9. Integral Definida

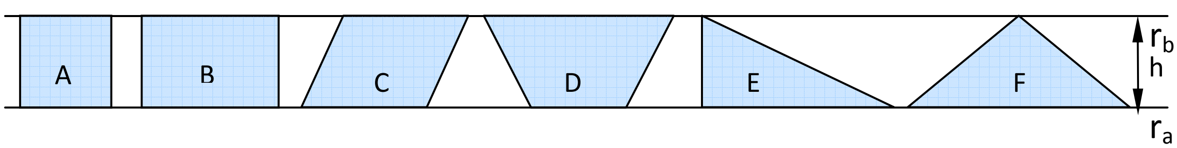
9.1. Definición de Integral definida

Este artículo permite captar rápidamente la interpretación geométrica de la Integral Definida: área bajo la curva entre dos puntos dados. Se utiliza un procedimiento diferente al de aproximaciones sucesivas de rectángulos, usualmente empleado; contiene al de integración por medio de trapecios y es consecuencia de un enfoque propuesto para el cálculo de áreas de polígonos.

Para su comprensión es conveniente la consulta del artículo: Area de los Polígonos-enfoque para el cálculo, publicado en monografías.com, por cuanto se utiliza la fórmula general de cálculo propuesta en el mencionado trabajo. No obstante, en forma rápida, introduciremos la fórmula para el caso de figuras de tres y cuatro lados.

2. Fórmula para el cálculo de áreas de figuras de tres o cuatro lados:

Si tenemos un conjunto de figuras de tres o cuatro lados con la misma altura (h), entonces pueden ser ubicadas entre dos rectas (r_a y r_b) paralelas entre si, como se observa en la ilustración:



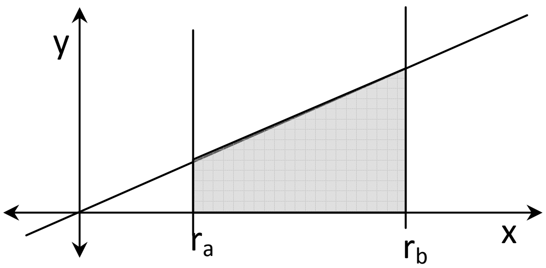
Para calcular el área total, basta sumar las longitudes de los lados que se posan sobre las rectas, multiplicar por la altura común y dividir entre dos (2).

En particular, el área de cualquiera de estas figuras se puede calcular mediante el procedimiento descrito. Nótese que los triángulos tienen un lado de longitud nula sobre una de las rectas.

Denotando con $S(r_ar_b)$ a la sumatoria de los lados que se posan sobre las rectas paralelas y $d(r_ar_b)$ a la distancia entre éstas últimas, la fórmula puede expresarse de la siguiente manera: $A=½ S(r_ar_b) d(r_ar_b)$. Los lados en las rectas definirán en cada una ellas un segmento que denominaremos: segmento delimitador en el haz paralelo de rectas r_a y r_b, respecto a la figura dada.

3. Visión preliminar: área bajo la recta.

Sea el gráfico de la función f(x) = mx+c



Tomemos sobre el eje de las abscisas dos puntos a y b tales que el signo de f(x) sea el mismo para toda a<x<b. A partir de tales puntos, levantemos las rectas r_a y r_b, perpendiculares al eje x, como se muestra en la figura.

La gráfica de la función, las rectas r_a y r_b y el eje x, definen un trapecio de área: A=½ $S(r_a r_b)$ $d(r_a r_b)$; que denominaremos: área bajo la función f(x) = mx+c definida por los puntos a y b.

La longitud del delimitador en r_a es f(a) = ma+c; el delimitador en r_b tiene longitud f(b) = mb+c y la distancia entre r_a y r_b) es $d(r_a r_b)$= b-a.

De aquí que el área de la figura sombreada sea:

A=½ $S(r_a r_b)$ $d(r_a r_b)$ =½ (f(a) + f(b))(b-a).

Sustituyendo valores y transformando convenientemente:

A=½ (ma+c + mb+c)(b-a) =½(m(a+b) +2c)(b-a) =

=½m(a+b)(b-a) + c(b-a) =½m(b^2-a^2) +bc- ac =

=½ mb^2 - ½ ma^2 + bc - ac =(½ mb^2 + bc) -(½ ma^2 + ac).

Es decir A= (½ mb^2 + bc) -(½ ma^2 + ac).

Si observamos que la integral indefinida de la función f(x)dx es

(mx+c) = ½ mx^2 + xc + C, podemos concluir que el área no es más que una función primitiva de f(x) evaluada en el punto x = b, menos su valor para el punto x=a.

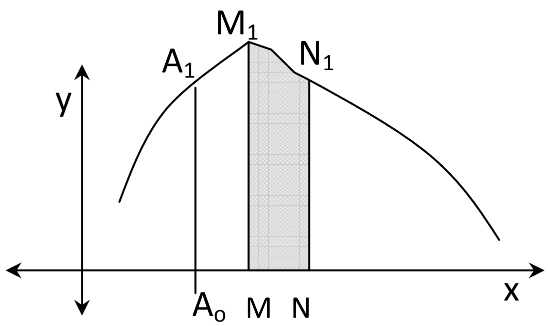
Denotando con F(x) a la primitiva de f(x), tendremos:

A= F(b) - F(a), o que se denota con f(x)dx y se denomina integral definida de f(x) limitada por a y b.

Obsérvese que la constante C de la función primitiva se anula al realizar la diferencia de los valores en b y a.

4. Integral Definida: función del incremento del área bajo la curva:

Imaginemos la representación gráfica de la función y= f(x), donde se han trazado los segmentos A_oA_1 y MM_1 que definen la superficie S de área A. Desplacemos el segmento en M una distancia infinitesimal; supongamos que se mueve hasta el punto N, desde donde levantamos el segmento NN_1, como se muestra en la figura



De esta manera la superfie S se incrementa en la superficie definida por MM_1N_1N, que denominaremos ΔS, cuya área la denotaremos con ΔA (se ha exagerado el desplazamiento para lograr mayor comprensión)

Si identificamos la abscisa del punto M con x y el incremento de M a N con Δx, al ser éste un infinitésimo podemos considerar que el segmento M_1N_1 está sobre una recta y puede aplicar la fórmula $A=½ S(r_ar_b) d(r_ar_b)$. Por lo que:

$\Delta A = ½(f(x) + f(x+\Delta x)) \Delta x$, y dividiendo por Δx se tiene

$\Delta A = ½(f(x) + f(x+\Delta x))$

Δx

y al evaluar el límite cuando Δx tiende a cero:

Lim ΔA =Lim $½(f(x) + f(x+\Delta x)) = ½(2f(x)) = f(x)$ (Δx tiende a 0).

Δx

Luego, f(x) es la derivada del área; lo que nos indica que el área es una función primitiva de f(x); la que denotaremos con F(x).

Para determinar ΔA, bastará calcular $f(x+\Delta x)dx$ - $f(x)dx$ lo que se

escribe: $f(x)dx$ y que es igual a $F(x+\Delta x)- F(x)$.

5. Integral Definida: sumatoria de incrementos de áreas bajo la curva.

Supongamos ahora, la representación gráfica de la función y=f(x), como se muestra en la figura. Situemos dos puntos fijos a y b sobre los que levantaremos rectas perpendiculares al eje x, de tal forma que todo f(x) sea del mismo signo siempre que $a<x<b$.

De esta forma, hemos definido una figura cuya superficie af(a)f(b)b se encuentra situada bajo la curva y=f(x) y limitada por la recta x.

Tracemos un haz de rectas paralelas que contengan a las levantadas, previamente, en los puntos a y b. Las distancias entre rectas consecutivas pueden variar o pueden ser iguales; pero, su cantidad será tal que las distancias entre dos de ellas sea un infinitésimo. Con esto, la figura queda dividida en superficies infinitamente pequeñas cuyas áreas, en conjunto, suman el área de la figura que las contiene.

Esta forma de dividir la figura es válida, tomando en cuenta el criterio anteriormente utilizado para el cálculo de incrementos de área bajo la curva, que nos permitió establecer que f(x) y $f(x+\Delta x)$ se encuentran situados en una misma recta (ver III). Cada recta del haz, junto a la gráfica de la función y el eje x contendrá un delimitador de las superficies infinitamente pequeñas antes mencionadas.

Con estas premisas, podemos calcular el área bajo la curva y= f(x) definida por los puntos a y b. Utilizando nuestra fórmula para el área del polígono y suponiendo k rectas paralelas del haz, identificadas desde a hasta b como r_i (i=0,....,k-1) tendremos:

$A= \sum ½ S(r_ir_{i+1}) d(r_ir_{i+1})$, con i =0,...., k-2.

Si identificamos los puntos x donde se levanta cada recta, con el mismo subíndice, tomando en cuenta que $a=x_0$ y $b= x_{k-1}$, podemos calcular los incrementos de as áreas a partir de r_i así:

$½ S(r_0r_1) d(r_0r_1) \quad = F(x_1)-F(a)$

$½ S(r_1r_2) d(r_1r_2) \quad = F(x_2)-F(x_1)$

$½ S(r_2r_3) d(r_2r_3) \quad = F(x_3)-F(x_2)$

$½ S(r_3r_4) d(r_3r_4) \quad = F(x_4)-F(x_3)$

....

....

....

$½ S(r_{k-3}r_{k-2}) d(r_{k-3}r_{k-2}) \quad = F(x_{k-2})-F(x_{k-3})$

$½ S(r_{k-1}r_{k-2}) d(r_{k-1}r_{k-2}) \quad = F(b)-F(x_{k-2})$

Si observamos los segundos miembros de las igualdades, observaremos que, a excepción de F(b), todos los minuendos aparecen como sustraendos en la igualdad siguiente. Por lo que al sumar miembro a miembro nos quedará:

$\sum ½ S(r_ir_{i+1}) d(r_ir_{i+1}) = F(b) - F(a)$; i =0,...., k-2. Y finalmente.

$$A = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx\text{; tal como se quería demostrar.}$$

9.2. Propiedades de la integral definida

Se enuncian algunas propiedades y teoremas básicos de las integrales definidas que ayudarán a evaluarlas con más facilidad.

1) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ donde c es una constante

2) Si f y g son integrables en [a, b] y c es una constante, entonces las siguientes propiedades son verdaderas:

$$\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

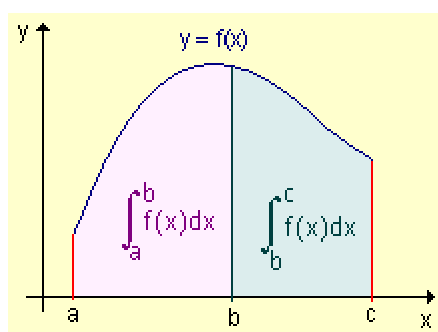
(se pueden generalizar para más de dos funciones)

3) Si x está definida para x = a entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$

4) Si f es integrable en [a, b] entonces $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5) Propiedad de aditividad del intervalo: si f es integrable en los tres intervalos cerrados definidos por a, b y c entonces

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



9.3. Teorema de existencia para integrales definidas

Vimos que cuando f(x) es la razón de cambio de la función F(x) y $f(x) \geq 0$ en [a, b] entonces la integral definida tiene la siguiente interpretación:

$\int_a^b f(x)dx$ = cambio total en F(x) cuando x cambia de "*a*" a "*b*".

Decir que f(x) es la razón de cambio de F(x) significa que f(x) es la derivada de F(x) o equivalentemente que F(x) es una primitiva de f(x). El cambio total en F(x) cuando x cambia de *a* a *b* es la diferencia entre el valor de F al final y el valor de F al principio, es decir, F(b) – F(a). Podemos definir $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Esta definición o principio se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias sociales y naturales. A modo de ejemplo podemos citar:

Si v(t) es el volumen de agua de un depósito, en el instante t, entonces su derivada v'(t) es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Así $\int_{t_1}^{t_2} v'(t)dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

Si [c](t) es la concentración del producto de una reacción química en el instante t entonces la velocidad de reacción es la derivada [c]'(t). De esta manera $\int_{t_1}^{t_2} c'(t)\,dt = [c](t_2) - [c](t_1)$ es el cambio en la concentración [c] desde el instante t_1 hasta el t_2.

Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto x, es m(x) entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. De esta manera $\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$ es la masa del segmento de la varilla entre x = a y x = b.

Si la tasa de crecimiento de una población es $\frac{dp}{dt}$ entonces $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp}{dt}dt = p(t_2) - p(t_1)$ es el aumento de población durante el período desde t_1 hasta t_2.

Si c(x) es el costo para producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada c'(t). Por consiguiente $\int_{x_1}^{x_2} c'(t)\,dt = c(x_2) - c(x_1)$ es el incremento en el costo cuando la producción aumenta desde x_1 hasta x_2 unidades.

Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición s(t) , entonces su velocidad es v(t) = s'(t) de modo que $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ = $s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio de la posición, o desplazamiento, de la partícula durante el período desde t_1 hasta t_2.

Dado que la aceleración de un objeto es a(t) = v'(t), podemos asegurar que la expresión

$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$ = $v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la velocidad en el instante t_1 hasta el t_2.

La potencia P(t) indica la razón de cambio de la energía E(t). Esto permite decir que P(t) = E'(t) y por lo tanto resulta $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$ = $E(t_2) - E(t_1)$ indica la energía utilizada en el tiempo entre t_1 y t_2.

La definición que estudiamos de integral definida nos permite calcular o evaluar la integral de funciones sencillas pero en la mayoría de los casos el cálculo del límite de sumas resulta complicado.

9.4. Teorema fundamental del calculo

Teorema fundamental del calculo

Vimos que cuando f(x) es la razón de cambio de la función F(x) y f(x) ≥ 0 en [a, b] entonces

la integral definida tiene la siguiente interpretación:

$\int_a^b f(x)dx$ = cambio total en F(x) cuando x cambia de "*a*" a "*b*".

Decir que f(x) es la razón de cambio de F(x) significa que f(x) es la derivada de F(x) o equivalentemente que F(x) es una primitiva de f(x). El cambio total en F(x) cuando x cambia de *a* a *b* es la diferencia entre el valor de F al final y el valor de F al principio, es decir, F(b) – F(a). Podemos definir $\int_a^b f(x)dx$ = F(b) – F(a).

Esta definición o principio se puede aplicar a todas las razones de cambio en las ciencias sociales y naturales. A modo de ejemplo podemos citar:

Si v(t) es el volumen de agua de un depósito, en el instante t, entonces su derivada v'(t) es la razón a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Así $\int_{t_1}^{t_2} v'(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

Si [c](t) es la concentración del producto de una reacción química en el instante t entonces la velocidad de reacción es la derivada [c]'(t). De esta manera $\int_{t_1}^{t_2} c'(t)\,dt = [c](t_2) - [c](t_1)$ es el cambio en la concentración [c] desde el instante t_1 hasta el t_2.

Si la masa de una varilla, medida desde la izquierda hasta un punto x, es m(x) entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. De esta manera $\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$ es la masa del segmento de la varilla entre x = a y x = b.

Si la tasa de crecimiento de una población es $\frac{dp}{dt}$ entonces $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dp}{dt}\,dt = p(t_2) - p(t_1)$ es el aumento de población durante el período desde t_1 hasta t_2.

Si c(x) es el costo para producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada c'(t). Por consiguiente $\int_{x_1}^{x_2} c'(t)\,dt = c(x_2) - c(x_1)$ es el incremento en el costo cuando la producción aumenta desde x_1 hasta x_2 unidades.

Si un objeto se mueve a lo largo de una recta con función de posición s(t) , entonces su velocidad es v(t) = s'(t) de modo que $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$ es el cambio de la posición, o desplazamiento, de la partícula durante el período desde t_1 hasta t_2.

Dado que la aceleración de un objeto es a(t) = v'(t), podemos asegurar que la expresión

$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$ es el cambio en la velocidad en el instante t_1 hasta el t_2.

La potencia P(t) indica la razón de cambio de la energía E(t). Esto permite decir que P(t) = E'(t) y por lo tanto resulta $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt = E(t_2) - E(t_1)$ indica la energía utilizada en el tiempo entre t_1 y t_2.

La definición que estudiamos de integral definida nos permite calcular o evaluar la integral de funciones sencillas pero en la mayoría de los casos el cálculo del límite de sumas resulta complicado.

9.5. Calculo de integrales definidas

La integración definida, utiliza el teorema fundamental del cálculo, para resolver integrales de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx$$

9.6.

Donde: a = Límite inferior y b = Límite superior.

A diferencia de la integración **indefinida**, en la integración **definida** se obtiene un resultado numérico, que se obtiene al integrar la expresión dada, evaluar los límites y hacer la sumatoria de los resultados obtenidos luego de la evaluación.

En **integración definida** se plantean integrales que - por lo general – se resuelven aplicando los métodos ya expuestos. Por esta razón, es conveniente que el lector haya estudiado - responsablemente - los cinco métodos anteriores, puesto que en la solución de los ejemplos de esta parte de la obra, no se incluye una explicación detallada de esos contenidos.

A continuación se presenta un conjunto de ejemplos, cuya función es mostrarle al lector, como se debe desarrollar el proceso de integración definida y como se usa el famoso teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo 1

- **Resolver la siguiente integral:**

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln|2|}\left(e^{t}.e^{-t}\right)dt$$

Solución

- *Método a emplear: Integración Definida.*
- *Regla de integración:* ***Teorema fundamental del cálculo(TFD)***
- *Desarrollo:*

❖ Aplicando propiedades de la potenciación, se tiene que:

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{t}.e^{-t}\,dt=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{t-t}dt=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{0}dt=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} 1dt \quad \textbf{(1)}$$

❖ Integrando **(1),** y aplicando el ***TDF***, se obtiene:

$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln|2|}\left(e^{t}.e^{-t}\right)dt=t\Big|_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}=\ln 2-\ln\frac{1}{2}$$

❖ Por lo tanto, la respuesta final, viene dada por:

9.7. Teoremas del valor medio para integrales

Valor promedio de una función

Es sencillo hallar el promedio de un conjunto de números dados, sólo debemos realizar el siguiente cálculo $y_{prom}=\frac{y_1+y_2+y_3+\ldots\ldots.y_n}{n}$. ¿Cómo calculamos la temperatura promedio durante un día si se puede tener numerosas lecturas de temperaturas? ¿Qué pasa si queremos hallar el promedio de un número infinito de valores? ¿Cómo calculamos el valor promedio de la función $f(x) = x^3$ en el intervalo [1, 2]? ¿Cómo calculamos el promedio de cualquier función aunque no sea positiva? Estamos en presencia de un tipo de promedio "continuo".

Se propone calcular el valor promedio de la función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Dividimos el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Si t_i es un punto cualquiera del i-ésimo subintervalo, entonces el promedio aritmético o medio de los valores de la función en los c_i viene dado por: $a_n = \frac{1}{n}\left[f(t_1) + f(t_2) + \ldots\ldots\ldots + f(t_n)\right]$

Multiplicamos y dividimos por (b – a) y resulta:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{b-a} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$ es una suma de Riemann para f en [a, b]. Podemos asegurar que el promedio de los n valores es $\frac{1}{b-a}$ veces la suma de Riemann de f en [a, b]. A medida que incrementamos la cantidad de subintervalos ($\Delta x \to 0$, $n \to \infty$) se obtiene, teniendo en cuenta la definición de integral definida:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

El valor promedio de f sobre el intervalo [a, b] resulta $f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

El concepto del valor promedio de una función en un intervalo es solamente uno de los muchos usos prácticos de las integrales definidas para representar procesos de suma.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Este teorema es importante porque asegura que una función continua en un intervalo cerrado alcanza su valor promedio al menos en un punto.

- Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], existe un número c en este intervalo tal que

$$f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración:

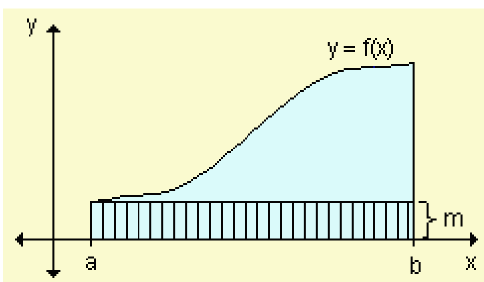
Primer caso: Si f es constante en el intervalo [a, b] el resultado es trivial puesto que c puede ser cualquier punto.

Segundo caso: Si f no es constante en [a, b] elegimos m y M como el menor y mayor valor que toma f en el intervalo. Dado que $m \leq f(x) \leq M \ \forall\ x \in [a, b]$ por el teorema de conservación de desigualdades.Aplicando propiedades:

$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$ entonces $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.

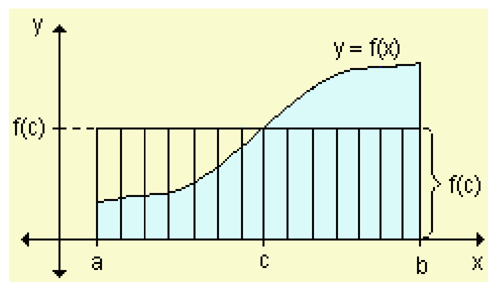
Dado que f es continua el teorema del valor intermedio asegura que f alcanza cada valor entre su mínimo y su máximo. Por lo tanto permite deducir que debe alcanzar el valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ en algún punto c del intervalo. [a, b]. Queda demostrado que existe algún c tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Interpretación gráfica del teorema para una función positiva:



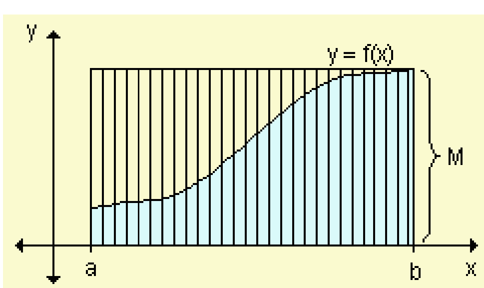
rectángulo inscripto (área menor que la de la región)

$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$



rectángulo del valor medio (área igual que la de la región)

$\int_a^b f(x)dx$

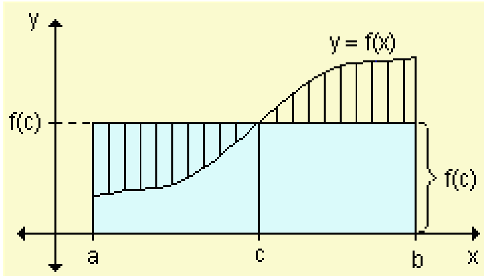


rectángulo circunscripto (área mayor que la de la región)

$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$

El valor de c no es necesariamente único. Este teorema no especifica cómo determinar c. Solamente garantiza la existencia de algún número c en el intervalo. Permite una interpretación interesante para el caso en que f es no negativa en [a, b]. En este caso $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la gráfica de f entre a y b. El teorema asegura que existe un valor c del intervalo al que está asociado f(c) que corresponde a la altura del rectángulo de longitud de la base (b – a) y su área coincide con la de la región.

$A = \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$

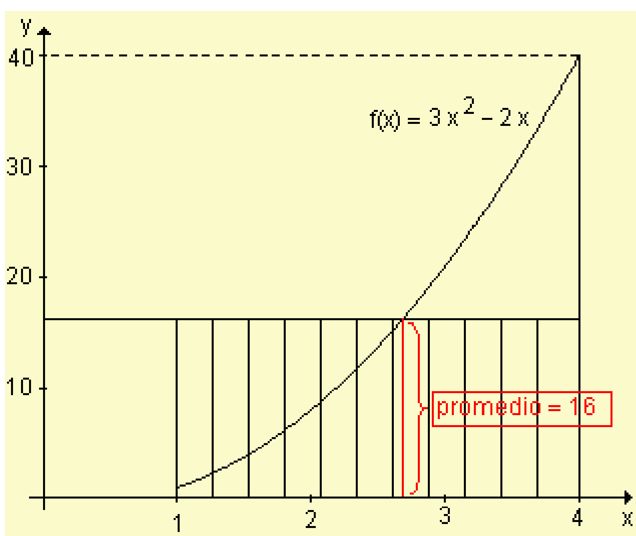


El valor de f(c) hallado según el teorema del valor medio para integrales coincide con el valor promedio o medio de una función por eso a $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se lo llama valor medio de f en el intervalo [a, b].

Ejemplo: halle el valor promedio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo [1, 4].

Calculamos:

$$f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{3}(64 - 16 - 1 + 1) = 16$$



Sabemos que el área de la región es igual al área del rectángulo cuya altura es el valor promedio. Se puede observar gráficamente.

Problema

Suponga que la población mundial actual es de 5 mil millones y que la población dentro de t años está dada por la ley de crecimiento exponencial $p(t) = e^{0,023t}$.

Encuentre, la población promedio de la tierra en los próximos 30 años.

Es importante tener en cuenta este valor dado que permite hacer planes a largo plazo de las necesidades de producción y en la distribución de bienes y servicios.

Para resolver este problema debemos hallar el valor promedio de la población P(t) desde t = 0 hasta t = 30

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} 5.e^{0,023\,t}\,dt = \frac{1}{30}\left[\frac{5}{0,023}e^{0,023\,t}\right]\Big|_0^{30}$$

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{30}\left[\frac{5}{0,023}e^{0,023.30} - \frac{5}{0,023}\right] = \frac{1}{30}\cdot\frac{5}{0,023}\left[e^{0,69} - 1\right]$$

Valor promedio ≈ 7,2 miles de millones

Bibliografía

- HAEUSSLER, ERNEST F. JR., *Matemáticas para Administración y Economía*, Décima Edición, Editorial Pearson, México, 2003

- JAGDISH, C. ARYA, *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía,* Cuarta Edición, Editorial Pearson, México, 2002

- HOFFMANN, LAWRENCE D., *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales*, Sexta Edición, Editorial Mc Graw Hill, Bogotá, 1998

- WEBER, JEAN E., *Matemáticas para Administración y Economía*, Cuarta Edición, Editorial Harla, México, 1984
- Introducción al análisis matemático; Luis Osín.

- Calculus, Volumen I; Tom M. Apostol.

- Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes; I. Bronshtein, K. Semendiaev.

- Aritmética 3; C. Repetto, M. Linskens, H. Fesquet.

- Análisis matemático; Tom M. Apostol.

- Análisis matemático, Volumen I; J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.

- Matemáticas 3; C. Amigo, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit.

- Apuntes de análisis matemático II(del curso del profesor F. Forteza); A. Dieste, C. Pfeif.

- Apuntes de análisis matemático(de las clases del profesor R. Ciganda); Santiago Michelini.

- Problemas y ejercicios de análisis matemático; B. Demidovich.