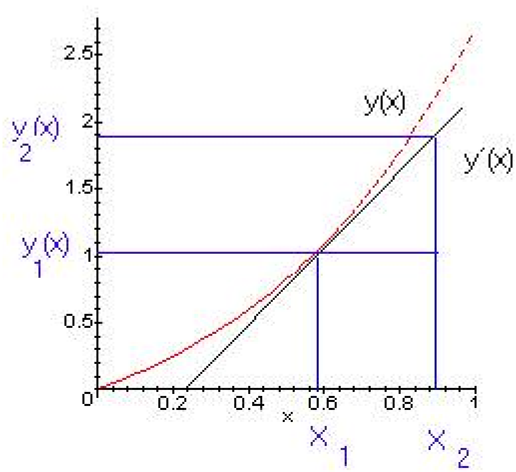
7. Diferenciales

7.1. Definición de diferencial

La forma en que hemos abordado el concepto de derivada, aunque existen varios conceptos, fue el encontrar la relación de la pendiente de la línea recta $y' = f'(x)$ que era tangente a la función. Para un punto en particular podemos llegar a la definición de la derivada $f'(x)$ y vimos que $f'(x_1)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en $x=x_1$.



En particular, para una función $\boldsymbol{y=f(x)}$ para un valor inicial $\boldsymbol{x_0}$ se tiene la pendiente de la línea recta tangente en las coordenadas $\boldsymbol{[x_0,f(x_0)]}$, dada por la $\boldsymbol{m=f'(x_0)}$. Cuya ecuación de la línea recta tangente queda entonces definida como:

$$y-f(x_0)=m(x-x_0)$$

Ante un cambio en la variable x podemos determinar el incremento x_0 por x_0+dx, donde el incremento dx es comúnmente un incremento pequeño, pero no cero, llamado diferencial en x.

Analizando el sistema función y línea recta tangente a dicha función entonces podemos analizar que existen dos puntos importantes a analizar, los de la función y los de la recta tangente:

(1) Para referirnos al cambio que ocurre en el valor de *f* designaremos la notación *dy*.
(2) Para referirnos al cambio que ocurre en el valor de *y* para la recta tangente utilizaremos la notación *dy*.

Mas precisa se encuentra la siguiente definición:

Definición de diferencial (informal)

Sea $y=f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contiene al número x.

Se define a la diferencial de x como dx, cualquier número real diferente de cero.

Se define a la diferencial de y como dy, dado por $dy=f'(x)\,dx$.

La derivada ** de una función es el limite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este tiende a cero.

** Llamada también coeficiente diferencial o función derivada.

Regla General para la Derivación

Primer paso.- Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $y + \Delta y$.

Segundo paso.- Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función).

Tercer paso.- Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente).

Cuarto paso.- Se calcula el limite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero. El limite así hallado es la derivada buscada.

Ejemplo .- Hallar la derivada de la función :

$y = 3x^2 + 5$

(Primer paso) $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$

$$= 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$$

(Segundo paso) $y + \Delta y = 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$

$$- y \quad = - 3x^2 \qquad -5$$

$$\Delta y = 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2$$

(Tercer paso) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

(Cuarto paso) En el segundo miembro hagamos Δx ---->0. y resulta :

$$\frac{dy}{dx} = 6x.$$

Ejercicios propuestos para ser desarrollados por medio de la regla general.

Resuelva	Resultado
$y = x^3 - 2x + 7$	$3x^2 - 2$
$y = c / x^2$	$- 2c / x^3$
q = 2 / x + 1	**$- 2 / (x + 1)^2$**
s = t + 4/t	**$- 4/t^2$**
y = 1/1-2x	**$2/(1 - 2x)^2$**

Importancia de la regla general.- La regla general para derivación es fundamental, puesto que se deduce directamente de la definición de derivada, y es muy importante familiarizarse con ella. Sin embargo, el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas es largo o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla general, a fin de facilitar la tarea, reglas especiales para derivar ciertas formas normales que se presentan con frecuencia.

(Es importante no solo aprender de memoria cada formula sino también poder enunciar en palabras la regla correspondiente).

<u>Formulas de Derivación</u>

I $\qquad \dfrac{dc}{dx} = 0$

La derivada de una constante es cero.

II $\dfrac{dx}{dx} = 1$

La derivada de una variable con respecto a si misma es la unidad.

III La derivada de la suma algebraica de un numero finito n de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

IV La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

7.2. Incrementos Y Diferenciales su interpretación geométrica

EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL