CINEMATICA Y DINAMICA NEWTONIANA DE RIGIDOS

1.1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE PARTICULAS

1.1.1. Posición, Velocidad y Aceleración

Puede describir la posición de un punto P escogiendo un punto de referencia 0 y presentando el vector de posición r de 0 a P. Supongamos que P esta en movimiento respecto a 0, de manera que r es una función del tiempo expresamos esto con la notación
r = r (t)
la velocidad de P respecto a 0 en el tiempo t se define como:
V= dr = lim r(t+ t)-r(t)
dt t t .
Donde el vector (r+ t)-r(t) es el cambio de posición, o desplazamiento de P, durante el intervalo de tiempo t. Así la velocidad es la razón de cambio de la posición de P respecto a 0.
Las dimensiones de una derivada se determinan como si se tratara de una proporción, por lo que las dimensiones de V son (distancia)/(tiempo). El punto de referencia usado suele ser obvio, y simplemente llamamos V a la velocidad de P., SIN EMBARGO, se debe recordar que la posición
La aceleración de P respecto a 0 en un tiempo t se define como:
A = dv = lim v(t+ t)- v(t)
Dt t =0 t
Donde v (t+ t)-v (t) es el cambio en la velocidad de P durante el intervalo de tiempo t. La aceleración es la razón de cambio de velocidad de P en el tiempo t (la segunda derivada respecto al tiempo de desplazamiento), y sus dimensiones son (distancia)/(tiempo)2.
Movimiento en línea recta
Analizamos este tipo simple de movimiento para obtener experiencia antes de pasar al paso general del movimiento de un punto. Sin embargo, en muchos casos prácticos los ingenieros deben analizar movimientos en línea recta, como el movimiento de un vehículo sobre un camino recto o el movimiento del pistón de un motor de combustión interna.
Descripción del movimiento.-
Puede especificar la posición de un punto P sobre una línea recta respecto a un punto de referencia 0 por medio de la coordenada s medida a lo largo de la línea que va de 0 a P . En este caso definimos s como positiva hacia la derecha, por lo que s es positiva cuando P esta a la derecha de 0 y negativa cuando P esta a la izquierda de 0. El desplazamiento s respecto a 0 durante un intervalo de tiempo de t0 a t es el cambio de posición, s= s(t)-s(t0).
Incluyendo un vector unitario e paralelo a la línea y que apunta en la dirección positiva s , podemos escribir el vector de posición de P respecto a 0 como
r=se

Si la línea no gira, el vector unitario e es constante y la velocidad de P respecto a 0 es:

$$v=\frac{dr}{Dt}=\frac{ds}{dt}e$$

Podemos escribir el vector velocidad como v=ve y obtener la ecuación escalar

$$v=\frac{ds}{dt}$$

La velocidad v de un punto P a lo largo de la línea recta es la razón de cambio de su posición s. Observe que v es igual a la pendiente en un tiempo t de la tangente a la gráfica de s en función de tiempo (fig. 2.4)

La aceleración de P respecto a 0 es

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d(ve)}{dt}=\frac{dv}{dt}e$$

Escribir el vector de aceleración como a= ae da la ecuación escalar

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$$

La aceleración a es igual a la pendiente en el tiempo t de la recta tangente a la gráfica de v en función del tiempo

Con el vector unitario e obtuvimos ecuaciones escalares que describen el movimiento de P. La posición queda especificada por la coordenada s, y la velocidad y la aceleración están regidas por las ecuaciones

$$v=\frac{ds}{dt}$$

$$a=\frac{dv}{dt}$$

ANALISIS DEL MOVIMIENTO.-

En algunos casos se conoce la posición s de algún punto de un cuerpo como función del tiempo. Los ingenieros usan métodos como el radar y la interferometria de láser para medir posiciones en función del tiempo.

En este caso, con las ecuaciones anteriores se pueden obtener por diferenciación la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo. Por ejemplo, si la posición del camión de la durante el intervalo de tiempo de t=2s a t=4s esta dada por la ecuación

$$S=6+\frac{1}{3}t^3 \text{ m}$$

Su velocidad y aceleración durante ese intervalo de tiempo son

$$v=\frac{ds}{dt}=t^2$$

$$a=\frac{dv}{dt}=2t \text{ m/s}^2$$

Sin embargo, es más común conocer la aceleración de un cuerpo que su posición, porque la aceleración de un cuerpo se puede determinar con la segunda ley de Newton cuando se conocen las fuerzas que actúan sobre él. Una vez conocida la aceleración, con las ecuaciones se pueden determinar por integración la velocidad y la posición. En las siguientes secciones analizaremos tres casos importantes.

ACELERACION ESPECIFICADA COMO FUNCION DEL TIEMPO

Si la aceleración es una función conocida del tiempo a(t), podemos integrar la relación

$$\frac{dv}{dt}=a(t)$$

Con respecto al tiempo para determinar la velocidad en función del tiempo,

v = a(t)dt+A

Donde A es una constante de integración. Luego podemos integrar la relación

$$\frac{ds}{dt}=v$$

Para determinar la posición en función del tiempo,

s = v dt+B

Donde B es otra constante de integración. Para determinar las constantes A y B se necesita información adicional acerca del movimiento, por ejemplo los valores de v y s en un tiempo dado.

En vez de usar integrales indefinidas, la ecuación se puede escribir como

dv=a(t)dt

E integrar desde el punto de vista de integrales definidas:

dv= a(t)dt

Él limite inferior v0 es la velocidad en el tiempo t0 y él limite superior es la velocidad en un tiempo t cualquiera. Evaluando la integral izquierda obtenemos una expresión para la velocidad en función del tiempo:

v=v0 + a(t)dt

Podemos escribir la ecuación como

ds= v dt

E integrar desde el punto de vista de integrales definidas,

ds= v dt

Donde él limite inferior s0es la posición en el tiempo t0 y él limite superior s es la posición en un tiempo t arbitrario. Evaluando la integral izquierda, obtenemos la posición en función del tiempo:

s=s0 + v dt

Aunque hemos mostrado como determinar la velocidad y la posición cuando se conoce la aceleración en función del tiempo, no deberían memorizarse resultados como las ecuaciones . Como demostraremos en el ejemplo, recomendamos que los problemas en movimiento en línea recta se resuelvan empezando con las ecuaciones

Algunas observaciones útiles sobre las ecuaciones son las siguientes:

El área definida por la gráfica de la aceleración de P en función del tiempo de t0 a t es igual al cambio de la velocidad de t0 a t

El área definida por la gráfica de la velocidad de P en función del tiempo de t0 a t es igual al desplazamiento, o cambio de posición, de t0 a t.

A menudo se pueden usar esas relaciones para obtener una apreciación cualitativa del movimiento de un cuerpo, y en algunos casos incluso se pueden usar para determinar su movimiento.
En algunas situaciones, la aceleración de un cuerpo es constante, o casi constante. Por ejemplo, si se lanza un cuerpo denso, como una pelota de golf o una roca, y este no cae muy lejos, se puede ignorar la resistencia del aire y suponer que su aceleración es igual a la aceleración de la gravedad a nivel del mar.
Sea la aceleración una constante conocida a0. De las ecuaciones , la velocidad y la posición como funciones del tiempo son
v =v +a (t-t0)
s =s +v (t-t0)+1/2 a0 (t- t0)2
Donde s0 y v0 son la posición y la velocidad, respectivamente, en el tiempo t0.
Observe que si la aceleración es constante, la velocidad es una función lineal del tiempo.
Podemos usar la regla de la cadena para expresar la aceleración desde el punto de vista de una derivada respecto a s:
a0 =dv=dv ds = dv v
dt ds dt ds
Escribiendo esta expresión como vdv=a0ds e integrando;
V dv= a0 ds
Obtenemos una ecuación para la velocidad en función de la posición:
v2 =v02 +2 a0 (s-s0)
Probablemente el lector se encuentra familiarizado con las ecuaciones (2.11) y (2.13). Aunque esos resultados pueden ser de utilidad cuando se sabía que la aceleración es constante, hay que tener cuidado de no usarlas cuando esto no sea así.
ACELERACION ESPECIFICADA COMO FUNCION DE LA VELOCIDAD
Las fuerzas aerodinámicas e hidrodinámicos ocasionan que la aceleración de un cuerpo dependa de su velocidad (fig. 2.11). Suponga que la aceleración es una función conocida de la velocidad a(v):
dv = a(v)
dt
No podemos integrar esta ecuación con respecto al tiempo para determinar la velocidad, porque a(v) no se conoce como función del tiempo. Sin embargo, podemos separa variables poniendo los términos que contengan V en un lado de la ecuación y los términos que contengan t en el otro lado:
dv = dt
a(v)
Ahora podemos integrar,
dv= dt
a(v)
Ahora podemos integrar,
dv = dt
a(v)

Donde v_0 es la velocidad en el tiempo t_0. En principio, podemos resolver esta ecuación para la velocidad en función del tiempo, y luego integrar la relación

$$\frac{ds}{dt} = v$$

Para determinar la posición en función del tiempo.

Usando la regla de la cadena podemos determinar también la velocidad en función de la posición. Escribiendo la aceleración como:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

Y sustituyéndola en la ecuación (2.14) obtenemos:

$$\frac{dv}{ds} v = a(v)$$

Separando variables

$$\frac{v\,dv}{a(v)} = ds$$

E integrando,

$$\frac{v\,dv}{a(v)} = ds$$

Podemos obtener una relación entre la velocidad y la posición.

ACELERACION ESPECIFICADA COMO FUNCION DE LA POSICION

Las fuerzas gravitatorias y las fuerzas ejercidas por resortes pueden hacer que la aceleración de un cuerpo dependa de su posición. Si la aceleración es una función conocida de la posición,

$$\frac{dv}{dt} = a(s)$$

No podemos integrar con respecto al tiempo para determinar la velocidad porque s no se conoce como función del tiempo. Además, no podemos separar variables porque la ecuación tiene tres variables, v, t y s., sin embargo, usando la regla de la cadena,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

Podemos escribir la ecuación (2.17) como

$$\frac{dv}{ds} v = a(s)$$

Ahora podemos separar variables,

$$v\,dv = a(s)\,ds$$

E integrar:

$$v\,dv = a(s)\,ds$$

En principio podemos resolver esta ecuación para la velocidad en función de la posición

$$v = \frac{ds}{dt} = v(s)$$

Luego podemos separar variables en esta ecuación e integrar para determinar la posición en función del tiempo:

$$\frac{ds}{v(s)} = dt$$

Los siguientes dos ejemplos muestran como se puede analizar el movimiento de un cuerpo cuando su aceleración es una función de la velocidad o de la posición. Los pasos iniciales se resumen en la tabla 2.1

TABLA 2.1. - Determinación de la velocidad cuando se conoce la aceleración en función de la velocidad o de la posición

MOVIMIENTO CURVILINEO.-

Si el movimiento de un punto se limita a una línea recta, su vector de posición r, su vector de velocidad v y su vector de aceleración a están completamente descritos por los escalares s, v y a respectivamente. Conocemos las direcciones de esos vectores porque son paralelos a la línea recta, pero si un punto describe una trayectoria curvilínea, debemos especificar tanto las magnitudes como las direcciones de esos vectores, y requerimos un sistema coordenado que se emplea para expresarlos desde el punto de vista de componentes escalares. Aunque las direcciones y magnitudes de los vectores de posición, de velocidad y de aceleración no depende del sistema coordenado que se emplea para expresarlos, mostraremos que las representaciones de esos vectores son diferentes en distintos sistemas coordenados. Muchos problemas se pueden expresar en coordenadas cartesianas, pero algunas situaciones, incluyendo los movimientos de satélites y maquinas alternativas se pueden expresar mas fácilmente usando otros sistemas coordenados que ilustran los movimientos curvilíneos de puntos.

CORDENADAS CARTESIANAS.-

Sea r el vector de posición de un punto P, respecto a un punto de referencia 0. Para expresar el movimiento de P en un sistema coordenado cartesiano, colocamos el origen en 0 (fig 2.15), de modo de las componentes de r son las coordenadas x, y, z de P:

r = Xi+Yj+Zk.

Suponiendo que el sistema coordenado no gira, los vectores unitarios i,j y k son constantes. Entonces, la velocidad de P es

Expresando la velocidad en términos de componentes escalares

Obtenemos ecuaciones escalares que relacionan los componentes de velocidad con las coordenadas de P

La aceleración de P es

Y expresando la aceleración en términos de componentes escalares,

Obtenemos las ecuaciones escalares

Las ecuaciones 2.23 y 2.25 describen el movimiento de un punto respecto a un sistema cartesiano. Observe que las ecuaciones que describen el movimiento en cada dirección coordenada son idénticas en forma de las ecuaciones que describen el movimiento de un punto a lo largo de una línea recta. En consecuencia, a menudo se puede analizar el movimiento en cada dirección coordenada usando los métodos aplicables al movimiento en línea recta.

MOVIMIENTO ANGULAR.-

Hemos visto que algunos casos el movimiento curvilíneo de un punto se puede analizar usando coordenadas cartesianas. En las siguientes secciones describimos problemas que se pueden analizar mas fácilmente con otros sistemas coordenados. En esta sección presentamos dos temas preliminares: el movimiento

angular de una línea en un plano y la derivada respecto al tiempo de un vector unitario girando en un plano.
MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA LINEA.- Podemos especificar la posición angular de una línea L en un plano particular respecto de una línea de referencia L0 en el plano por medio del ángulo (figura 2.18). la velocidad angular de L respecto a L0 esta definida por
Y la aceleración angular de L respecto de L0 por formula
Las dimensiones de la posición angular, la velocidad angular y la aceleración angular son radianes (rad), rad/s y rad/s2 respectivamente. Aunque estas cantidades suelen expresarse en grados o revoluciones en vez de radianes, deben convertirse en radianes antes de usarlas en cálculos.
Observe la analogía entre las ecuaciones 2.31 y 2.32 y las que relacionan la posición, la velocidad y la aceleración de un punto de una recta (tabla 2.2). en cada caso la posición se especifica con una sola coordenada escalar, que puede ser positiva o negativa(en la figura 2.18 la dirección antihoraria es positiva). Como las ecuaciones son idénticas los problemas que implique movimientos angulares de una línea se pueden analizar con los mismos métodos aplicados al movimiento de una línea recta.
Aplicación Mecánica.-
El rotor de un motor de reacción esta girando a 10,000 rpm cuando se interrumpe el suministro de combustible. La aceleración resultante es =-0.02 donde es la velocidad angular en rad/seg.

- ¿Cuánto tarda el rotor en alcanzar 1000 rpm?
- ¿Cuántas revoluciones gira el rotor mientras desacelera a 1000 rpm?

ESTRATEGIA
Para analizar el movimiento angular del rotor, definimos una línea L fija al rotor y perpendicular a su eje (fig 2.20). luego examinamos el movimiento de L respecto a la línea de referencia L ,. La velocidad, posición y aceleración angulares de L definen el movimiento angular del rotor.
SOLUCION
La conversión de rpm a rad/s es
1rpm =1 revolución /min x (2 rad) x (1 min)
1 revolución 60 s
= /30 rad/s
La aceleración angular es
= d = -0.02
dt
separando variables,
d = -0.02dt.
e integramos , definiendo t = 0 como el tiempo en que se corta el combustible:
d = -0.02 dt
evaluando las integrales y despejando t obtenemos
t= (1) ln (10,000 /30) = 115.1 s
 1,000 /30
(b) escribimos la aceleración angular como
= d = d d = d = -0.02

dt d dt d
separamos variables
d = -0.02 d
e integramos, definiendo = 0 como la posición angular en que se corta el combustible:
d = -0.02 d
despejando obtenemos
= (1) (10,000 /30) - (1,000 /30)
0.02
=15,000 rad= 7,500 revoluciones.

1.1.2. Determinación del movimiento de partículas

movimiento de partículas cinemática y dinámica
Primera ley de Newton: Todo cuerpo puntual permanece en el estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que haya fuerzas actuando sobre él que modifiquen su estado.
Segunda ley de Newton: Si sobre un cuerpo puntual A actúan fuerzas, entonces la aceleración del mismo es proporcional a la resultante de las fuerzas actuantes y tiene igual dirección y sentido que ella.
a = Ma.a
donde Ma es la masa inercial del cuerpo puntual A.
Tercera ley de Newton: Si un cuerpo puntual A ejerce una fuerza sobre un cuerpo puntual B, entonces el cuerpo puntual B ejerce una fuerza - igual y de sentido contrario sobre el cuerpo puntual A.
a = -b
La transformación de las fuerzas de un sistema de referencia a otro, está dada por la siguiente ecuación:
' =
La transformación de las masas inerciales de un sistema de referencia a otro, está dada por la siguiente ecuación:
M' = M
Comportamiento dinámico de los cuerpos puntuales
Consideremos que el universo está constituido solamente por los cuerpos puntuales A, B y C y que estos cuerpos puntuales se comportan para un sistema de referencia S según como lo establece la dinámica de Newton.
Por lo tanto, el comportamiento de los cuerpos puntuales A, B y C estará determinado para el sistema de referencia S por las ecuaciones:
a = Ma.a
b = Mb.b (1)
c = Mc.c
A partir de las ecuaciones (1) y por medio de las transformaciones de la cinemática y de la dinámica, se puede establecer que el comportamiento de los cuerpos puntuales A, B y C estará determinado para otro sistema de referencia S' por las ecuaciones:

á = Má.(á - ó)
= M.(- ó) (2)
= M.(- ó)

Como las ecuaciones (2) sólo pueden tener la misma forma que las ecuaciones (1) si la aceleración ó del sistema de referencia S con respecto al sistema de referencia S' es igual a cero, entonces no se puede establecer que el comportamiento de los cuerpos puntuales A, B y C estará determinado para cualquier sistema de referencia por las ecuaciones (1).

Ahora, si se suman las fuerzas de las ecuaciones (2), se obtiene:

á + + = Má.(á - ó) + M.(- ó) + M.(- ó) (3)

Despejando ó y como á + + es igual a cero, por la tercer ley de Newton, resulta:

Má.á + M. + M.
ó = ---------------------- (4)
Má + M + M

Como el segundo miembro es la aceleración m del centro de masa del universo con respecto al sistema de referencia S', queda:

ó = m (5)

Reemplazando en las ecuaciones (2) ó por m, se obtiene:

á = Má.(á - m)
= M.(- m) (6)
= M.(- m)

Por lo tanto, el comportamiento de los cuerpos puntuales A, B y C estará determinado ahora para el sistema de referencia S' por las ecuaciones (6), que son equivalentes a las ecuaciones (2) ya que m es igual a ó.

Ahora si se pasan las ecuaciones (6) del sistema de referencia S' al sistema de referencia S, por medio de las transformaciones de la cinemática y de la dinámica, se obtiene:

a = Ma.(a - cm)
b = Mb.(b - cm) (7)
c = Mc.(c - cm)

Por lo tanto, el comportamiento de los cuerpos puntuales A, B y C estará determinado ahora para el sistema de referencia S por las ecuaciones (7), que sólo pueden ser equivalentes a las ecuaciones (1) si la aceleración cm del centro de masa del universo con respecto al sistema de referencia S es igual a cero; lo cual puede ser verificado sumando las fuerzas de las ecuaciones (1); o sea:

a + b + c = Ma.a + Mb.b + Mc.c (8)

de donde dividiendo luego ambos miembros por Ma + Mb + Mc y como a + b + c es igual a cero, por la tercer ley de Newton, resulta:

Ma.a + Mb.b + Mc.c
cm = ---------------------- = 0 (9)
Ma + Mb + Mc

Como las ecuaciones (7) tienen la misma forma que las ecuaciones (6), entonces se puede establecer que el comportamiento de los cuerpos puntuales A,B y C estará determinado para cualquier sistema de referencia por las ecuaciones (7), y que sólo estará determinado por las ecuaciones (1) si la aceleración del centro de masa del universo con respecto al sistema de referencia es igual a cero.

Ahora, si en las ecuaciones (7) se pasa el segundo miembro al primero, se obtiene:

a + Ma.(cm - a) = 0
b + Mb.(cm - b) = 0 (10)
c + Mc.(cm - c) = 0

Reemplazando cm por su expresión, resulta luego de factorizar:

$$a + \frac{Ma.Mb.(b - a)}{Ma + Mb + Mc} + \frac{Ma.Mc.(c - a)}{Ma + Mb + Mc} = 0$$

$$b + \frac{Mb.Ma.(a - b)}{Ma + Mb + Mc} + \frac{Mb.Mc.(c - b)}{Ma + Mb + Mc} = 0 \quad (11)$$

$$c + \frac{Mc.Ma.(a - c)}{Ma + Mb + Mc} + \frac{Mc.Mb.(b - c)}{Ma + Mb + Mc} = 0$$

Si se interpreta al segundo y tercer término, como una nueva fuerza º que actúa sobre los cuerpos puntuales, ejercida por los otros cuerpos puntuales, entonces se notará: que la fuerza º conserva siempre su forma y su valor al ser pasada de un sistema de referencia a otro y además que si un cuerpo puntual ejerce una fuerza º sobre otro cuerpo puntual, entonces el segundo cuerpo puntual ejerce una fuerza -º igual y de sentido contrario sobre el primer cuerpo puntual. Por lo tanto, como el segundo y tercer término representa la suma de las nuevas fuerzas º que actúan sobre los cuerpos puntuales, queda:

a + ºa = 0
b + ºb = 0 (12)
c + ºc = 0

Agregando, por último, el segundo término al primero, se obtiene:

a = 0
b = 0 (13)
c = 0

Por lo tanto, finalmente se puede establecer que el comportamiento de los cuerpos puntuales A,B y C estará determinado para cualquier sistema de referencia por las ecuaciones (13); que pueden ser enunciadas de la siguiente manera: Si al conjunto de las fuerzas aplicadas agregamos la nueva fuerza, entonces el total formará un sistema en equilibrio.

Es posible, por lo tanto, concebir una nueva dinámica, que podrá ser formulada para todos los sistemas de referencia; cuya explicación sobre la causa del movimiento de los cuerpos puntuales no será: que los cuerpos puntuales se mueven de determinada manera porque están sometidos bajo la acción de las fuerzas aplicadas que actúan sobre ellos, según como lo establece la primera y segunda ley de Newton, sino que será: que los cuerpos puntuales se mueven de determinada manera porque de esa manera equilibran, por medio de la nueva fuerza, al sistema de fuerzas aplicadas que actúa sobre los cuerpos puntuales.

Por otro lado, de ahora en más, a la nueva fuerza se la denominará fuerza cinética, ya que es una fuerza que depende del movimiento de los cuerpos puntuales, y a la magnitud M (masa) se la denominará masa cinética en vez de masa inercial, porque los cuerpos puntuales ya no poseen más la propiedad de la inercia

1.1.3.Movimiento Rectilíneo Uniforme

El Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), también conocido como Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) y Movimiento Unidimensional con Aceleración Constante, es aquél en el que un móvil se desplaza sobre una trayectoria recta y está sometido a una aceleración constante. Esto implica que para cualquier intervalo de tiempo, la aceleración del móvil tendrá siempre el mismo valor. Un ejemplo de este tipo de movimiento es el de caída libre, en el cual la aceleración interviniente y considerada constante es la que corresponde a la de la gravedad.
La figura muestra relaciones, respecto del tiempo, de la posición (parábola), la velocidad (recta con pendiente) y la aceleración (constante, recta horizontal) en este tipo de movimiento.

Ecuaciones del movimiento
Este movimiento, como su propio nombre indica, tiene una aceleración constante:
(1) $a(t) = a_0$
por lo que la velocidad V en un instante t dado es:
(2a) $v(t) = a_0 t + v_0$
donde v_0 es la velocidad inicial. Finalmente la posición x en el instante t viene dada por:
(3) $x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$
donde x_0 es la posición inicial.
Además de las relaciones básicas anteriores, existe una ecuación que relaciona entre sí el desplazamiento y la rapidez lineal del movil. Esta se obtiene despejando el tiempo de (2a) y substituyendo el resultado en (3):
(2b) $v^2 = 2a_0 x + v_0^2$

Movimiento acelerado en mecánica relativista
En mecánica relativista no existe un equivalente exacto del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, ya que la aceleración depende de la velocidad y mantener una aceleración constante requeriría una fuerza progresivamente creciente. Lo más cercano que tenemos es el movimiento de una partícula bajo una fuerza constante, que comparte muchas de las características del MUA de la mecánica clásica.
La ecuación de movimiento relativista para el movimiento bajo una fuerza constante partiendo del reposo es:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \dfrac{F}{m_0} = w \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Donde w es una constante que, para valores pequeños de la velocidad comparados con la velocidad de la luz, es aproximadamente igual a la aceleración (para velocidades cercanas a la luz la aceleración es mucho más pequeña que el cociente entre la fuerza y la masa). De hecho la aceleración bajo una fuerza constante viene dada en el caso relativista por:

$$a(t) = \frac{w}{\left(1 + \frac{w^2t^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La integral de (4) es sencilla y viene dada por:

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = wt \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = \frac{wt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}} \quad (5)$$

E integrando esta última ecuación suponiendo que inicialmente la partícula ocupaba la posición x = 0, llegamos a:

$$x(t) = \frac{c^2}{w}\left[\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} - 1\right] \quad (6)$$

En este caso el tiempo propio de la partícula acelerada se puede calcular en función del tiempo coordenado t mediante la expresión:

$$\tau = \frac{2c}{w}\ln\left[\frac{wt}{c} + \sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}\right] \quad (7)$$

Todas estas expresiones pueden generalizarse fácilmente al caso de un movimiento uniformemente acelerado, cuya trayectoria es más complicada que la parábola, tal como sucede en el caso clásico cuando el movimiento se da sobre un plano.

Observadores de Rindler

El tratamiento de los observadores uniformemente acelarados en el espacio-tiempo de Minkoski se realiza habitualmente usando las llamadas coordenadas de Rindler para dicho espacio, un observador acelerado queda representado por un sistema de referencia asociado a unas coordenadas de Rindler. Partiendo de las coordenadas cartesianas la métrica de dicho espacio-tiempo:

$$ds^2 = -c^2dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2, \qquad (T,X,Y,Z) \in \mathbb{R}^4$$

Consideremos ahora la región conocida como "cuña de Rindler", dada por el conjunto de puntos que verifican:

$$\mathcal{R}_{Rind} = \{(T,X,Y,Z) \in \mathbb{R}^4 | 0 < X < \infty,\ -X < T < X\}$$

Y definamos sobre ella un cambio de coordenadas dado por las transformaciones siguientes:

$$\begin{cases} t = \frac{c}{\alpha}\operatorname{arctanh}\left(\frac{cT}{X}\right),\ x = \frac{c^2}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha}{c^2}\sqrt{X^2 - c^2T^2}\right)\ y = Y,\ z = Z \\ T = \frac{c}{\alpha}\, e^{\alpha x/c^2}\sinh\left(\frac{\alpha t}{c}\right),\ X = \frac{c^2}{\alpha}\, e^{\alpha x/c^2}\cosh\left(\frac{\alpha t}{c}\right),\ Y = y,\ Z = z \end{cases}$$

Donde:
α, es un parámetro relacionado con la aceleración del observador.[1]
(t, x, y, z), son las coordenadas temporal y espaciales medidas por dicho observador.
Usando estas coordenadas, la cuña de Rindler del espacio de Minkowski tiene una métrica, expresada en las nuevas coordenadas, dada por la expresión:

$$ds^2 = e^{\frac{2\alpha x}{c^2}}(-dt^2 + dx^2) + dy^2 + dz^2, \qquad (t, x, y, z) \in \times\mathbb{R}^4$$

Puede que estas coordenadas representan a un observador acelerado según el eje X, cuya cuadriaceleración obtenida como derivada covariante de la cuadrivelocidad está relacioanda con el valor de la coordenadas x:

$$\nabla_{\mathbf{e}_0}\mathbf{e}_0 = \alpha e^{-\frac{\alpha x}{c^2}}\ \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{a} = (a^0; a^1, a^2, a^3) = \left(0; \alpha e^{-\frac{\alpha x}{c^2}}, 0, 0\right)$$

Horizonte de Rindler
Es interesante notar que un observador uniformemente acelerado tiene horizonte de eventos, es decir existe una superficie espacial (que coincide con la frontera de la cuña de Rindler):

$$H^-_{Rind} = \{(T, X, Y, Z) | X^2 - c^2T^2 = 0\} = \{(t, x, y, z) | x = -\infty\}$$

Tal que la luz del otro lado jamás alcanzaría al observador acelerado. Este horizonte de eventos es del mismo tipo que el horizonte de eventos que ve un obsevador situado fuera de un agujero negro. Es decir, los eventos al otro lado del horizonte de eventos no pueden ser vistos por estos observadores.
El ejemplo de las coordenadas de Rindler muestra que la ocurrencia de un horizonte de eventos no está asociada al propio espacio-tiempo sino a ciertos observadores. Las coordenadas de Rindler constituyen una cartografía del espacio-tiempo plano de Minkowski. En dicho espacio un observador inercial no ve ningún horizonte de eventos pero sí lo ve un observador acelerado.
Movimiento acelerado en mecánica cuántica
En 1975, Stephen Hawking conjeturó que cerca del horizonte de eventos de un agujero negro debía aparecer un producción de partículas cuyo espectro de energías corrreponderia con la de un cuerpo negro cuya temperatura fuera inversamente proporcional a la masa del agujero. En un análisis de observadores acelerados, Paul Davies provó que el mismo argumento de Hawking era aplicable a estos observadores (observadores de Rindler).[2]
En 1976, Bill Unruh basándose en los trabajos de Hawking y Davies, predijo que un observador uniformemente acelerado observaría radiación de tipo Hawking donde un observador inercial no observaría nada. En otras palabras el efecto Unruh afirma que el vacío es percibido como más caliente por un observador acelerado.[3] La temperatura efectiva observada es proporcional a la aceleración y viene dada por:

$$kT = \frac{\hbar a}{2\pi c}$$

Donde:

k, constante de Boltzmann.

$\hbar$, constante de Planck racionalizada.

c, velocidad de la luz.

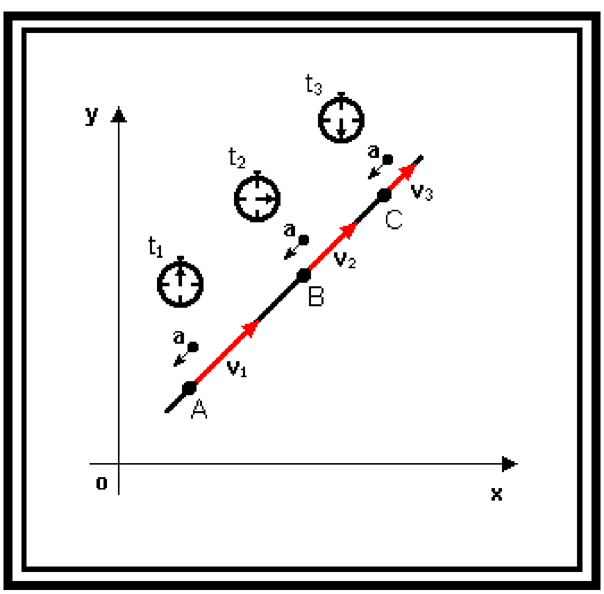
T, temperatura absoluta medida del vacío medida por el observador acelerado.

a, aceleración del observador uniformemente acelerado.

De hecho el estado cuántico que percibe el observador acelerado es un estado de equilibrio térmico diferente del que percibe un observador inercial. Ese hecho hace de la aceleración una propiedad absoluta: un observador acelerado moviéndose en el espacio abierto puede medir su aceleración midiendo la temperatura del fondo térmico que le rodea. Esto es similar al caso relativista clásico, en donde un observador acelerado que observa una carga eléctrica en reposo respecto a él puede medir la radiación emitida por esta carga y calcular su propia aceleración absoluta.

1.1.4. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Cuando la aceleración instantánea se mantiene constante tanto en magnitud como en dirección y sentido durante todo el intervalo en que analizamos el movimiento de una partícula, tenemos el caso particular conocido por movimiento uniformemente acelerado. La figura



demuestra que dicho movimiento también es una línea recta, pues la dirección de la aceleración se mantiene constante, sólo que difiere del rectilíneo uniforme en que la que se mantiene constante es la aceleración y no la velocidad instantánea.

Podremos entender fácilmente lo anterior si imaginamos que vamos en un autobús, y en cierto momento una persona pide su parada. Entonces, el autobús empieza a detenerse, por lo que su velocidad instantánea va disminuyendo de magnitud (es decir,

se mueve cada vez menos rápidamente); además, tal vez el chofer haga funcionar los frenos, con lo que su aceleración instantánea se mantiene constante en todo momento hasta que el autobús se detiene.
En la figura se esquematiza la trayectoria de una partícula que viaja con un movimiento uniformemente acelerado; es decir, la aceleración es la misma en todos y cada uno de los puntos que componen su trayectoria.
El hecho de que la aceleración sea constante en el movimiento de traslación de una partícula permite hacer muchas simplificaciones en su estudio. Por ejemplo:
Aceleración media y movimiento uniformemente acelerado
Podemos trabajar con la definición de aceleración media en vez de emplear la definición de aceleración instantánea, ya que, como la aceleración instantánea es constante en todo el intervalo, sería igual a la aceleración media:

Aceleración media y movimiento uniformemente acelerado

Podemos trabajar con la definición de aceleración media en vez de emplear la definición de aceleración instantánea, ya que, como la aceleración instantánea es constante en todo el intervalo, sería igual a la aceleración media: la cual es más fácil de usar con las herramientas matemáticas que se tienen a

$$a_m = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t_i},$$

$\mathbf{v}_f$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}\,\Delta t,$$

este nivel, que la definición de aceleración instantánea,
Ahora bien: si en la ecuación anterior despejamos
, tendremos la siguiente expresión:
en la cual podemos hacer otra simplificación gracias a que existe movimiento uniformemente acelerado, y consiste en que, como las trayectorias de este movimiento son rectilíneas, podemos desentendernos de la dirección de la aceleración durante el análisis.
Sin embargo, si consideramos el sentido de la aceleración, recordando que cuando la velocidad instantánea aumenta durante el movimiento, la magnitud de la aceleración es positiva, y si la velocidad instantánea decrece durante el movimiento, es negativa.

Rapidez media y movimiento uniformemente acelerado
Otra cantidad que nos permite calcular fácilmente el hecho de que una partícula se traslade con movimiento uniformemente acelerado es la rapidez media.
Como es el único caso en que la rapidez media corresponde a un promedio aritmético, de los que usamos comúnmente, entre la rapidez inicial y la final, podemos escribirlo de la siguiente manera:
(2)

$$v_m = \left| \mathbf{v}_m \right| \frac{v_f + v_i}{2}$$

Recuérdese que, por ser el movimiento rectilíneo, podemos desentendernos de la dirección de la velocidad instantánea y, por lo tanto, podemos hablar indistintamente de rapidez instantánea y velocidad instantánea, pues en estos casos ambas propiedades son equivalentes; es decir, podemos pensar que son la misma cosa, y destacamos la palabra pensar porque, en realidad, una es un escalar y la otra es un vector.
En el siguiente ejemplo, y de aquí en adelante, de acuerdo con lo anterior usaremos indistintamente ambos términos.

$$v_m = \frac{25\ m/s + 10\ m/s}{2}$$

$$v_m = 17.5\ m/s$$

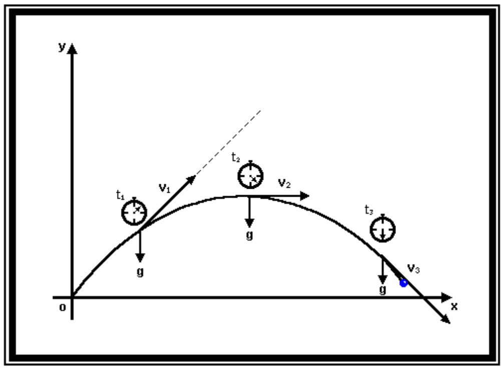
Si un automóvil corría a la velocidad de 10 m/s cuando se presionó el acelerador y se mantuvo oprimido para que la aceleración fuera constante, y 20 segundos después se vio que su velocidad era de 25 m/s, el automóvil recorrió cierta distancia con una velocidad instantánea que iba en aumento, pero con aceleración constante. Ahora bien: de acuerdo con lo que acabamos de ver, el automóvil habría recorrido la misma distancia si hubiera ido a la velocidad media de:
Además, debido a que **si se utiliza la velocidad media, el movimiento se puede estudiar como si fuera uniforme,** en este caso se podría usar también la ecuación del movimiento uniforme. Usando la velocidad media y despejando la distancia recorrida, queda:

$$d = v_m \Delta t, \quad (3)$$

en la cual:

d = Desplazamiento.
v_m = Velocidad media.
Δt = Intervalo de tiempo transcurrido.

En resumen, podemos considerar que las tres ecuaciones (1), (2) y (3) **son las ecuaciones fundamentales del movimiento uniformemente acelerado,** ya que con ellas, y con la ayuda del álgebra y la aritmética, se pueden resolver todos los problemas en que intervenga este tipo de movimientos.
También puede haber un movimiento uniformemente acelerado, es decir, con vector acelerado constante, en una trayectoria que no sea una recta. La figura 71 muestra cómo puede ocurrir tal hecho.
Cuando lanzamos una pelota en un determinado ángulo, ésta se ve afectada por la aceleración de la gravedad (debida a la atracción que ejerce la Tierra sobre ella), y esto hace que su trayectoria rectilínea se vaya curvando poco a poco hasta convertirse en una parábola, y cae en el suelo. Siempre ha tenido una aceleración constante **g** y, por lo tanto, se ha estado moviendo con movimiento uniformemente acelerado.



1.1.5. movimiento de varias partículas

Si en lugar de tener dos partículas, se tiene N partículas, las expresiones anteriores se generalizan en forma directa quedando el centro de masa $\mathbf{R}_{CM}$ de partículas de masas m_j que se encuentran en las posiciones $\mathbf{r}_j$, es el promedio

$$\mathbf{R}_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{r}_j}{M},$$

siendo M la masa total.

La velocidad del centro de masa es:

$$\mathbf{V}_{CM} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbf{v}_j}{M};$$

el momento lineal del centro de masa es:

$$\mathbf{P}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_j.$$

La ecuación de movimiento del centro de masa es:

$$\mathbf{F_e} = \frac{d\mathbf{P_{CM}}}{\mathbf{dt}},$$

siendo $\mathbf{F}_e$ la suma de fuerzas externas que actúan sobre todo el sistema de partículas.

Las relaciones sobre trabajo y energía son las mismas, considerando que en la energía cinética del sistema de partículas v_j son las magnitudes de las velocidades,

$$E_k = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j v_j^{\,2}}{2}. \qquad E_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j v_j^2}{2}$$

El trabajo realizado por la fuerzas externas se determina mediante el producto escalar de la fuerzas $\mathbf{F}_{je}$ con los desplazamientos $d\mathbf{r}_j$,

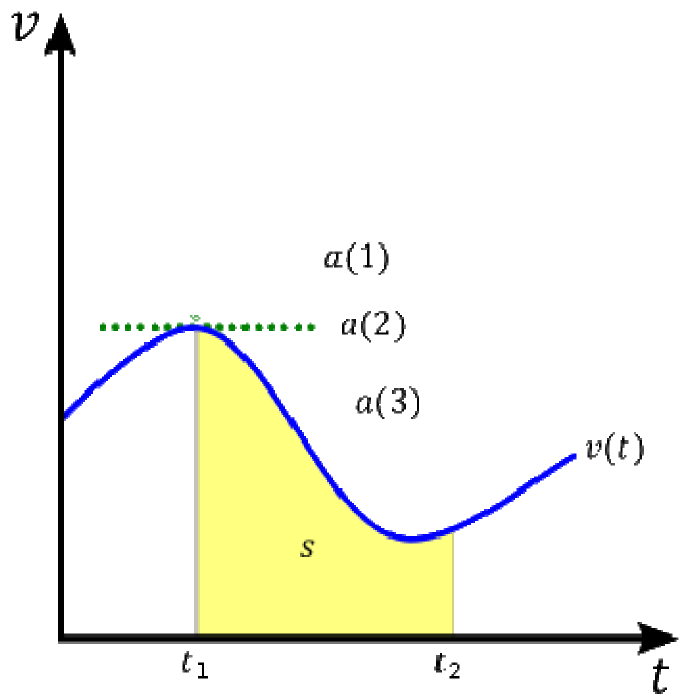
$$W_e = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbf{r}_{j0}}^{\mathbf{r}_j} \mathbf{F}_{je} \cdot d\mathbf{r}_j;$$

mientras que el trabajo de las fuerzas internas $\mathbf{F}_{jl}$, considerando que satisfacen la Tercera Ley de Newton, es:

$$W_i = \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{\substack{l=2 \\ l>j}}^{N} \int_{\mathbf{r}_{j0}-\mathbf{r}_{l0}}^{\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_l} \mathbf{F}_{jl} \cdot d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l).$$

1.2. Sistemas de movimiento curvilíneo de partículas.

1.2.1. Vector de posición, velocidad y aceleración



http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Velocity_vs_time_graph.svg

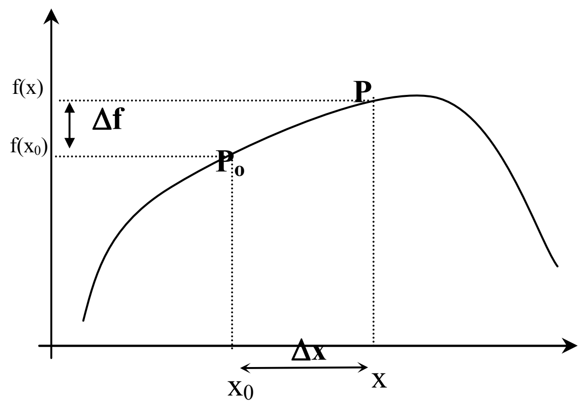
Velocidad ***v***, aceleración ***a*** y distancia recorrida ***S***. La gráfica muestra la función velocidad respecto al tiempo, la pendiente de la curva azul será la aceleración y el área bajo la curva entre dos abscisas será el espacio recorrido.

Vector de posición, velocidad y aceleración		
r (t)	**v** (t) = d **r** (t)/ dt	**a** (t) = d **v** (t) / dt
a (t)	**v** (t) = $\int$ **a** (t) dt + **cte**	**r** (t) = $\int$ **v** (t) dt + **cte**
Componentes intrínsecas de la aceleración	**a** = $\mathbf{a_t}$ + $\mathbf{a_n}$ = a_t **T** + a_n **N**	
	T: vector unitario tangente a la trayectoria **T** = **v** / | v |	
	N: vector unitario normal a la trayectoria	
	$\mathbf{a_t}$ = aceleración tangencial; a_n = d v / dt	
	$\mathbf{a_n}$ = aceleración normal; $a_n = v^2 / \rho$; ρ es el radio de curvatura	

1.2.2. Derivadas de Funciones vectoriales

Definición

Sea f: A → R, *con* $A \subseteq R$, *y sea* x_0 *interior a A*



Resulta:

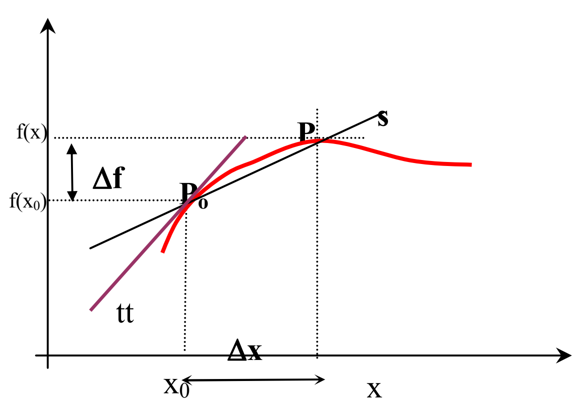
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como una derivada es un límite pueden darse una de estas tres situaciones: que sea un número, que sea infinito o que no exista**.**

<u>Definición:</u>

f es derivable en x_o *si y sólo si existe y es finito el límite para* $x \to x_0$ *de* $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto



El cociente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *(cociente incremental), representa la pendiente de la recta secante a la curva* ***C****, representativa de la función.*
Cuando $x \to x_0$*, el punto P "resbala" sobre la curva hasta coincidir con* P_0*, la recta secante alcanza una posición límite que corresponde a la recta tangente.*

Entonces, si la recta secante tiende a la recta tangente, y el cociente incremental tiende a la derivada, resulta que:

La derivada de una función en x_0 representa , si existe y es finita, la pendiente de la recta tangente a C en P_o.

- ***Derivada de función vectorial***

Consideremos $\vec{f}$:**A**→ **R**$^{\mathbf{n}}$ con **A** ⊆ **R** ∧ n ≥ 2 , y t_0 pto. interior de **A**
I.1.-Definición:

Se llama vector derivado de $\vec{f}$ en t_0 al límite, si existe de: $\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$,

cuando Δt → 0. Se indica $\vec{f}\,'(t_0)$.
Resulta: $\vec{f}\,'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$

Teorema:

$\vec{f}$*(t)= (*$f_1(t);f_2(t);.....;f_n(t)$*)* es derivable en t_0 ⇔ f_i (t) es derivable en t_0, $\forall i\in\{1,...,n\}$

Demostración:

$\vec{f}$(t) derivable en t_0 ⇔ $\exists\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$ ⇔

$$\exists\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f_1(t_o+\Delta t);f_2(t_o+\Delta t);\Lambda\ f_n(t_o+\Delta t))-(f_1(t_o);f_2(t_o);\Lambda\ f_n(t_o))}{\Delta t}\Leftrightarrow$$

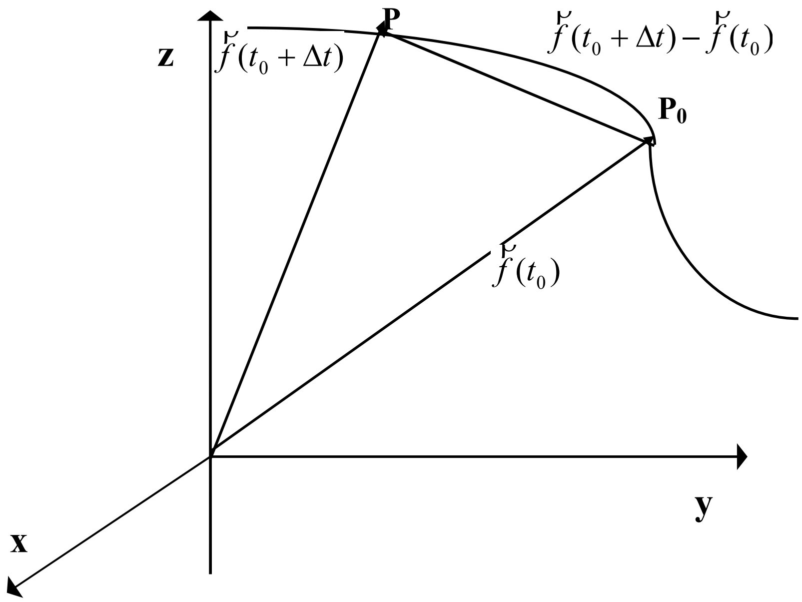
$$\exists\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(f_1(t_o+\Delta t)-f_1(t_o);....;f_n(t_o+\Delta t)-f_n(t_o)\right)}{\Delta t}\Leftrightarrow$$

$$\exists\ \left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t};\Lambda\ ;\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{fn(t_0+\Delta t)-fn(t_0)}{\Delta t}\right)\Leftrightarrow$$

$$\exists\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t}=f_1'(t_0)\wedge ....\wedge \exists\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t}=f_n'(t_0)$$

Recta tangente y plano normal a una curva en R^3

Consideramos $\vec{f}$:**A**$\rightarrow$ **R**^{n} continua ,con **A** $\subseteq$ **R** $\wedge$ n = 3. La representación gráfica del conjunto imagen es una curva en **R**^{3}



Consideremos los puntos **P** y **P₀** definidos por $\vec{f}(t_0+\Delta t)$ y por $\vec{f}(t_0)$;el vector $\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$ tiene el módulo y la dirección de la cuerda $\overline{\mathbf{PP_0}}$.
Al dividir por Δt y tomar el límite para $\Delta t\rightarrow 0$, el vector derivado, si existe, tendrá la dirección límite de la de una cuerda cuyo extremo tiende a coincidir con el punto inicial , es decir tendrá la dirección tangente a la curva en $\mathbf{P_0}$.

Resulta que la recta tangente a la curva representativa de la imagen de $\vec{f}(t)$ en P_0 , es la recta que tiene la dirección de $\vec{f}'(t_0)$ y a la que pertenece $\mathbf{P_0}$.

t $_{\mathbf{P0}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{X}=\vec{f}(t_0)+\lambda\vec{f}'(t_0)}$ (ec. vectorial de la recta tg.)

o bien ,si $f_i'(t_0)\neq 0,\forall i\in\{1,2,3\}$:

$$\boxed{\frac{x-f_1(t_0)}{f_1'(t_0)}=\frac{y-f_2(t_0)}{f_2'(t_0)}=\frac{z-f_3(t_0)}{f_3'(t_0)}}$$ (ecs. simétricas de la recta tangente)

Si llamamos $\pi_{\mathbf{N}}$ al plano perpendicular a la recta tangente en $\vec{\mathbf{P}}_0$, es decir al ***plano normal*** a la curva asociada a la imagen de $\vec{f}(t)$, resulta que la ecuación vectorial de $\pi_{\mathbf{N}}$ es:

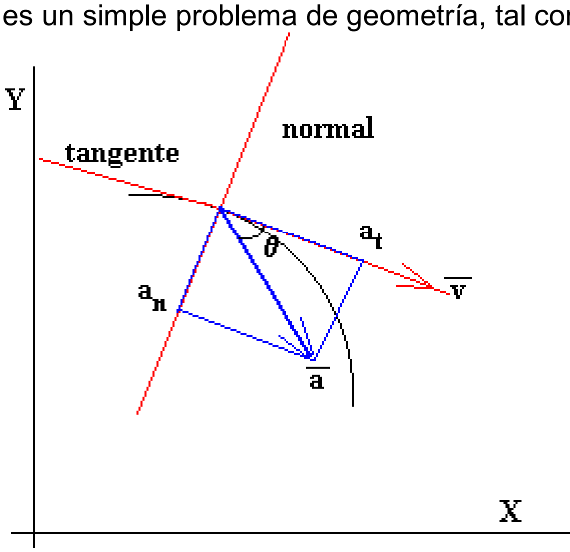
$$\boxed{\left(\vec{X}-\vec{f}(t_0)\right)\cdot\vec{f}'(t_0)=0}$$

y la ecuación cartesiana:

$$\boxed{f_1'(t_o).(x- f_1(t_o)) + f_2'(t_o).(y- f_2(t_o)) + f_3'(t_o).(z- f_3(t_o)) =0}$$

1.2.3. Componentes rectangulares a la velocidad y aceleración

Las componentes rectangulares de la aceleración no tienen significado físico, pero si lo tienen las componentes de la aceleración en un nuevo sistema de referencia formado por la tangente a la trayectoria y la normal a la misma.
Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en un determinado instante es un simple problema de geometría, tal como se ve en la figura.



Se dibujan los ejes horizontal X y vertical Y.
Se calculan las componentes rectangulares de la velocidad y de la aceleración en dicho instante. Se representan los vectores velocidad y aceleración en dicho sistema de referencia.
Se dibujan los nuevos ejes, la dirección tangencial es la misma que la dirección de la velocidad, la dirección normal es perpendicular a la dirección tangencial.
Con la regla y el cartabón se proyecta el vector aceleración sobre la dirección tangencial y sobre la dirección normal.
Se determina el ángulo *q* entre el vector velocidad y el vector aceleración, y se calcula el valor numérico de dichas componentes: $a_t = a \cos q$ y $a_n = a \operatorname{sen} q$
.

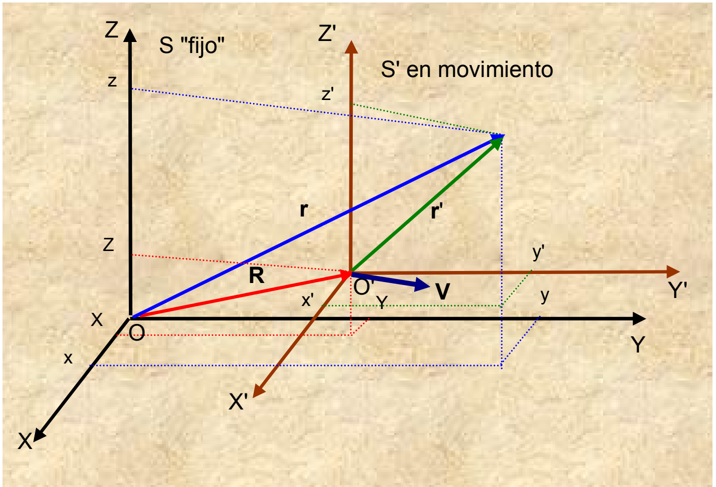
1.2.4. movimiento relativo a un sistema de referencia en translación

Consideremos un sistema de referencia "fijo" S, con su origen O y los ejes cartesianos X, Y, Z, y un sistema S' en movimiento, con su origen O' y los ejes X', Y', Z', paralelos a los ejes X, Y, Z, respectivamente,[1] como se indica en la figura 1. Supongamos que el tiempo medido por los dos observadores es el mismo, t = t'. La posición **r**(t) de una partícula P en el tiempo t, indicada por el observador O está dada por:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

siendo x(t), y(t), z(t) las coordenadas en el sistema S; mientras que vista por el observador O', la posición **r**'(t) en el mismo tiempo, es:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i}' + y'(t)\mathbf{j}' + z'(t)\mathbf{k}',$$



Sistemas de referencia en movimiento relativo de traslación.

siendo x'(t), y'(t), z'(t) las coordenadas en el sistema S'. La posición **R**(t) del observador O' determinada por el observador O, en el tiempo t, es:

$$\mathbf{R}(t) = X(t)\mathbf{i} + Y(t)\mathbf{j} + Z(t)\mathbf{k},$$

siendo X(t), Y(t), Z(t) las coordenadas en el sistema S. La relación entre los vectores de posición se puede ver directamente en la figura,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{R}(t). \qquad (1)$$

Es decir que la posición **r**(t) de la partícula desde el sistema de referencia "fijo" S corresponde a la posición **r**'(t) de la partícula medida desde el sistema en movimiento S' más la posición **R**(t) del observador O' respecto al sistema "fijo" S.

