de la siguiente manera:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k}$ es CONVERGENTE.

Ej. 3.- Calcular las 4 primeras sumas parciales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)/n$$

$\{a_n\} = (2n + 1)/n$

$a_1 = \frac{2(1)+1}{1} = 3$

$a_2 = \frac{2(2)+1}{2} = \frac{5}{2}$

$a_3 = \frac{2(3)+1}{3} = \frac{7}{3}$

$a_4 = \frac{2(4)+1}{4} = \frac{9}{4}$

$S_1 = 3$

$S_2 = \frac{3}{1} + \frac{5}{2} = \frac{6+5}{2} = {}^{11}/_{2}$

$S_3 = \frac{11}{2} + \frac{7}{3} = \frac{33+14}{6} = 47/6$

$S_4 = \frac{47}{6} + \frac{9}{4} = \frac{188+54}{24} = {}^{242}/_{24} = {}^{121}/_{12}$

Ej. 4.- Calcula las 3 primeras sumas parciales para la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3\ ({}^{1}/_{5})^{n}$$

$a_0 = 3\ \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 3\ (1) = 3$

$a_1 = 3\ \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 3\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)$

$a_2 = 3\ \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{25}\right) = \left(\frac{3}{25}\right)$

$S_0 = 3$

$S_1 = 3 + \frac{3}{5} = \frac{15+3}{5} = \frac{18}{5}$

$S_2 = \frac{18}{5} + \frac{3}{25} = \frac{450+15}{125} = \frac{465}{125} = \frac{93}{25}$

Ej. 5.- Calcular las 4 primeras sumas parciales de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3\ /\ (2^{n-1})$$

$a_1 = \frac{3}{2^{1-1}} = \frac{3}{2^0} = \frac{3}{1} = 3$

$a_2 = \frac{3}{2^{2-1}} = \frac{3}{2^1} = \frac{3}{2}$

$a_3 = \frac{3}{2^{3-1}} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$

$a_4 = \frac{3}{2^{4-1}} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

$S_1 = 3$

$S_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{6+3}{2} = {}^{9}/_{2}$

$S_3 = {}^{9}/_{2} + \frac{3}{4} = \frac{36+6}{8} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4}$

$S_4 = \frac{21}{4} + \frac{3}{8} = \frac{168+12}{32} = \frac{180}{32} = \frac{45}{8}$

6.5. Serie aritmética y geométrica

Serie Aritmética

a. Definición

Los elementos de la sucesión son de la forma an=nk, donde k <> 0.

b. Ejemplos

i. Serie de Gauss: 1+2+3+…+n

ii. La suma de los primeros n cubos (como suma de serie aritmetica simple al cuadrado)

2. Serie Geometrica

a. Definicion

Los elementos de la sucesion son de la forma an=rn, donde r <> 0, 1.

b. Ejemplos

i. Ajedresista: 1+2+4+8+16+…+2^63

ii. Resolucion de forma general de la serie geometrica

iii. Aplicacion en la serie (1/2)0+(1/2)1+(1/2)2+…+(1/2)n

3. Convergencia

a. Introduccion

Sumamos todos los elementos de la sucesion (ya no una suma parcial). Suma de infinitos numeros a veces producen un numero finito → converge. Otras veces la suma de infinitos numeros es infinita → diverge.

La serie puede converger ya que los elementos de la sucesion a medida que aumenta su indice tienden a ser muy pequenos (no contribuyen a la suma)

.

b. Ejemplos

i. Resolución de ejemplos específicos con series geométricas |r|<1 (r=1/2, 1/4, 1/3)

ii. Resolución general de series para series geométrica de las zonas mas agraviadas del mendigo mundo por la rotación de la tierra cuando los días pasan y se vuelven oras perdidas por tanta perdición que el hombre ha creado.

6.6. Propiedades de las series

Primero , una serie es una sucesión de sumas parciales de una sucesión dada esta se representa por la letra sigma , donde i es el índice de las suma , n el limite superior y 0 el limite inferior.

$$\sum_{i=1}^{n} a$$

este se resuelve así

$$\sum_{i=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

por ejemplo tenemos:

1.

$$\sum_{i=1}^{8} 2$$

$$\sum_{i=1}^{8} 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2 = 16$$

2.

$$\sum_{i=1}^{5}(3+i)$$

$$\sum_{i=1}^{5}(3+i) = (3+1)+(3+2)+(3+3)+(3+4)+(3+5) = 4+5+6+7+8 = 25$$

PROPIEDADES DE LAS SERIES

La sumatoria tiene unas propiedades que se nombraran a continuación:

1. para n entero positivo y c constante, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} a = cn$$

2. Para k entero positivo $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ conjunto de números reales y c constante real, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} ca_k = c\sum_{i=1}^{n} a_k$$

3. Para k entero positivo $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ conjunto de números reales y c constante real, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} c_k + b_k = \sum_{i=1}^{n} b_k + \sum_{i=1}^{n} a_k$$

4. Para k entero positivo $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ conjunto de números reales y c constante real, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} c_k - b_k = \sum_{i=1}^{n} b_k - \sum_{i=1}^{n} a_k$$

Estas propiedades se deducen de la las leyes asociativa y conmutativa de la adición.

A continuación estudiaremos algunas sucesiones para las cuales es posible encontrar una expresión para sus términos.

SERIES TELESCOPICAS

Si a_n es una sucesión cuyo termino general es la diferencia entre $f(n+1)$ y f(n) o viceversa , la serie $\sum_{i=1}^{n} a_n$ asociada a esta sucesión se llama serie telescópica y tiene la forma :

$\sum_{i=1}^{n}[f(i+1) - f(i)]$ o $\sum_{i=1}^{n}[f(i) - f(i+1)]$

La suma de los n primeros términos de una serie telescópica se obtiene de una forma sencilla :

$$\sum_{i=1}^{n}[f(i+1)-f(i)] = [f(2)-f(1)]+[f(2)-f(1)]+[f(2)-f(1)]+\cdots+[f(i+1)-f(i)]$$

Los términos $f(2), f(3), ..., f(n),$ aparece dos veces en el desarrollo de la suma , uno con signo + y otro con signo -. por lo tanto , los únicos términos que quedan en la suma son $f(n+1)$ así

$$\sum_{i=1}^{n}[f(i+1) - f(i)] = f(n+1) - f(1)$$

Suma de los n primeros números naturales

Para hallar la suma de los primeros n números naturales se puede hacer de la siguiente forma :

$$S = \sum_{i=1}^{n} i$$

se escriben los términos de forma ascendente así:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = S$$

y se vuelve a escribir los términos pero en orden descendente:

$$n + (n-1) + cdot + 3 + 2 + 1 = S$$

A continuación se suman las dos igualdades:

$$1 + 2 + 3 + cdot + (n-1) + n = S$$

$$\begin{array}{c} +n + (n-1) + cdot + 3 + 2 + 1 = S \\ \hline (1+n) + [2 + (n-1)] + \cdots + [(n-1) + 2] + (n+1) = 2S \end{array}$$

Esto da como resultado

$$(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)(n+1)(n+1) = 2s$$

o sea $n(n+1) = 2S$

$$n(n+1)/2 = S$$

EN CONCLUSIÓN LA SUMA DE LOS PRIMEROS N NÚMEROS NATURALES ES

IGUAL A :

$$n(n+1)/2 = S$$

Suma de los cuadrados n primeros números naturales

Para la suma de los cuadrados n primeros número se utiliza la formula

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

6.7. Convergencia de series

SERIES NUMÉRICAS

Diremos que una serie Σa_n es convergente si *lim* $\Sigma a_{n\ =\ L\ (\text{finito})}$

n→∞

∞

Series Geométricas ($\Sigma K r^{n-1}$; K,r ∈ R)

n=1

La serie geométrica converge si |r|<1 y converge a

$$S_n = \frac{k}{1-r}$$

Si Σa_n y Σb_n son convergentes a A y B respectivamente entonces:

$\Sigma a_n \pm \Sigma b_n = A \pm B$

Si $\Sigma C^* a_n$; C=cte. $\Rightarrow$ $C^*\Sigma a_n = C^*A$

El carácter de convergencia de una serie no cambia si se le suprimen los n primeros términos.

Si dos series coinciden a partir de un término “n”, las dos tienen el mismo carácter.

Dada Σa_n convergente $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$$ es convergente para p>1.

CRITERIO DE LA INTEGRAL

Sea $y=f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en $[1, +\infty)$ y tal que $f(n)= a_n$ entonces:

$\int_1^{+\infty} f(x)dx$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tienen el mismo carácter.

CRITERIO DE COMPARACIÓN

Σa_n y Σb_n de términos positivos.

Si $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n$ $\Rightarrow$ si Σb_n converge se tendrá que Σa_n converge. Y si Σa_n diverge entonces Σb_n diverge.

