8. Integrales Indefinidas y métodos de integración

8.1. Definición de función primitiva

Integral definida

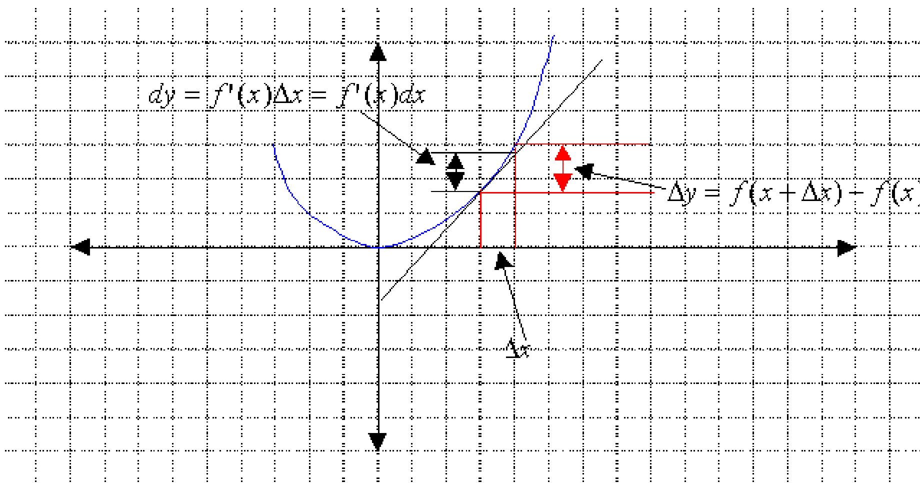
Funciones primitivas

Sean dos funciones ***f(x)*** y ***F(x)***, tales que : ***F'(x)=f(x)*** , es decir la derivada de ***F(x)***, es ***f(x)***. A cualquier función ***F(x)+k***, donde ***k*** es una constante, se la llama función primitiva de ***f(x)***. Por ejemplo si ***f(x)=x***, la función primitiva será cualquier función de la forma:

$$y = \frac{x^2}{2} + k$$

Diferencial de una función en un punto

Sea una función derivable : $y=f(x)$, e incrementemos el valor de x, en una cantidad a la que denominamos : Δx , se produce una variación en el valor de la función a la que denominamos : Δy . Lo expresamos gráficamente :



Se define diferencial de y, como:

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Cuando dx es suficientemente pequeño, prácticamente :

$$dy \approx \Delta y$$

Por definición (puesto que si y=x ; f'(x)=1) es :

$$dx = \Delta x$$

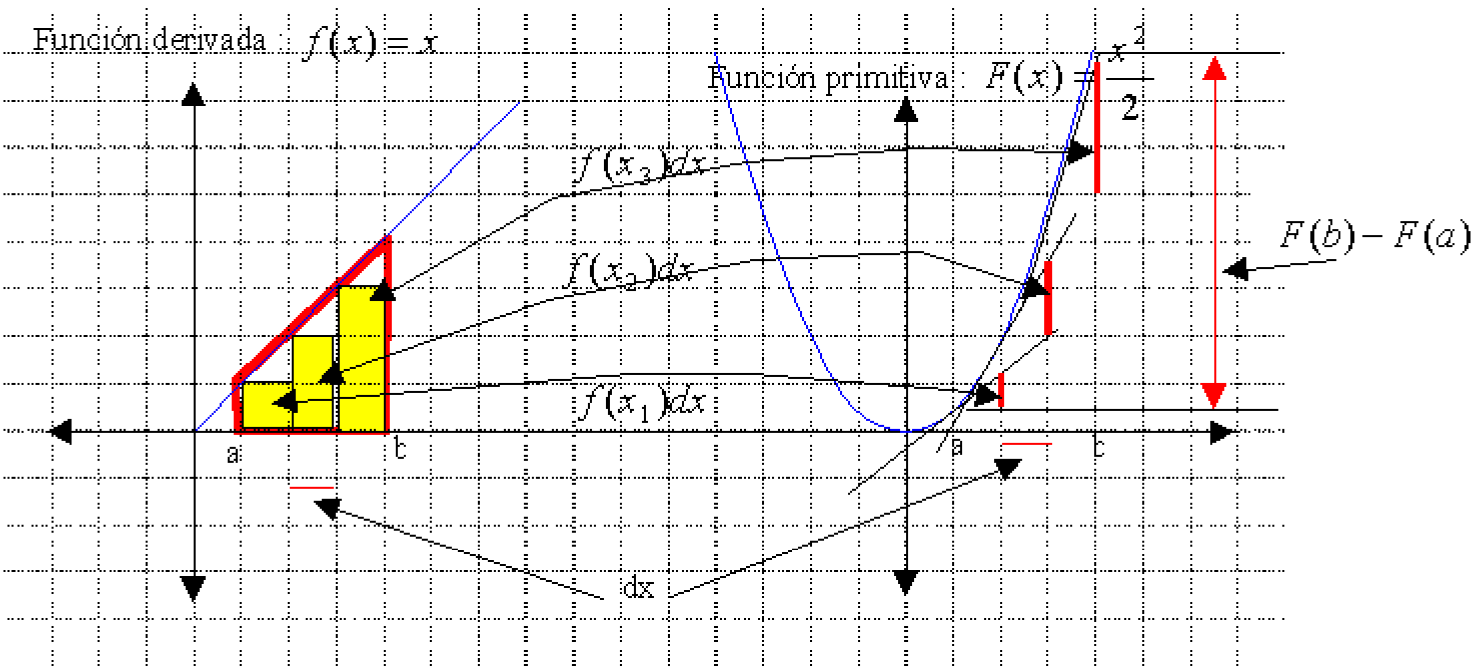
Relación entre una función y su primitiva

Para concretar vamos a tomar una función muy sencilla :

$$y = x$$

Cuya primitiva es :

$$y = \frac{x^2}{2}$$



La suma :

$$f(x_1)dx + f(x_2)dx + f(x_3)dx = \sum f(x_n)dx$$

En la parte izquierda de la gráfica (función derivada) representa un área y en la parte drecha (función primitiva) representa una longitud, numéricamente ambos valores son iguales.

Cuando ***dx*** tiende a cero, el límite de la suma, si existe, se llama **integral definida** de ***f(x)*** entre los puntos ***x=a*** y ***x=b***.

$$lim_{dx \to 0} \sum f(x_n)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Este límite, cuando existe, coincide con el área de la zona comprendida entre la gráfica de la función ***f(x)***, el eje ***XX*** y las rectas ***x=a*** y ***x=b***, como se puede apreciar en la parte izquierda de la figura o con la longitud del segmento dada por ***F(b)-F(a)*** como se aprecia en la parte derecha. Es decir :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Siendo ***F(x)***una función primitiva de ***f(x)***.

<u>Relación entre una función y su primitiva. Explicación dinámica</u>

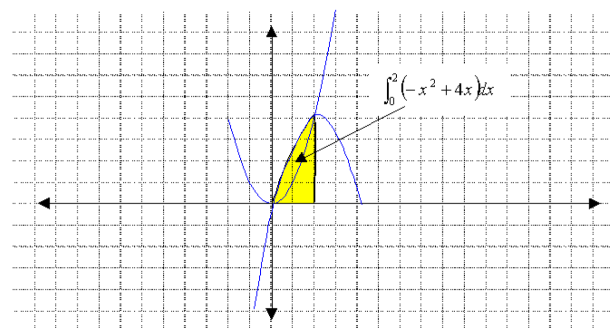
Esta relación reduce el cálculo de multitud de magnitudes : áreas, volúmenes, superficies, trabajo, energía, probabilidades y un largo etc, al cálculo de primitivas, cálculo muy elaborado y esquematizado en procedimientos y tablas.

la <u>tabla de primitivas</u> se indican los procedimientos y primitivas inmediatas que se utilizan habitualmente para el cálculo de otras primitivas más complejas.

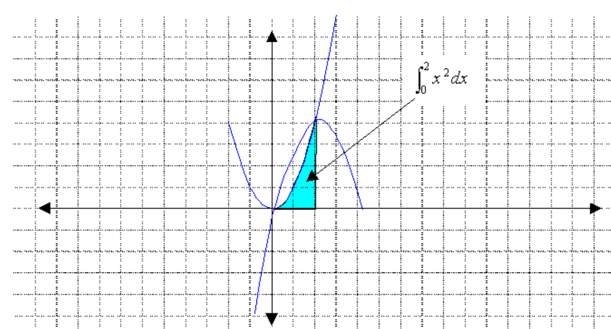
Dadas las funciones :

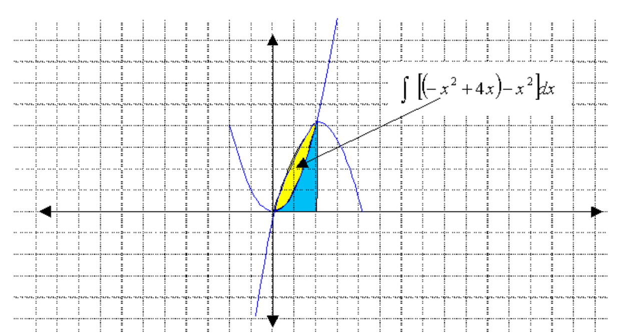
$$y = x^2 \quad e \quad y = -x^2 + 4x$$

I. Represéntalas gráficamente
II. Halla el área de la superficie que encierran



En la primera función el vértice es el punto : *(0,0)* , en la segunda función el vértice es : *(2,4)*





El área pedida es :

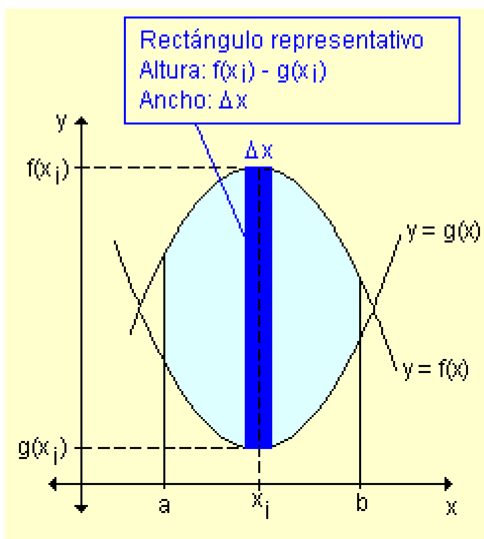
$$A = \int_0^2 [(-x^2+4x)-x^2]dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}\, unidades\ cuadradas$$

ÁREA DE REGIÓN ENTRE DOS CURVAS

región limitada por las gráficas de f y g y las rectas verticales x = a y x = b es $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

Demostración: Subdividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos cada uno de ancho Δ x y dibujamos un rectángulo representativo de alto $f(x_i) - g(x_i)$ donde x está en el i-ésimo intervalo.

Área del rectángulo i = $[f(x_i) - g(x_i)]\,\Delta x$



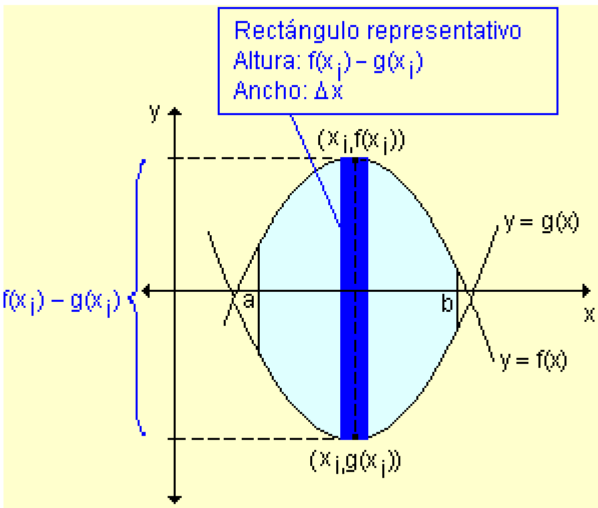
Sumando las áreas y considerando que el número de rectángulos tiende a infinito resulta que el área total es

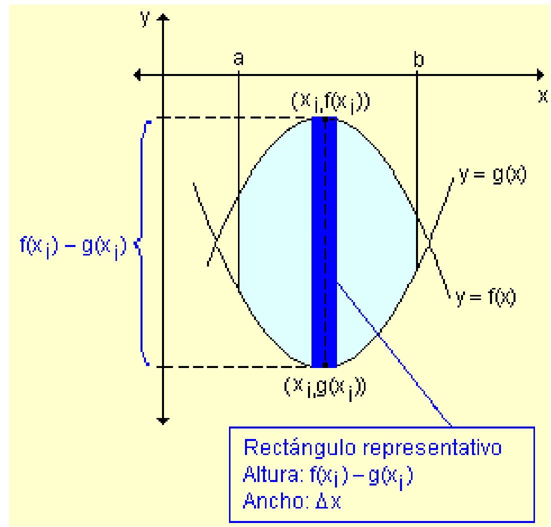
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x$$

Como f y g son continuas en el intervalo, la función diferencia f – g también los es y el límite existe.

Por lo tanto el área es área = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

E s importante darse cuenta que la validez de la fórmula del área depende sólo de que f y g sean continuas y de que g(x) ≤ f(x). Las gráficas de f y g pueden estar situadas de cualquier manera respecto del eje x.

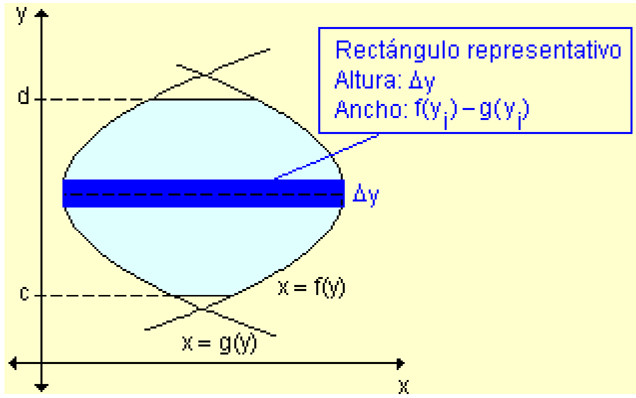




Integración respecto al eje y

Si algunas regiones están acotadas por curvas que son funciones de y o bien se pueden trabajar mejor considerando x como función de y los rectángulos representativos para la aproximación se consideran horizontales en lugar de verticales. De esta manera, si una región está limitada por las curvas de ecuaciones x = f(y), x = g(y), y = c y la recta horizontal y = d, donde f y g son continuas y f(y) ≥ g(y) para c ≤ y ≤ d, entonces su área resulta

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy.$$



8.2. Definición de Integral definida

Se llama integral indefinida de una función y=f(x) al conjunto de todas las primitivas de f. A la integral indefinida de la función f se le nota por la expresión

$$\int f(x)\, dx$$

y se lee integral de f diferencial de x. Al símbolo que inicia la expresión (y que tiene forma de s alargada) se le llama signo integral y lo que le sigue integrando.

8.3. Propiedades de la integral indefinida

Con cierta frecuencia, los alumnos de cálculo confunden el concepto de integral con "antiderivada", que en su justo rigor no es incorrecto, pero lamentablemente se especializan tanto, y seguramente en esto el profesor de cálculo es cómplice, en calcular una ristra de "antiderivadas" de funciones que olvidan el concepto mismo de derivada, y en definitiva olvidan su adecuado uso. Con mucha dosis de suerte, reconocen también en la integral una suerte de "cálculo de área bajo la curva" (entendiendo que esta curva es la representación gráfica de una función no negativa), cuestión que tampoco es incorrecta. Ahora bien, en este curso intentaremos dar el amplio concepto de integral, de tal manera que abarque como corolario su utilización como "antiderivada", fundamentalmente para la resolución de ecuaciones diferenciales, y su utilización geométrica como el cálculo del área bajo la curva, y en esta aplicación lo ligaremos con conceptos de la teoría de la probabilidad.

Creo que podemos dedicar más tiempo en el concepto mismo de la integral, sacrificando una buena dosis de tiempo en la enseñanza de las instrucciones para las decenas y centenas de fórmulas de integración que existen, toda vez que hoy por hoy ya no es absolutamente necesario, ni menos manejar "tablas de integración", pese a que en algunos programas de cálculo estas "tablas de integración" permanecen inmutables en el tiempo. Más bien aprovecharemos la tecnología que democratiza el cálculo de integración, puesto que se puede obtener en milésimas de segundo cualquier integral de cualquier función por muy compleja que sea en las decenas de buenos softwares matemáticos que existen.

El flujo de agua. Supongamos que en un recipiente, como lo indica la figura 1, está cayendo agua a través de un grifo. Supongamos además que el flujo de agua, o caudal, que sale del grifo es de $I\ m^3 / seg$. El agua que cae hacia el recipiente está formando un determinado volumen que varía con el tiempo. Pues bien, deseamos saber el volumen de agua que se ha formado desde el tiempo $t = a$ seg hasta el tiempo $t = b$ seg. De otra forma queremos saber el volumen de agua que se ha obtenido entre los tiempos a y b mientras el caudal de agua fluye constante en un valor I. La respuesta es naturalmente

$$\text{Volumen} = I\,(b - a)$$

esto es el caudal por el tiempo transcurrido.

Desde el punto de vista geométrico el valor $I\,(b - a)$ viene a ser el cálculo del área de un rectángulo de altura I con base $(b - a)$.

De otra forma consideremos la función constante $Q(t) = I$, y realicemos su gráfica en el plano cartesiano como lo indica la figura 2.

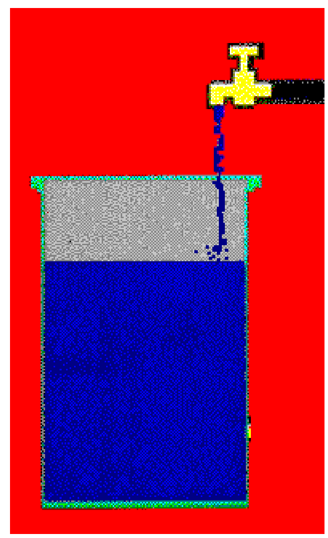


Figura 1

Podemos observar que el área del rectángulo de color corresponde numéricamente a la cantidad de volumen obtenido por el caudal I en el intervalo de tiempo $[a, b]$.

Vamos a suponer ahora que el caudal no es completamente constante, sino que tiene el siguiente comportamiento, durante el intervalo de tiempo $[a, b]$ el caudal vale $Q(t) = I_1$, y durante el intervalo de tiempo $(b, c]$ el caudal es de $Q(t) = I_2$. Donde I_1 e I_2 son flujos constantes, es decir a partir del tiempo $t = b$ hubo un cambio instantáneo de caudal.

Nos interesa calcular el volumen conseguido en el intervalo de tiempo $[a, c]$.

La situación gráfica se indica en la figura 3.

En este caso, el volumen obtenido es de

$$\text{Volumen} = I_1 (b - a) + I_2 (c - b)$$

y geométricamente coincide con la suma de las áreas de los dos rectángulos.

Supongamos ahora que la función $Q(t)$ no es constante en el intervalo $[a, b]$, como lo indica la Figura 4.

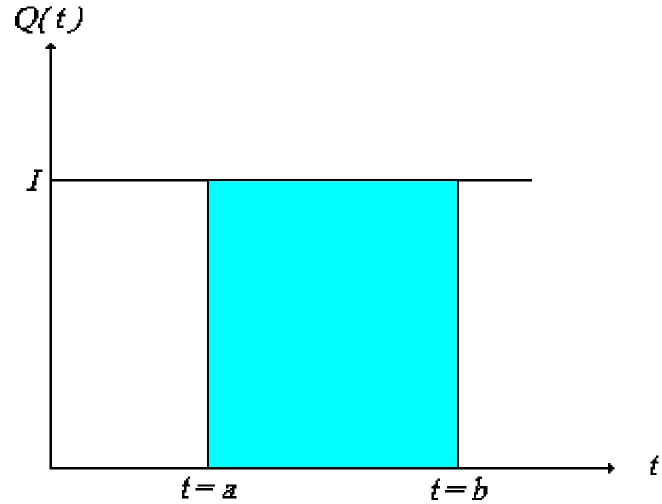


Figura 2

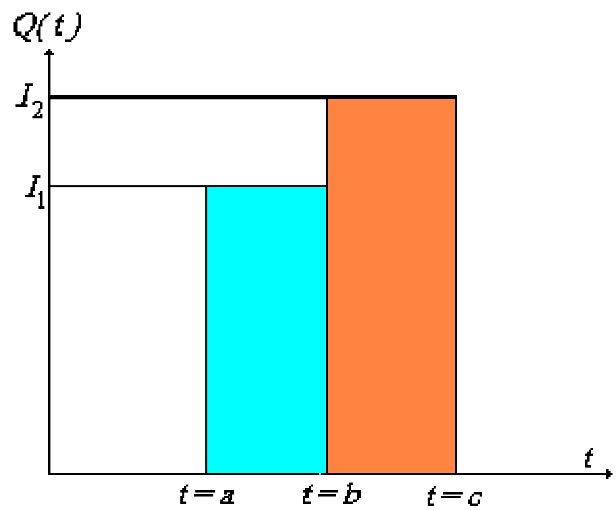


Figura 3

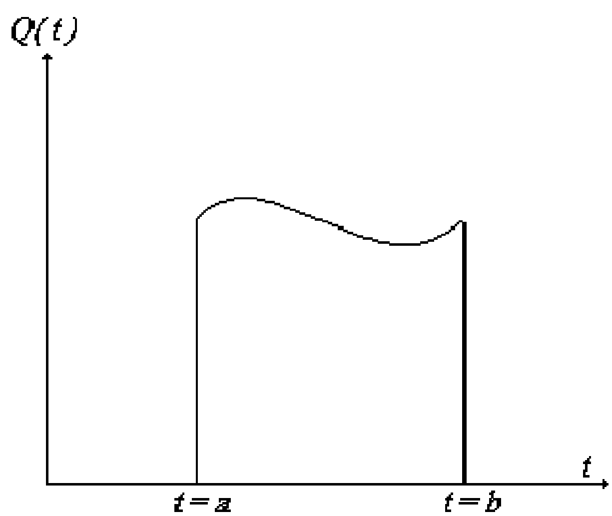


Figura 4

¿Cómo podríamos calcular el volumen de agua?

Vamos a formar pequeños rectángulos de la siguiente manera, la base $b - a$ la vamos a subdividir en intervalos de la misma longitud, de tal manera de formar n subintervalos de longitud $(b - a) / n$, estos subintervalos entonces formarán la siguiente partición

$$a = x_0 < t_1 < \ldots < t_{i-1} < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

de tal forma que

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} = (b - a) / n$$

y la altura del i-ésimo rectángulo será igual a $Q(t_{i-1})$, de tal forma que el área de cada subrectángulo es $Q(t_{i-1})\Delta t_i$.

La construcción de los n subrectángulos lo presentamos en la Figura 5, y en la Figura 6 se observa el i-ésimo subrectángulo amplificado de base $t_i - t_{i-1}$ y de altura $Q(t_{i-1})$.

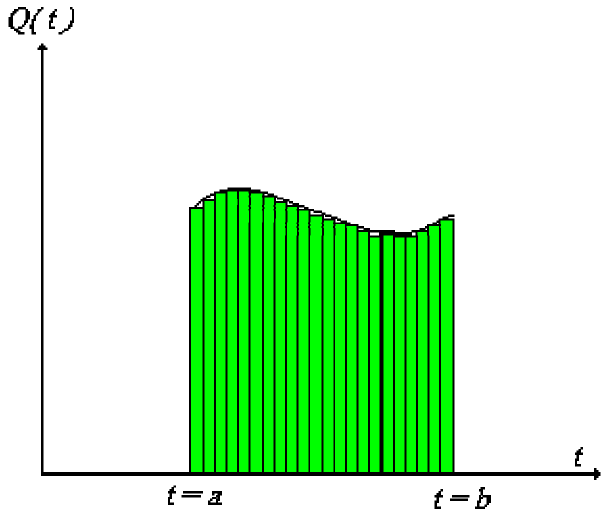


Figura 5

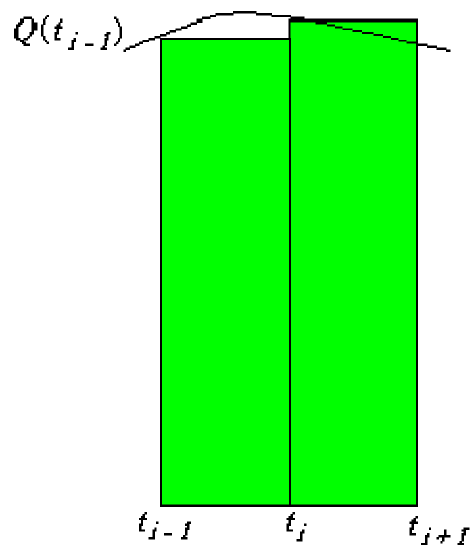


Figura 6

De tal forma que el volumen de agua aproximada que se formará durante el intervalo de tiempo $[a, b]$ es la suma de las áreas de todos estos subrectángulos, esto es