Para determinar la relación entre las velocidades tomamos el cambio respecto al tiempo en la ecuación 1,

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \mathbf{V}(t), \qquad (2)$$

siendo **v**(t) la velocidad de la partícula determinada en el sistema de referencia S:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k};$$

mientras que **v**'(t) es la velocidad de la partícula obtenida por el observador O':

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{d\mathbf{r}'(t)}{dt'} = \frac{dx'(t)}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'(t)}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'(t)}{dt}\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{v}'(t) = v'_x(t)\mathbf{i}' + v'_y(t)\mathbf{j}' + v'_z(t)\mathbf{k}';$$

y **V**(t) la velocidad conque se desplaza el observador O' respecto al sistema de referencia "fijo" S,[2] es:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{dX(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dY(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dZ(t)}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V}(t) = V_x(t)\mathbf{i} + V_y(t)\mathbf{j} + V_z(t)\mathbf{k}.$$

Es decir, de acuerdo con la relación 2, que la velocidad **v**(t) de la partícula desde el sistema de referencia "fijo" S corresponde a la velocidad **v**'(t) de la partícula medida desde el sistema en movimiento S' más la velocidad **V**(t) del observador O' respecto al sistema "fijo" S.

Por otra parte, para la relación entre las aceleraciones tomamos el cambio en la relación de velocidades (ec. 2) respecto al tiempo, obteniendo:

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{A}(t), \qquad (3)$$

siendo **a**(t) la aceleración de la partícula determinada en el sistema de referencia S:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k};$$

Mientras que **a**'(t) es la aceleración de la partícula obtenida por el observador O':

$$\mathbf{a}'(t) = \frac{d\mathbf{v}'(t)}{dt} = \frac{dv'_x(t)}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dv'_y(t)}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dv'_z(t)}{dt}\mathbf{k}'$$

$$\mathbf{a}'(t) = a'_x(t)\mathbf{i}' + a'_y(t)\mathbf{j}' + a'_z(t)\mathbf{k}';$$

y **A**(t) la aceleración conque se desplaza el observador O' respecto al sistema de referencia "fijo" S, es:

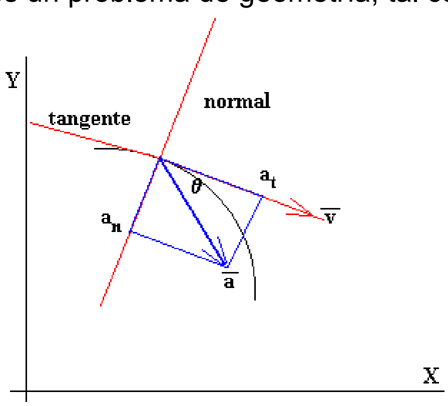
$$\mathbf{A}(t) = \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dV_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dV_z(t)}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A}(t) = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}.$$

Es decir, de acuerdo con la relación 2, que la aceleración **a**(t) de la partícula desde el sistema de referencia "fijo" S corresponde a la aceleración **a'**(t) de la partícula medida desde el sistema en movimiento S' más la aceleración **A**(t) del observador O' respecto al sistema "fijo" S.

1.2.5 componente tangencial y normal

Las componentes rectangulares de la aceleración no tienen significado físico, pero si lo tienen las componentes de la aceleración en un nuevo sistema de referencia formado por la tangente a la trayectoria y la normal a la misma.
Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en un determinado instante es un problema de geometría, tal como se ve en la figura.



Se dibujan los ejes horizontal X y vertical Y.
Se calculan las componentes rectangulares de la velocidad y de la aceleración en dicho instante. Se representan los vectores velocidad y aceleración en dicho sistema de referencia.
Se dibujan los nuevos ejes, la dirección tangencial es la misma que la dirección de la velocidad, la dirección normal es perpendicular a la dirección tangencial.
Con la regla y el cartabón se proyecta el vector aceleración sobre la dirección tangencial y sobre la dirección normal.
Se determina el ángulo *q* entre el vector velocidad y el vector aceleración, y se calcula el valor numérico de dichas componentes: $a_t = a \cos q$ y $a_n = a \operatorname{sen} q$
Podemos hallar la aceleración tangencial en cualquier instante, a partir del producto escalar del vector aceleración **a** y el vector velocidad **v**.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = va\cos\theta = va_t \qquad a_t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{a}$$

La aceleración normal, se obtiene a partir del módulo de la aceleración a y de la aceleración tangencial a_t

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

La aceleración tangencial se obtiene también derivando el módulo de la velocidad con respecto del tiempo

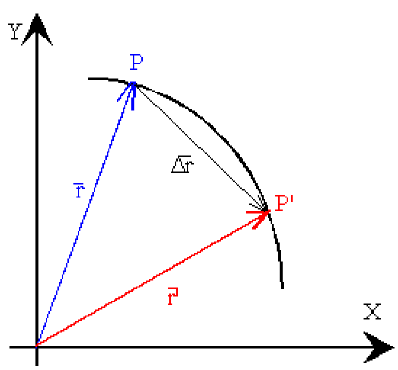
$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Como la velocidad es un vector, y un vector tiene módulo y dirección. Existirá aceleración siempre que cambie con el tiempo bien el módulo de la velocidad, la dirección de la velocidad o ambas cosas a la vez.
Si solamente cambia el módulo de la velocidad con el tiempo, como en un movimiento rectilíneo, tenemos únicamente aceleración tangencial.
Si solamente cambia la dirección de la velocidad con el tiempo, pero su módulo permanece constante como en un movimiento circular uniforme, tenemos únicamente aceleración normal.
Si cambia el módulo y la dirección de la velocidad con el tiempo, como en un tiro parabólico, tendremos aceleración tangencial y aceleración normal..

1.2.6. Componente radia y transversal

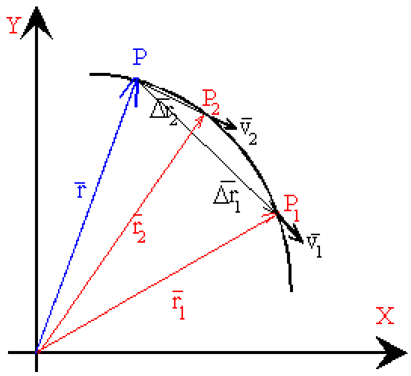
Supongamos que el movimiento curvilíneo tiene lugar en el plano XY, situamos un origen, y unos ejes, y representamos la trayectoria del móvil, es decir, el conjunto de puntos por los que pasa el móvil.
Las magnitudes que describen un movimiento curvilíneo son:

Vector posición r en un instante *t*.



Como la posición del móvil cambia con el tiempo. En el instante *t* el móvil se encuentra en el punto P, o en otras palabras, su vector posición es **r** y en el instante *t'* se encuentra en el punto P', su posición viene dada por el vector **r'**.
Diremos que el móvil se ha desplazado **Dr=r'-r** en el intervalo de tiempo D*t*=*t'*-*t*. Dicho vector tiene la dirección de la secante que une los puntos P y P'.

Vector velocidad

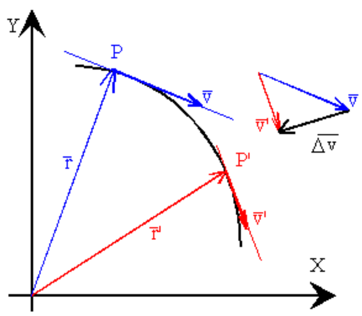


El vector velocidad media, se define como el cociente entre el vector desplazamiento **Dr** entre el tiempo que ha empleado en desplazarse D*t*.

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{t' - t} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

El vector velocidad media tiene la misma dirección que el vector desplazamiento, la secante que une los puntos P y P' de la figura

Vector aceleración



En el instante *t* el móvil se encuentra en P y tiene una velocidad **v** cuya dirección es tangente a la trayectoria en dicho punto.
En el instante *t'* el móvil se encuentra en el punto P' y tiene una velocidad **v'**.
El móvil ha cambiado, en general, su velocidad tanto en módulo como en dirección, en la cantidad dada por el vector diferencia **Dv=v'-v**.

Se define la aceleración media como el cociente entre el vector cambio de velocidad y el intervalo de tiempo D*t=t'-t*, en el que tiene lugar dicho cambio.

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{v}}{t' - t} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Y la aceleración **a** en un instante

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Resumiendo, las ecuaciones del movimiento curvilíneo en el plano XY son

$$x = x(t) \qquad v_x = \frac{dx}{dt} \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$y = y(t) \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

La primera fila corresponde, a las ecuaciones de un movimiento rectilíneo a lo largo del eje X, la segunda fila corresponde, a las ecuaciones de un movimiento rectilíneo a lo largo del eje Y, y lo mismo podemos decir respecto del eje Z.
Por tanto, podemos considerar un movimiento curvilíneo como la composición de movimientos rectilíneos a lo largo de los ejes coordenados.

1.3. Sistemas de coordenadas rotativos

Los sistemas de coordenadas rotativos son ampliamente usados en sistemas CNC de programación en lo que debido a los cambio de eje así como el de la posición de las herramientas no debe de perder los puntos de referencia aún cuando desde el punto de vista del exterior así pareciera, investiga respecto a este tema el a bibliografía recomendada

1.4.Expresiones para el movimiento en términos de referencia móviles

1.4.1. Ecuaciones del movimiento

Históricamente el primer ejemplo de ecuación del movimiento que se introdujo en física fue la segunda ley de Newton para sistemas físicos compuestos de agregados partículas materiales puntuales. En estos sistemas el estado físico de un sistema quedaba fijado por la posición y velocidad de todas las partículas en un instante dado. Hacia finales del siglo XVIII se introdujo la mecánica analítica o racional, que era una generalización de las leyes de Newton aplicables en pie de igualdad a sistemas de referencia inerciales y no inerciales, y se crearon dos enfoques básicamente equivalentes conocidos como mecánica lagrangiana y mecánica hamiltoniana, que pueden llegar a un elevado grado de abstracción y formalización. Los ejemplos clásicos de ecuación del movimiento más conocidos son:

La segunda ley de Newton que se usa en mecánica newtoniana

: $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F} = 0$ $m\frac{d^2 r}{dt^2} - F = 0$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que aparecen en mecánica lagrangiana:

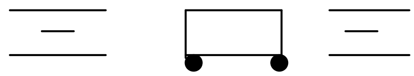
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial q_i} = 0$$

Las ecuaciones de Hamilton que aparecen en mecánica hamiltoniana:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(p_i,q_i)}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(p_i,q_i)}{\partial q_i}$$

1.4.2. Equilibrio Dinámico

Si el cuerpo esta en movimiento el equilibrio se llama dinámico.