COMPARACIÓN AL LÍMITE (para series de términos positivos)

Si $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L$ (finito, positivo) $a_n \approx L^* b_n$

Entonces si a_n converge b_n converge y viceversa.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$ si b_n converge a_n converge.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = +\infty$ si b_n diverge a_n diverge.

SERIES ALTERNAS ($\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ ó $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} a_n$)

Criterio Para Series Alternas.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y { a_n } es decreciente, entonces la serie es convergente.

CONVERGENCIA ABSOLUTA

Dada Σa_n de términos de cualquier signo.

$\Sigma|a_n|$ converge $\Rightarrow$ Σa_n es convergente y diremos que Σa_n converge absolutamente.

Si $\Sigma|a_n|$ diverge y Σa_n converge, diremos que a_n converge condicionalmente.

CRITERIO DE LA RAZÓN

Si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = L$; L<1 la serie converge absolutamente.

Si L=1 no se puede concluir. Si L>1 la serie diverge.

CRITERIO DE LA RAÍZ

Si $\lim (|a_n|)^{1/n}$=L; L<1 la serie converge absolutamente.

$n \to \infty$

Si L=1 no se puede concluir; si L>1 la serie diverge.

ESTIMACIÓN DEL RESTO

Criterio de la Integral.

Resto(Rn)=S-Sn=$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq Rn \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)dx$$

Para Series Alternas

$|Rn| \leq |a_{n+1}|$<error

6.8. Series de potencia

SERIES DE POTENCIA ($\sum_{n=0} C_n(x-a)^n$; serie de potencia centrada en a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x) \Longrightarrow |x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$$

Si una serie de potencia es convergente para $x=x_1 \Longrightarrow$ converge absolutamente para cualquier valor de x tal que $|x|<|x_1|$.

Si una serie de potencia es divergente para $x=x_2 \Longrightarrow$ también es divergente para cualquier valor de x tal que $|x|>|x_2|$.

SERIE DE TAYLOR

$C_n=f^n(a)/n!$ De lo que se obtiene:

$$f(x)= \sum_{n=0}^{\infty} f^n(a)(x-a)^n/n!$$; si a=0 entonces se habla de serie de Mc. Laurin.

6.9. Derivación de las series de potencia

Series de Potencias y funciones analíticas.

Series númericas en $\mathbb{C}$. Series de potencias: definición. Convergencia absoluta y uniforme: teoremas de Abel. Radio de convergencia: fórmula de Cauchy-Hadamard. Propiedades de las sucesiones y series de funciones uniformemente convergentes: Continuidad, derivación e integración de sucesiones y series de funciones y series de potencias. Funciones infinitamente derivables. Funciones desarrollables en serie de potencias. Series de Taylor. Las funciones elementales del Análisis: exponencial, trigonométricas, inversas, etc.

Principales definiciones y teoremas

Teorema 31 Primer Teorema de Abel para las series de potencias

Sea la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n,\, z \in \mathbb{C}$. Si la serie converge para cierto $w \in \mathbb{C}$, entonces la serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |w|$.

Observación: La región de convergencia de una serie de potencias siempre son círculos en el plano complejo.

Teorema 32 Fórmula de Cauchy-Hadamard

Dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n$, su radio de convergencia R viene dado por la fórmula $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Teorema 33 Sobre la convergencia uniforme de una serie de potencias

Sea la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n,\, z \in \mathbb{C}$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces la serie converge uniformemente en cualquier región del plano complejo contenida en $|z| \leq r < R$.

Teorema 34 Derivación e integración término a término de una serie de potencias real

Sea la serie de potencias $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n,\, x \in \mathbb{R}$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces

1. $f(x)$ es continua en $(-R, R)$
2. La serie se puede integrar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia, o sea, se cumple que

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

3. La serie se puede derivar término a término y la serie resultante tiene el mismo radio de convergencia, o sea, se cumple que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Teorema 35 Condición necesaria y suficiente de analiticidad Para que una función $f(x)$ infinitamente derivable en $x = a$ y todo su entorno sea analítica es necesario y suficiente que el resto de Taylor de la función $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, tienda a cero para todo x de dicho entorno.

6.10. Representación de una función en series de potencia

REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAL

Series de potencias geométricas.

Consideremos la función $= f(x) = 1/(1-x)$. Su forma recuerda mucho la suma de una serie geométrica.