$$\sum_{i=1}^{n} Q(t_{i-1})\,\Delta t_i$$

la elección de los n subrectángulos fue en cierto modo arbitraria, mientas más fina sea la partición, esto es mientras más subrectángulos formemos mejor será la aproximación del cálculo del área bajo la curva. Entonces se define la integral de la función $Q(t)$ entre a y b como

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} Q(t_{i-1})\,\Delta t_i = \int_a^b Q(t)\,dt$$

y que para este ejemplo particular corresponde al volumen de agua formado por el caudal $Q(t)$ en el intervalo de tiempo $[a, b]$, y que geométricamente corresponde al área bajo la curva de $Q(t)$ en el intervalo $[a, b]$.

Generalizando lo que vimos en la anterior sección, tenemos que si $f(x)$ es una **función no negativa**, definida en un intervalo [a, b], entonces definiendo una partición en el intervalo [a, b] de la forma

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

de tal modo que cuando

$$n \to \infty \Rightarrow |x_i - x_{i-1}| \to 0$$

y si elegimos arbitrariamente

$$f(\xi_i),\ con\ \ x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

y formamos la suma

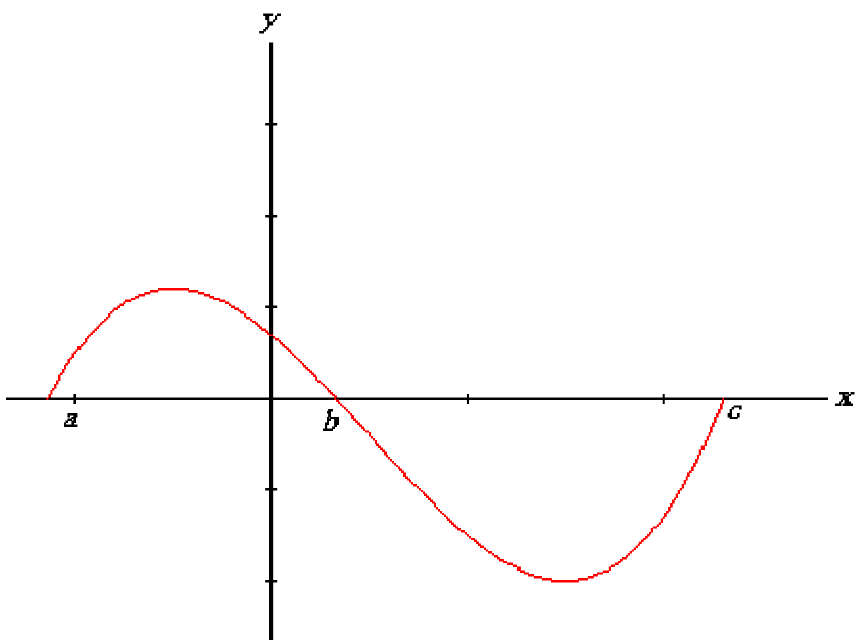
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{(b-a)}{n}$$

se tiene que el área bajo la curva de $f(x)$ entre los valores a y b está dada por

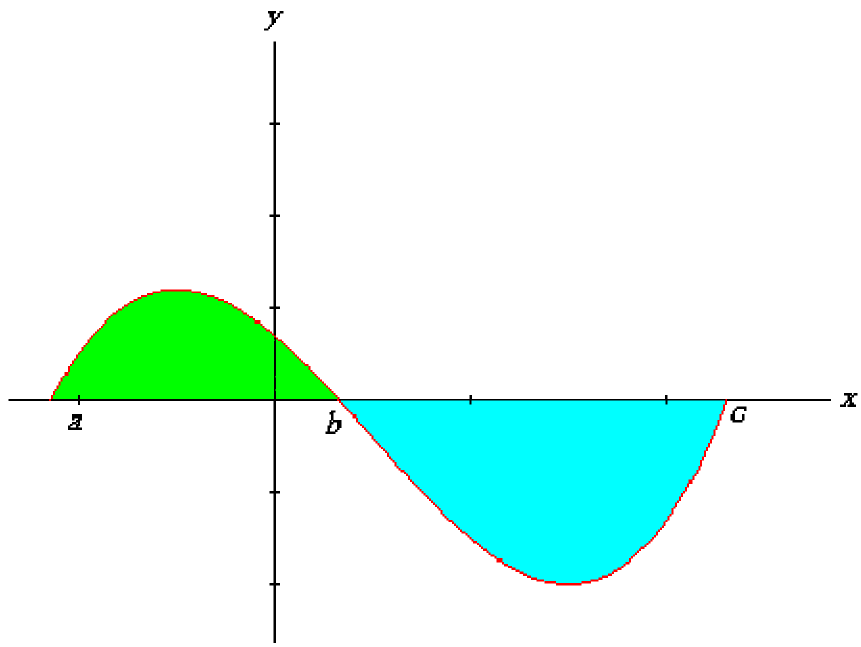
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Observe que el valor de la derecha de esta última ecuación representa un número, y que se denota por "la integral de $f(x)$ entre los valores a y b".