Se Mueve

1.4.3. Momento Angular de una partícula

El **momento angular** o **momento cinético** es una magnitud física importante en todas las teorías físicas de la mecánica, desde la mecánica clásica a la mecánica cuántica, pasando por la mecánica relativista. Su importancia en todas ellas se debe a que está relacionada con las simetrías rotacionales de los sistemas físicos. Bajo ciertas condiciones de simetría rotacional de los sistemas es una magnitud que se mantiene constante con el tiempo a medida que el sistema evoluciona, lo cual da lugar a una ley de conservación conocida como **ley de conservación del momento angular**.
Esta magnitud desempeña respecto a las rotaciones un papel análogo al momento lineal en las traslaciones.
El nombre tradicional en español es *momento cinético*[1] , pero por influencia del inglés *angular momentum* hoy son frecuentes *momento angular* y otras variantes como *cantidad de movimiento angular* o *ímpetu angular*.

1.4.4..Ley gravitacional de newton

el Sol sobre un planeta o por la Tierra sobre un satélite en órbita es un ejemplo importante de una fuerza central. En esta sección, se aprenderá cómo determinar la magnitud de una fuerza gravitacional.
En su *ley de la gravitación universal,* Newton postuló que dos partículas de masa M y in a una distancia r tina de la otra se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas **F** y **–F** dirigida a lo largo de la línea que las une . La magnitud común F de las dos fuerzas es

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

donde G es una constante universal, llamada la *constante de gravitación.*
Los experimentos indican que el valor de G corresponde a
(66.73 _ 0.03) 10_12 m3/kg _ s2 en unidades del SI o aproximadamente
34.4 10_9 ft4/lb _ s4 en unidades del sistema de uso común en
Estados Unidos.

1.4.5. Trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central

Considérese una partícula *P* que se mueve bajo el efecto de una fuerza central **F**. Se desea obtener la ecuación diferencial que define su trayectoria. Si se supone que la fuerza **F** está dirigida hacia el centro de fuerza 0, se tiene que $\sum F_r$ y $\sum F_0$ se reduce, respectivamente, a *-F y cero* en las ecuaciones *.* Por lo tanto, se escribe

$m\left(r - r\theta^2\right) = -F$ …(1)

$m\left(r\theta - 2i\theta^2\right) = 0$ …(2)……(revisar formulas debido a limitaciones de escritura)

Estas ecuaciones definen el movimiento de P. Sin embargo, se sustituye la ecuación *(1)* por la ecuación *(2),* la cual es equivalente a la ecuación *(2),* lo cual se verifica sin dificultad al diferenciarla con respecto a *t,* pero cuyo uso es más conveniente. Se escribe

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (3)$$

La ecuación *(3)* se usa para eliminar la variable independiente *t* de la ecuación *(1). Al* resolver la ecuación *(3)* para _ o *d__dt* se tiene

$$\theta = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (4)$$

de la cual se deduce que

$$r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{dt}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \quad (5)$$

¨

o, al sustituir ˙*r* de *(5),*

$$r = \frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (6)$$

La sustitución de _ y ¨*r* de *(4) y (6),* respectivamente, en la ecuación *(1)* e introducir la función *u* =1/*r*, se obtiene después de simplificaciones

$$\frac{d^2u}{d\theta} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (7)$$

Para obtener la ecuación *(7),* se supuso que la fuerza **F** estaba dirigida hacia *O*. Por lo tanto, la magnitud *F* será positiva si **F** realmente apunta hacia *O* (fuerza atractiva) y negativa si **F** apunta alejándose de *O* (fuerza repulsiva). *Si F* es una función conocida de *r* y, en consecuencia, de *u*, la ecuación *(7)* es una ecuación diferencial en *u* y _ que define a la trayectoria seguida por la partícula bajo la acción de la fuerza central **F**. La ecuación de la trayectoria se obtiene al resolver la ecuación diferencial *(7)* para *u* con una función de _ y al determinar las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales.

1.5 Cinética de cuerpo rígido

Un cuerpo rígido, es un concepto, que representa cualquier cuerpo que no se deforma y es representado por un conjunto de puntos en el espacio que se mueven de tal manera que no se alteran las distancias entre ellos, sea cual sea la fuerza actuante:

$$|ra - rb| = c$$

Se dice que las ligaduras son holónomas, si $f(r_1,...,r_2,t) = c$ estas ligaduras eliminan grados de libertad.
Aplicando las ligaduras se requiere de 6 coordenadas generalizadas para describir el movimiento de un cuerpo rígido: 3 variables definen la traslación y 3 variables definen la rotación. Para el caso de los ángulos de euler el rango de los parámetros es el siguiente: $0 \le \phi < \pi, 0 \le \psi < 2\pi$ y para evadir duplicación de resultados el último parámetro se restringe de $0 \le \theta < \pi$ Pero aún con estas medidas no se puede evadir la duplicación del todo, si $\theta = 0$ obtenemos el mismo resultado siempre que $\phi + \psi$ tenga un valor constante:

$$R(\psi,\theta,\phi) = R(\psi,k)R(\phi,j)R(\phi,k)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta\cos\phi - sen\varphi sen\phi & -\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\cos\phi & \cos\varphi sen\theta \\ -sen\varphi\cos\phi + \cos\varphi sen\phi & -sen\varphi\cos\theta + \cos\varphi sen\theta & sen\varphi sen\theta \\ -sen\theta\cos\phi & sen\theta sen\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1.6. Cantidades de movimiento lineal y angular

Si se reemplaza la aceleración **a** por la derivada *d***v**/*dt* en la ecuación
, se escribe

$\sum F = ma$ donde $\sum F = m\frac{dv}{dt}$

o, ya que la masa *m* de la partícula es constante,

$\sum F = \frac{d}{dt}(mv)$ ......(1)

El vector *m***v** se denomina como la *cantidad de movimiento lineal*, o simplemente *cantidad de movimiento* de la partícula. Tiene la misma dirección que la velocidad de la partícula, y su magnitud es igual al producto de la masa *m y la* velocidad v de la partícula. La ecuación (1) expresa que *la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula.* En esta forma fue que Newton enunció originalmente la segunda ley de movimiento. Al denotar por **L** la cantidad de movimiento lineal de la partícula,

$L = mv$ (2)

y por **L ˙** su derivada con respecto a *t,* es posible escribir la ecuación
(2) en la forma alternativa

$\sum F = L^{\cdot}$ (3)

Puesto que las estrellas no están realmente fijas, una definición más rigurosa de sistema de referencia newtoniano (denominado también *sistema inercial)* es *uno respecto al cual se cumple la ecuación (1).*
Debe notarse que la masa m de la partícula se supone constante en las ecuaciones (2) a (3). La ecuación (2.) o (4) no debe entonces usarse para resolver problemas que impliquen el movimiento de cuerpos, como cohetes, que ganan o pierden masa. Los

problemas de ese tipo se considerarán en la sección 12.12.† Se desprende de la ecuación (2) que la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal mv es cero cuando _**F** _ 0. De tal modo, si *la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la cantidad de movimiento lineal de la partícula permanece constante, tanto en magnitud corno en dirección.* Éste es el principio de *conservación de la cantidad de movimiento lineal* para una partícula, el cual puede reconocerse como un enunciado alternativo de la primera ley de Newton .

Movimiento angular

Considérese una partícula *P* de masa *m* que se mueve con respecto a un sistema de referencia newtoniano *Oxyz*. la cantidad de movimiento lineal de la partícula en un instante determinado se define como el vector *m***v** obtenido al multiplicar la velocidad **v** de la partícula por su masa *m.* El momento alrededor
de *0* del vector *m***v** se denomina *momento de la cantidad de movimiento, o* la *cantidad de movimiento angular* de la partícula en torno a *0* en ese instante y se denota por medio de **H***o*. Al recordar la definición del momento de un vector (sección *3.6)* y denotar mediante **r** el vector de posición de *P*, se escribe

$H_o = rxmv$ (1)

se tiene que **H***O* es un vector perpendicular al plano que contiene **r** y
*m***v** y de magnitud

$H_o = rmvsen\phi$_ (2)

donde _ es el ángulo entre **r** y *m***v** . El sentido de **H***O* puede determinarse a partir del sentido de *m***v** aplicando la regla de la mano derecha. La unidad de cantidad de movimiento angular se obtiene al multiplicar las unidades de longitud y de cantidad de movimiento lineal . Con unidades del SI se tiene (m)(kg *m/s) = kg * m^2/s
Con unidades de uso común en Estados Unidos, se escribe (ft)(lb *s) =ft * lb * s
Al descomponer los vectores r y mv en componentes y aplicar la
fórmula , se escribe

$$H_o = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

Las componentes de **H***O,* las cuales representan también los momentos de la cantidad de movimiento lineal mv alrededor de los ejes de coordenadas, se obtienen expandiendo el determinante en (4). Se tiene

$Hx = m(yv_z - zv_y)$
Hy _$=m(zv_x - xv_z)$ (5)
$Hz = m(xv_y - yv_x)$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano *xy*, se tiene *z* =*vz* =0 y las componentes *Hx y Hy* se reducen a cero. De tal modo, la cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano *xy*; en ese caso se define por completo mediante el escalar
$HO = Hz = m(xv_y - yv_x)$ (6)

que será positivo o negativo de acuerdo con el sentido en el cual se observa que la partícula se mueve desde 0. Si se recurre a coordenadas polares, se descompone la cantidad de movimiento lineal de la partícula en las componentes radial y transversal y se escribe

$H_o = rmvsen\theta = rmv_\theta$ (7)

o, al recordar de (5) que $v_\theta = r\theta$

A continuación se calcula la derivada con respecto a *t* de la cantidad de movimiento angular **H***O* de la partícula P que se mueve en el espacio. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (2), y recordar la regla para la diferenciación de un producto vectorial se escribe

$$\dot{} H_o = r \times mv + r \times mv = v \times mv + r \times ma$$

Puesto que los vectores Y *y mv* son colineales, el primer término de la expresión que se obtiene es cero; y, mediante la segunda ley de Newton, ma es igual a la suma $\sum F$ de las fuerzas que actúan sobre P. Si $r \times \sum F$ representa la suma $\sum Mo$ de los momentos alrededor de *O* de estas fuerzas, se escribe

$$\sum Mo = H_o \dot{}$$

La ecuación , resulta directamente de la segunda ley de Newton, establece que *la suma de los momentos de 0 de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento, o cantidad de movimiento angular, de la partícula alrededor de 0.*

1.7. Energía Cinética

La energía cinética de un cuerpo es una energía que surge en el fenómeno del movimiento. Esta definida como *el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad dada*. Una vez conseguida esta energía durante la aceleración, el cuerpo mantiene su energía cinética sin importar el cambio de la rapidez. Un trabajo negativo de la misma magnitud podría requerirse para que el cuerpo regrese a su estado de equilibrio**.**

Energía cinética de una partícula

En **mecánica clásica**, la energía cinética de un objeto puntual (un cuerpo tan pequeño que su dimensión puede ser ignorada), o en un sólido rígido que no rote, esta dada la

ecuación $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donde m es la masa y v es la rapidez (o velocidad) del cuerpo.