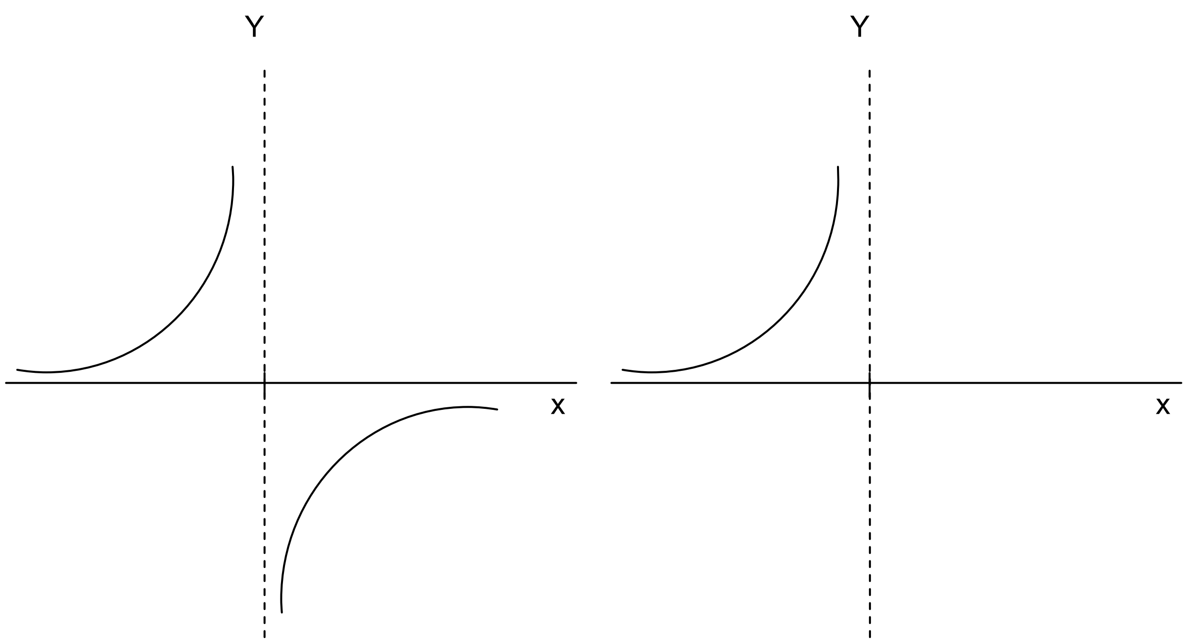
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n \frac{a}{1-r!}, |r| < 1$$

En otras palabras, si hacemos a = 1 y r =x, una representación en forma de serie de potencias para $1/(1-x)$. centrada en 0, es

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

= 1 + x + x2 +x3 + $|x|$<1

Naturalmente, la serie representa a la función sólo en el intervalo (-1,1), mientras que la función f está definida en todo x = 1. Si se quiere representar f en otro intervalo, hay que tomar una serie diferente. Por ejemplo, para obtener una serie centrada en -1, podemos hacer $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{2}{1-[(x+1)/2]} = \frac{a}{1-r}$



$f(x)=\frac{1}{1-x}, Dominio: todos \neq 1$ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Dominio el intervalo -1<x<1

6.11. Series de Taylor y serie de McLauri

SERIES DE MCLAURIN Y TAYLOR:

Sea la fórmula de McLaurin

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$$

siendo $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$ con 0 < z < x.

Es decir $f(x)=\sum_{0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x)$.

Llamaremos serie de MacLaurin asociada a una función f(x) a la expresión

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Esta serie describe exactamente a la función f(x) cuando coincida con la fórmula de McLaurin y para ello deberá cumplirse que:

1)Se trabaje en el intervalo de convergencia de la serie y

2) $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Ejemplo: Sea f(x) = ex

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^z x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Veremos si $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^z x^{n+1}}{(n+1)!} = e^z \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = e^z .0 = 0$$ que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Ejercicio:

Desarrollar f(x) = sen x en serie de potencias.

f(x) = senx ; f(0)=0

f'(x) = cosx ; f '(0)=1

f''(x)= -senx; f''(0)=0

f'''(x)= -cosx ; f'''(0)=-1

fIV(x)= senx ; fIV(0)=0

fV(x)= cosx ; fV(0) =1 y generalizando

$f^{(n+1)} = \begin{cases} sen\,x \\ cos\,x \end{cases}$ pero en todo caso siempre son en valor absoluto menores que 1, y finalmente

$R_{n+1} = \frac{[sen x]_z^{(n+1)} x^{n+1}}{(n+1)!}$ con lo que $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{[sen x]_z^{(n+1)} x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ y finalmente

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Estudiemos el intervalo de convergencia

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(2n-1)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} 4n^2 + 2n = \infty$$

y por lo tanto I = R

SERIE DE TAYLOR

$$C_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

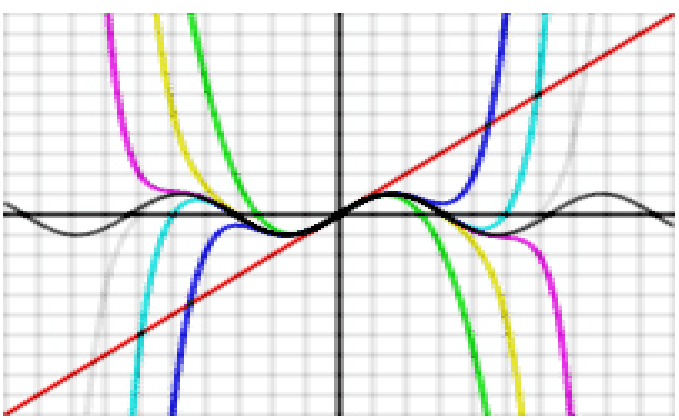
De lo que se obtiene:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} = e^x$$

Si a = 0 entonces se habla de serie de Mc. Laurin.

Serie de Taylor

En matemáticas, la serie de Taylor de formula función f infinitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto (a-r, a+r) se define con la siguiente suma:



sin(x) y aproximaciones de Taylor, con polinomios de grado 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aquí, n! es el factorial n y f (n)(a) indica la n-ésima derivada de f en el punto a.

Si esta serie converge para todo x perteneciente al intervalo (a-r, a+r) y la suma es igual a f(x), entonces la función f(x) se llama analítica. Para comprobar si la serie converge a f(x), se suele utilizar una estimación del resto del teorema de Taylor. Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de esa serie son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Si a = 0, a la serie se le llama serie de Maclaurin.

Esta representación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la función.
- Es posible demostrar que, si es viable la transformación de una función a una serie de Taylor, es la óptima aproximación posible.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor porque tienen alguna singularidad. En estos casos normalmente se puede conseguir un desarrollo en serie utilizando potencias negativas de x (véase Serie de Laurent. Por ejemplo f(x) = exp(−1/x²) se puede desarrollar como serie de Laurent.

DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

Se ha visto que una serie de potencias representa una función (su suma) analítica en $|z| < R$. A continuación se va a establecer un recíproco, fundamental en la teoría de funciones de variable compleja.

a) **Teorema**

Si f(z) es analítica en un círculo abierto $|z - z_0| < r_0$, admite en dicho dominio una representación en serie:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots + \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

que podemos escribir: $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n}$ **con** $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

Esta serie de potencias es el llamado ***desarrollo de f(z) en serie de Taylor en un entorno de*** z_0.

Si $z_0 = 0$ ***la serie de Taylor se conoce como serie de MacLaurin de f(z).***

Series de Taylor notables

A continuación se enumeran algunas series de Taylor de funciones importantes. Todos los desarrollos son también válidos para valores complejos de *x*.

Función exponencial y logaritmo natural:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{para } |x| < 1$$

Serie geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para } |x| < 1$$

Teorema del binomio:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C(\alpha, n) x^n \quad \text{para todo } |x| < 1 \quad \text{y cualquier } \alpha \text{ complejo}$$

Función trigonométrica:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo } x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para todo } x$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

Función hiperbólica:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo } x$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para todo } x$$

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \text{para } |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sinh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

$$\tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{para} \ |x| < 1$$

Función W de Lambert:

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \quad \text{para} \ |x| < \frac{1}{e}$$

Los números B_k que aparecen en los desarrollos de tan(x) y tanh(x) son Números de Bernoulli. Los valores C(α,n) del desarrollo del binomio son los coeficientes binomiales. Los E_k del desarrollo de sec(x) son Números de Euler.

Bibliografía

HAEUSSLER, ERNEST F. JR., *Matemáticas para Administración y Economía*, Décima Edición, Editorial Pearson, México, 2003

JAGDISH, C. ARYA, *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía,* Cuarta Edición, Editorial Pearson, México, 2002

HOFFMANN, LAWRENCE D., *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Sexta Edición, Editorial Mc Graw Hill, Bogotá, 1998

WEBER, JEAN E., *Matemáticas para Administración y Economía*, Cuarta Edición, Editorial Harla, México, 1984