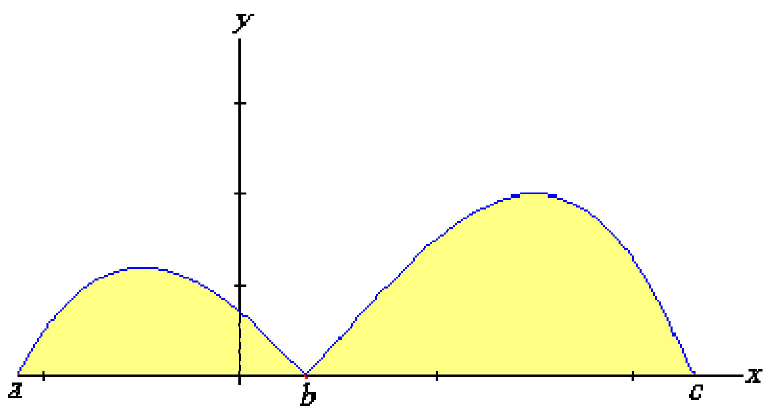
Sin embargo, en la construcción de esta integral se puede relajar la exigencia de que la función $f(x)$ debe ser no negativa y realizar los cálculos sobre la partición en el intervalo de definición de la función. Por ejemplo $f(x)$ puede ser una función con la siguiente gráfica



donde se entiende que la integral en el dominio [b, c] tendrá un valor negativo, pero su valor absoluto (sin el signo menos) es geométricamente el área de la región determinada por la gráfica de $f(x)$ y el segmento [b, c]. De otra forma, la integral de la función $f(x)$ en el intervalo [a, c] corresponde numéricamente, en este ejemplo, a la diferencia entre la región verde menos la región celeste que se muestra en la siguiente gráfica



Que es un resultado absolutamente diferente si integramos la función valor absoluto de *f*(*x*), cuya gráfica viene a ser de la forma



y el valor de las dos áreas amarillas corresponde a la integral

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

Las propiedades más importantes sobre integrales

No resulta para nada complicado demostrar las siguientes propiedades de las integrales.

1. $\int_a^b C\,f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$

2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \quad para\ \ a < b$

6. $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \quad si\ \ f(x) \leq g(x)\ \ en\ \ a \leq x \leq b$

7. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

8.4. Calculo de integrales indefinidas

8.4.1. Directas

De la derivación de funciones elementales se deducen sus correspondientes integrales llamadas inmediatas. Es necesario aprender estos resultados si se pretende ser ágil en el cálculo de otras integrales menos sencillas.

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ y

$\int dx = x + C$

2. $\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C$, si $m \neq -1$

3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ siendo $a > 0$ y $a \neq 1$

5. $\int e^x\,dx = e^x + C$

6. $\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\,dx = sen\,x + C$

8. $\int tg\,x\,dx = -\int \frac{-\,sen\,x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int cotg\,x\,dx = \int \frac{\cos x}{sen\,x} = \ln|sen\,x| + C$

10. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = tg\,x + C$

11. $\int \frac{1}{sen^2\,x}\,dx = \int cosec^2\,x\,dx = -\,cotg\,x + C$

12. $\int \sec x \cdot tg\,x\,dx = \sec x + C$

$$\textbf{13.} \int cosec\ x \cdot cotg\ x\ dx = -\ cosec\ x + C$$

$$\textbf{14.} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ sen\ x + C = -\ arc\cos x + C$$

$$\textbf{15.} \int \frac{dx}{1+x^2}\ arc\ tg\ x + C = -\ arc\ cotg\ x + C$$

$$\textbf{16.} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc\ sec\ x + C = -\ arc\ cosec\ x + C$$

$$\textbf{17.} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\textbf{18.} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$\textbf{19.} \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\textbf{20.} \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

8.4.2. Por cambios variables

Integración por cambio de variable (o sustitución)

Este método consiste en transformar la integral dada en otra más sencilla mediante un cambio de la variable independiente. Aunque algunos casos tienen un método preciso, es la práctica, en general, la que proporciona la elección del cambio de variable más conveniente.

Se comenzará por estudiar aquellas integrales que son casi inmediatas.

- $\int u'(x) \cdot u(x)^m \, dx = \dfrac{u(x)^{m+1}}{m+1} + C$ si $m \neq -1$

Se sabe que la derivada de $\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ es x^m.

Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$, $x \to u(x) \to u(x)^m$, la regla de la cadena

asegura que la derivada de $\dfrac{u(x)^{m+1}}{m+1}$ es $u(x)^m \cdot u'(x)$.

Por tanto,

$$\int u' \cdot u^m \, dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \text{ si } m \neq -1$$

Como se ve, se ha escrito *u* en lugar de *u(x)* por simplificar la notación.

① Calcular $\int 5x^2 \cdot e^{x^3} \, dx$

Resolución:

- En primer lugar se saca de la integral la constante 5.

- Del cambio $u = x^3$ se tiene que $u' = 3x^2$

- Se multiplica y se divide por 3:

$$\int 5x^2 \cdot e^{x^3} \, dx = 5\int x^2 \cdot e^{x^3} \, dx = \frac{5}{3}\int 3x^2 \cdot e^{x^3} \, dx =$$

$$= \frac{5}{3}\int u' \cdot e^u \, dx = \frac{5}{3}e^u + C = \frac{5}{3}e^{x^3} + C$$

② Hallar $\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x \, dx$

Resolución:

- Se hace el cambio $u = \cos x;\ u' = -\operatorname{sen} x$.

- Se multiplica y se divide por - 1.

$$\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x \, dx = -\int e^{\cos x} \cdot (-\operatorname{sen} x) \, dx = -e^{\cos x} + C$$

③ Calcular $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Resolución:

- Si $u = \sqrt{x},\ u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Se multiplica y se divide por 2:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

- $\int u'(x) \cdot a^{u(x)} \, dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$

Haciendo un estudio análogo a los anteriores, se deduce que

$$\int u' \cdot a^u \, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

- $\int u'(x) \operatorname{sen} u(x) \, dx = -\cos u(x) + C$ y $\int u'(x) \cos u(x) \, dx = \operatorname{sen} u(x) + C$

La derivada de - *cos x* es *sen x*. Por la regla de la cadena, la derivada de - *cosu* es
u' · sen u. Análogamente, la derivada de *sen u* es *u' · cos u*.

Así se tienen

$$\int u' \cdot sen\, u\, dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cdot \cos u\, dx = sen\, u + C$$

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular $\int 5x^2 \cdot sen x^3\, dx$

Resolución:

● No se debe confundir la expresión $sen\ x^3$ con $sen^3 x$.

La primera de ellas significa *sen (x · x · x)*, mientras que la segunda es *(sen x)· (sen x) · (sen x)*.

● Se hace el cambio $u = x^3$; $u' = 3x^2$

● Se saca el factor 5 de la integral.

● Se multiplica y se divide por 3.

$$\int 5x^2 \cdot sen x^3\, dx = 5\int x^2 \cdot sen x^3\, dx = \frac{5}{3}\int 3x^3 \cdot sen\, x^3\, dx = -\frac{5}{3}\cos x^3 + C$$

● Como en casos anteriores es sencillo demostrar que:

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \int u' \cdot \sec^2 u\, dx = tg\ u + C$$

$$\int \frac{u'}{sen^2 u} dx = \int u' \cdot cosec^2 u\, dx = -cotg\ u + C$$

8.4.3. Por partes

La técnica de la integración por parte es bastante útil para encontrar integrales complejas llevándolas a integrales más sencillas. Esta técnica se basa en la derivada de un producto. En efecto, debemos recordar que

$$\frac{d}{dx}u(x)v(x) = u(x)\frac{d\,v(x)}{dx} + \frac{d\,u(x)}{dx}v(x) \qquad (1)$$

Ahora bien, si integramos la igualdad en (1), respecto de x nos queda

$$\int\left[\frac{d}{dx}u(x)v(x)\right]dx = u(x)v(x) = \int\left[u(x)\frac{d\,v(x)}{dx}\right]dx + \int\left[\frac{d\,u(x)}{dx}v(x)\right]dx$$

De manera que obtenemos la igualdad

$$u(x)v(x) = \int u(x)\frac{d\,v(x)}{dx}\,dx + \int v(x)\frac{d\,u(x)}{dx}dx \qquad (2)$$

Supongamos ahora que se quiere integrar una expresión de la forma

$$\int u(x)\frac{d\,v(x)}{dx}\,dx$$

donde es relativamente sencillo encontrar la "anti-derivada" $v(x)$. Si es así, observemos que de la expresión (2) obtenemos

$$\int u(x)\frac{d\,v(x)}{dx}\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)\frac{d\,u(x)}{dx}\,dx \qquad (3)$$

donde se supone que la integral de la derecha de la ecuación (3) es sencilla de calcular, o su resultado se obtiene mediante un procedimiento establecido. A menudo, con cierto abuso de notación, la expresión (3) con el ánimo de memorizar la fórmula, se escribe como

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Veamos un ejemplo. Queremos calcular la integral

$$\int xe^{2x}\,dx$$

En este caso, la derivada de x es 1 y una primitiva para e^{2x} es fácil de calcular, de modo que hacemos

$$u(x) = x \Rightarrow \frac{d\,u(x)}{dx} = 1$$

$$\frac{d\,v(x)}{dx} = e^{2x} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Entonces aplicando la fórmula (3) obtenemos

$$\int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

8.4.4. Trigonométricas

En este apartado vamos a estudiar las integrales de la forma $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$ las cuales se convierten en integrales racionales mediante la sustitución trigonométrica $t = \tan\frac{x}{2}$,

$$\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \tan\frac{x}{2} & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt,$$

que es un integral de una función racional.

Ejemplo. Calcular la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left\{ \begin{array}{ll} t = \tan\frac{x}{2} & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Existen varios tipos de integrales trigonométricas que se pueden *racionalizar* con cambios más sencillos. Ellas son las siguientes:

1. $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde $f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \cos x$
2. $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde $f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \operatorname{sen} x$

3. $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx$, donde $f(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$, cambio $t = \tan x$

Ejemplos.

a) Calcular la integral $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$. Esta integral es del tipo 1. Luego,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left\{ \begin{array}{ll} t = \cos x & dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \operatorname{sen} x = \sqrt{1-t^2} & \cos x = t \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

que coincide con el resultado obtenido al utilizar la sustitución $t = \tan \frac{x}{2}$

b) Calcular la integral $\int \cos^3 x \; dx$. Esta integral es del tipo 2. Luego,

$$\int \cos^3 x \; dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \operatorname{sen} x & dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-t^2} & \operatorname{sen} x = t \end{array} \right\} = \int 1 - t^2 \, dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$$

c) Calcular la integral $\int \tan^3 x \; dx$. Esta integral es del tipo 3. Luego,

$$\int \tan^3 x \; dx = \left\{ \begin{array}{ll} t = \tan x & dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} & \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{1+t^2}\, dt = \int \left[t - \frac{t}{1+t^2} \right] dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{\tan^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 x) + C = \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Integrales irracionales. En este apartado vamos a estudiar las integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx$, $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$ y $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$.

Las integrales $\int f(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})\, dx$ **y** $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$**.**

Estas integrales irracionales se convierten en integrales trigonométricas mediante los cambios:

1. $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, cambio $x = a\text{sen}\, t$
2. $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$, cambio $x = \dfrac{a}{\text{sen}\, t}$
3. $\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\, dx$, cambio $x = a \tan t$

8.4.5. Por sustitución trigonométrica

8.5. En ocasiones de manera directa no se pueden realizar las integrales, en otras ocasiones parece ser que pudiéramos integrar de manera inmediata debido a que a primera inspección encontramos similitud con las formulas que tenemos en las tablas de formulas. Inclusive existen algunas de las mismas formulas que podemos deducir mediante algunas técnicas, como la que en esta ocasión nos ocupa, veamos el siguiente ejemplo: Deduce la siguiente formula:

8.6. $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 + a^2}\right) + c$$

8.7. Pensemos en una sustitución que podamos realizar en la integral de tal forma que nos permita una integración inmediata. Recordemos que:

8.8. $$1 + tg^2 z = \sec^2 z$$

8.9. observemos que sucede si hacemos un cambio de variable que nos conduzca a el uso de esta sustitución, concretamente, sustituyamos

$$v = a\ tg z$$

8.10. $$dv = a\ d\,tg z = a \sec^2 z\ dz$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{(a\,tg\,z)^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{a^2(tg^2 z+1)}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{a^2}\sqrt{(tg^2 z+1)}} =$$

pero $tg^2 z + 1 = \sec^2 z$

$$\int \frac{a\sec^2 z\ dz}{\sqrt{(a\,tg\,z)^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 z\ dz}{a\sqrt{\sec^2 z}} = \int \frac{\sec^2 z\ dz}{\sec z} = \int \sec z\ dz = \ln(\sec z + tg\,z) + c$$

8.11. $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln(\sec z + tg\,z) + c$$

8.12. Recordemos que a $v = a\,tg\,z$ lo también queda expresado como:

8.13. $$tg\,z = \frac{v}{a} \quad y \qquad \sec z = \sqrt{1+tg^2 z}$$

8.14. de donde

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln(\sec z + tg\,z) + c = \ln\left(\sqrt{1+tg^2 z} + tg\,z\right) + c =$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{v}{a}\right)^2} + \frac{v}{a}\right) + c = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+v^2}}{a} + \frac{v}{a}\right) + c =$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+v^2}+v}{a}\right) + c =$$

utilizando las propiedades de los logaritmos

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+v^2}+v}{a}\right) + c = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) - \ln a + c$$

pero como lna es también una constante entonces :

8.15. $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) + (c + \ln a) = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) + c$$

8.16. donde la nueva c se ha juntado con la constante generada con el logaritmo:

8.17. $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{a^2+v^2}+v\right) + c$$

8.18. al igual que esta integral se pueden encontrar de la misma forma algunas otras, vale la pena seguir la siguiente recomendación:

Sustituir	*Cuando aparece*	*Para obtener*
$v = a\ \operatorname{sen} z$	$\sqrt{a^2 - v^2}$	$a \cos z$
$v = a\ tg z$	$\sqrt{a^2 + v^2}$	$a \sec z$
$v = a\ \sec z$	$\sqrt{v^2 - a^2}$	$a\ tg z$

8.19.

8.20. hemos de aclarar que esas sustituciones surgen al igual que la sustitución del ejercicio anterior, de observación y comparación de las propiedades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$tg^2 z + 1 = \sec^2 z$$

8.21. $$1 + ctg^2 z = \csc^2 z$$

8.22. Calcular la siguiente integral y comprobar

8.23. $$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x} dx$$

8.24. Solución:

8.25. como podemos comprobar la integración no se puede realizar de manera inmediata. Antes de realizar alguna sustitución valdría la pena hacer alguna factorización en el radical

8.26. $$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{4\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)}}{x} dx = 2\int \frac{\sqrt{x^2 - \frac{9}{4}}}{x} dx$$

8.27. realizando la sustitución

8.28. $$x = \frac{3}{2}\sec z \quad ya\ que \quad a^2 = \frac{9}{4} \quad y \quad dx = \frac{3}{2}\sec z\ tg z\ dz$$

8.29. por lo tanto:

$$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 9}}{x} dx = 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sec z\right)^2 - \frac{9}{4}}}{\frac{3}{2}\sec z}\left(\frac{3}{2}\sec z\, tg z\ dz\right) = 2\int \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\sqrt{\sec^2 z - 1}\ \ tg z\ dz = 3\int tgz\ \ tg$$

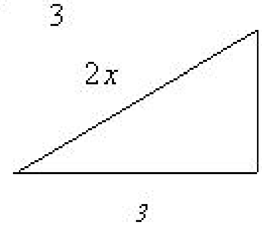
$$= 3\int tg^2 z\ dz = 3\int \left(1 - \sec^2 z\right)dz = 3\left(\int dz - \int \sec^2 z\, dz\right) =$$

8.30. $$= 3\left(z - tgz\right) + c$$

8.31. como $x = \frac{3}{2}\sec z$ entonces:

8.32. $\sec z = \frac{2x}{3}$ del triangulo rectángulo siguiente identificamos:

$$\sec z = \frac{2x}{3}$$



8.33.

8.34. la hipotenusa es $2x$ y el cateto adyacente es 3 por lo tanto el cateto opuesto es igual a:

$$cateto \ \ opuesto = \sqrt{4x^2 - 9}$$

8.35.

8.36. por lo que

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x} dx = 3\left(arc\sec\frac{2x}{3} - \frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right) + c$$

8.37.

8.38. Comprobación del resultado.

$$\frac{d}{dx}\left(3\left(arc\sec\frac{2x}{3} - \frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right) + c\right) = 3\left(\frac{d}{dx} arc\sec\frac{2x}{3} - \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\frac{d}{dx}\frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}\sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)^2 - 1}} - \frac{1}{6}\frac{8x}{\sqrt{4x^2-9}}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2x}{3}\sqrt{\left(\frac{4x}{9}\right) - 1}} - \frac{4x}{3\sqrt{4x^2-9}}\right)$$

8.39.

8.40. simplificando tenemos:

$$3\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2x}{3}\sqrt{\left(\frac{4x}{9}\right)-1}}-\frac{4x}{3\sqrt{4x^2-9}}\right)=3\left(\frac{3}{x\sqrt{4x^2-9}}-\frac{4x}{3\sqrt{4x^2-9}}\right)=$$

$$=3\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\right)\left(\frac{3}{x}-\frac{4x}{3}\right)=$$

$$=3\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\right)\left(\frac{9-4x^2}{3x}\right)=$$

$$=-\left(\frac{1}{\sqrt{4x^2-9}}\right)\left(\frac{4x^2-9}{x}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\right)$$

8.41.

$$a)\ \int\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$b)\ \int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$c)\ \int\frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}dx$$

$$d)\ \int\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$$

8.42. Se sugieren los siguientes ejercicios:

8.43. **Sustitución trigonométrica**

8.44.

8.45. **A** menudo es posible hallar la antiderivada de una función cuando el integrando presenta expresiones de la forma:

8.46. $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{a^2+u^2}$, ó bien $\sqrt{u^2-a^2}$; donde $a>0$ y u es una función de x.

8.47. Se elimina el radical haciendo la sustitución trigonométrica pertinente; el resultado es un integrando que contiene funciones trigonométricas cuya integración nos es familiar. En la siguiente tabla se muestra cuál debe ser la sustitución:

Expresión en el integrando	Sustitución trigonométrica
$\sqrt{a^2-u^2}$	$x=a\,\text{sen}\,\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$x=a\tan\theta$