En mecánica clásica la energía cinética se puede calcular a partir de la ecuación del trabajo y la expresión de una fuerza *F* dada por la segunda ley de Newton:

$$E_c = W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{1}{2}mv^2$$

La energía cinética se incrementa con el cuadrado de la rapidez. Así la energía cinética es una medida dependiente del sistema de referencia. La energía cinética de un objeto está también relacionada con su momento lineal:

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

1.8. Ecuaciones de movimiento

En física, una **ecuación de movimiento** es una ecuación diferencial que caracteriza cómo es la evolución temporal de un sistema físico. Esta ecuación relaciona la derivada temporal de una o varias variables que caracterizan el estado físico del sistema, con otras magnitudes físicas que provocan el cambio en el sistema.

Ecuaciones de movimiento en mecánica clásica

Históricamente el primer ejemplo de ecuación del movimiento que se introdujo en física fue la segunda ley de Newton para sistemas físicos compuestos de agregados partículas materiales puntuales. En estos sistemas el estado físico de un sistema quedaba fijado por la posición y velocidad de todas las partículas en un instante dado. Hacia finales del siglo XVIII se introdujo la mecánica analítica o racional, que era una generalización de las leyes de Newton aplicables en pie de igualdad a sistemas de referencia inerciales y no inerciales, y se crearon dos enfoques básicamente equivalentes conocidos como mecánica lagrangiana y mecánica hamiltoniana, que pueden llegar a un elevado grado de abstracción y formalización. Los ejemplos clásicos de ecuación del movimiento más conocidos son:

La segunda ley de Newton que se usa en mecánica newtoniana: $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F} = 0$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange que aparecen en mecánica lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(q_i,\dot{q}_i)}{\partial q_i} = 0$$

Las ecuaciones de Hamilton que aparecen en mecánica hamiltoniana:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(p_i,q_i)}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(p_i,q_i)}{\partial q_i}$$

Ecuaciones de movimiento en teoría de la relatividad

En la teoría de la relatividad existen dos tipos de entidades físicas, las partículas y los campos. Aunque en última instancia, tal como establece la teoría cuántica de campos, las partículas son campos materiales altamente localizados, en teoría de la relatividad se pueden tratar las partículas como entes físicos localizados en el espacio-tiempo. La distinción entre estos tipos de entidades físicas hace que en teoría de la relatividad **existan dos tipos de ecuaciones de movimiento:**

Las ecuaciones de movimiento de las partículas materiales, que son la generalización relativista de las ecuaciones de la mecánica clásica.

Las ecuaciones de "movimiento" o evolución temporal de los campos físicos.

Ecuaciones de movimiento de partículas

El análogo de la primera ley de Newton en teoría de la teoría de la relatividad postula que cuando sobre las partículas no actúa ninguna fuerza estas se mueven a lo largo de las geodésicas del espacio-tiempo, es decir, sobre las líneas más "rectas" posibles o de curvatura mínima. Cuando sobre las partículas actúa alguna fuerza, la ecuación del movimiento en términos de tiempo propio de la partícula, los símbolos de Christoffel dependientes de la curvatura del espacio tiempo, y la fuerza total sobre la partícula viene dada por:

$$m\frac{\partial^2 x^k}{\partial \tau^2} + m\sum_{i,j=0}^{3} \Gamma^k_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \tau}\frac{\partial x^j}{\partial \tau} = F^k$$

Para una partícula moviéndose a través de un espacio-tiempo plano ($\Gamma^k_{ij} = 0$), con velocidad pequeña respecto a la de la luz ($\tau \approx t$) la anterior ecuación se reduce a la segunda ley de Newton.

Ecuaciones de movimiento en teoría clásica de campos

Los sistemas físicos formados por un conjunto de partículas interectuantes de la mecánica clásica y los sistemas físicos de partículas relativistas sin interacción, son sistemas con un número finito de grados de libertad, cuyas ecuaciones de movimiento vienen dadas por ecuaciones diferenciales ordinarias como todos los ejemplos anteriores. Sin embargo, los campos físicos además de evolución temporal o variación en el tiempo, presentan variación en el espacio. Esa característica hace que los campos físicos se consideren informalmente como sistemas con un número infinito de grados de libertad. Las peculiaridades de los campos hacen que sus ecuaciones de "movimiento" o evolución temporal vengan dadas por ecuaciones en derivadas parciales en lugar de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El campo físico más importante en el contexto de la teoría de la Relatividad Especial es el campo electromagnético, cuyas ecuaciones de evolución temporal vienen dadas por las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones pueden escribirse de diversas maneras y de diversas notaciones, aunque en el contexto de la teoría de la relatividad conviene escribirlas en forma explícitamente covariante en términos del tensor campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$. En esa forma, las ecuaciones se reducen a dos ecuaciones de la forma (unidades cgs):

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = \frac{4\pi}{c}J^\beta \qquad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = \epsilon_{\mu\beta\gamma}g^{\alpha\mu}\frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0$$

Donde se ha usado el convenio de sumación de Einstein, J^β son las componentes del cuadrivector densidad de corriente. En esas ecuaciones aparecen las coordendas (x^0,x^1,x^2,x^3) = (*ct*,*x*,*y*,*z*) (donde *c* es la velocidad de la luz, *t* el tiempo, y (*x,y,z*) son las coordenadas cartesinas convencionales del espacio tridimensional. Así la evolución en el tiempo del campo electromagnético, si nos fijamos en un punto concreto del espacio viene medida por las derivadas respecto a la coordenada *x*<su>0</supo> = *ct*.

En el contexto de la teoría general de la relatividad aparece un problema adicional. La propia geometría del espacio-tiempo viene representada por un campo tensorial llamado tensor métrico. El propio campo gravitatorio es una manifestación de que la geometría del espacio-tiempo no es plana o euclídea. El campo gravitatorio de hecho es proporcional a la curvatura del espacio-tiempo. Las ecuaciones de evolución vuelven a ser ecuaciones diferenciales en derivadas parciales:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha\beta}R}{2} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\alpha\beta}$$
$$R_{\alpha\beta} = R^\rho{}_{\alpha\rho\beta} = \partial_\rho\Gamma^\rho_{\beta\alpha} - \partial_\beta\Gamma^\rho_{\rho\alpha} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} - \Gamma^\rho_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\alpha}$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \right)$$

donde reaparecen los símbolos de Christoffel que aparecían en la ecuación del movimiento de las partículas. A diferencia de las ecuaciones del campo electromagnético, estas ecuaciones del campo gravitatorio o geometría del espacio-tiempo son ecuaciones no lineales debido a la presencia de términos que son el producto de dos Γ. Esto hace que las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio sean de difícil solución.

Ecuaciones de movimiento en mecánica cuántica

En mecánica cuántica existen diversos tipos de ecuación de movimiento para la función de onda según el tipo de problema o sistema cuántico estudiado. Los ejemplos más conocidos de ecuación del movimiento son:

La ecuación de Schrödinger: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

La ecuación de Klein-Gordon: $\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right] \psi = 0$

La ecuación de Dirac: $i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \left[c \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p_i + \alpha_0 mc^2 \right] \psi$

Obtenido de "http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_de_movimiento"

1.9 Cuerpo libre de momento

una masa puntual y un eje arbitrario, el momento de inercia es:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} mr^2$$

donde **m** es la masa del punto, y **r** es la distancia al eje de rotación.

Dado un sistema de partículas y un eje arbitrario, se define como la suma de los productos de las masas de las partículas por el cuadrado de la distancia *r* de cada partícula a dicho eje. Matemáticamente se expresa como:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Para un cuerpo de masa continua (Medio continuo), se generaliza como:

$$I = \int_V r^2 dm = \int_V \rho r^2 \, dV$$

El subíndice V de la integral indica que se integra sobre todo el volumen del cuerpo.

Este concepto, desempeña en el movimiento de rotación un papel análogo al de masa inercial en el caso del movimiento rectilíneo y uniforme. (La masa es la resistencia que presenta un cuerpo a ser acelerado en traslación y el Momento de Inercia es la resistencia que presenta un cuerpo a ser acelerado en rotación). Así, por ejemplo, la segunda ley de Newton: $a = F/m$ tiene como equivalente para la rotación:

$$\tau = I\alpha$$

donde:

τ es el momento aplicado al cuerpo.

I es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje de rotación y
$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración angular.
La energía cinética de un cuerpo en movimiento con velocidad *v* es $\frac{1}{2}mv^2$, mientras que la energía cinética de un cuerpo en rotación con velocidad angular ω es $\frac{1}{2}I\omega^2$. Donde *I* es el momento de inercia con respecto al eje de rotación.
La conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal tiene por equivalente la conservación del momento angular $\vec{L}$:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

El vector momento angular tiene la misma dirección que el vector velocidad angular $\vec{\omega}$.

Teorema de Steiner o teorema de los ejes paralelos

El teorema de Steiner (denominado en honor de Jakob Steiner) establece que el momento de inercia con respecto a cualquier eje paralelo a un eje que pasa por el centro de masa, es igual al momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa más el producto de la masa por el cuadrado de la distancia entre los dos ejes:

$$I_{eje} = I_{eje}^{(CM)} + Mh^2$$

donde: I_{eje} es el momento de inercia respecto al eje que no pasa por el centro de masa; $I^{(CM)}_{eje}$ es el momento de inercia para un eje paralelo al anterior que pasa por el centro de masa; *M* - Masa Total y *h* - Distancia entre los dos ejes paralelos considerados.
La demostración de este teorema resulta inmediata si se considera la descomposición de coordenadas relativa al centro de masas *C* $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_C + \mathbf{h}$ inmediata:

$$I_{eje} = \int_V \bar{\mathbf{r}}\cdot\bar{\mathbf{r}} \quad dm = \int_V (\mathbf{r}_C\cdot\mathbf{r}_C + 2\mathbf{r}_C\cdot\mathbf{h} + \mathbf{h}\cdot\mathbf{h}) \quad dm = \int_V \mathbf{r}_C\cdot\mathbf{r}_C \quad dm + \int_V 2\mathbf{r}_C\cdot\mathbf{h} \quad dm + \int_V \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} \quad dm$$

$$I_{eje} = I_{eje}^{(CM)} + \underbrace{2\mathbf{h}\cdot\int_V \mathbf{r}_C dm}_{=0} + Mh^2$$

donde el segundo término es nulo puesto que la distancia vectorial promedio de masa en torno al centro de masa es nula, por la propia definición de centro de masa.
El centro de gravedad y el centro de masa pueden no ser coincidentes, dado que el centro de masa sólo depende de la geometría del cuerpo, en cambio, el centro de gravedad depende del campo gravitacional en el que está inmerso dicho cuerpo.

Bibliografía

- Robert Resnick, David Halliday (2004). *Física 4ta. Edición Vol. 1* (en Español). SECSA, México. ISBN 970-24-0257-3.
- Mecánica Aplicada (cinemática de partículas) ***Beer,INDICE***
- Mecánica Vectorial Para Ingenieros. 6a Edición
  Ed. Mc Graw Hill Beer Ferdinad, Johnston Russel
- Ingeniería Mecánica. 4a Edición
  Ed. CECSA Hibbeler R. C.

- Mecánica Para Ingeniería
  Ed. Addison Wesley Bedfor A., Fowler W.