

## 2. DINAMICA ANALÍTICA

### 2.1.- Segunda Ley de Newton

La segunda ley de Newton se puede enunciar de la manera siguiente:

*Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante.*

La segunda ley de movimiento de Newton se comprende mejor al imaginar el siguiente experimento: una partícula se somete a una fuerza  $F$ , de dirección constante y magnitud constante  $F_1$ . Bajo la acción de esa fuerza, se observa que la partícula se mueve en línea recta y en la dirección

de la fuerza. Al determinar la posición de la partícula en diferentes instantes, se encuentra que su aceleración tiene una magnitud constante  $a_1$ . Si el experimento se repite con fuerzas  $F_2, F_3, \dots$ , o de diferente magnitud o dirección, se descubre que cada vez que la partícula se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre ella y que las magnitudes  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , de las aceleraciones son proporcionales a las magnitudes  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , de las fuerzas

Correspondientes

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \text{constante}$$

El valor constante que se obtiene para el cociente de las magnitudes de las fuerzas y aceleraciones es característico de la partícula que se considera; se denomina la *masa* de la partícula y se denota mediante  $m$ . Cuando sobre una partícula de masa  $m$  actúa una fuerza  $F$ , la fuerza  $F$  y la aceleración  $a$  de la partícula deben satisfacer entonces la relación  $F = ma$

### 2.2. Momento lineal de una partícula

El momento lineal asociado a una partícula está definido como el producto de la masa  $m$  por su velocidad  $v$ ,

$$p = mv.$$

Así, en la ecuación 3, tenemos que la velocidad del centro de masa es igual a la suma de los momentos lineales de las dos masas entre la masa total,

$$V_{CM} = \frac{p_1 + p_2}{M}.$$

Si definimos el momento lineal del centro de masa como el producto de la masa total  $M$  por la velocidad del centro de masa  $V_{CM}$ , tenemos que es igual a la suma de los momentos lineales de las dos masas:

$$P_{CM} = p_1 + p_2.$$

(4)

Al definir el momento lineal del centro de masa como lo hemos hecho, en cierta forma se está considerando como si se tuviera una partícula con masa igual a  $M$  moviéndose con velocidad  $V_{CM}$ ; por lo que debemos de esperar que al hacer el análisis de movimiento del sistema de partículas nos lleve al análisis del centro de masa considerándolo como si se tratara de una partícula, como veremos con más detalle posteriormente

## 2.3 Sistema de Unidades

Al utilizar la ecuación fundamental  $F = ma$ , las unidades de fuerza, masa, longitud y tiempo no pueden elegirse de manera arbitraria. Si eso ocurriera, la magnitud de la fuerza  $F$  que se requiere para proporcionar una aceleración  $a$  a la masa  $m$  *no* sería numéricamente igual al producto

$ma$ ; sólo sería proporcional a este producto. En consecuencia, se pueden elegir tres o cuatro unidades de manera arbitraria, pero se debe escoger la cuarta unidad de manera que se satisfaga la ecuación

$F = ma$ . Se dice entonces que las unidades forman un sistema de unidades cinéticas consistentes.

Suelen utilizarse dos sistemas de unidades cinéticas consistentes: el Sistema Internacional de Unidades y unidades utilizadas comúnmente en Estados Unidos. Ambos sistemas se estudiaron en detalle en la sección 1.3 y se describen sólo de manera breve en esta sección.

### Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI).

En este sistema, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo, y se denominan respectivamente, el *metro* (m), el *kilogramo* (kg) y el *segundo* (s). Las tres se definen en forma arbitraria. La unidad de fuerza es una unidad derivada. Se denomina *Newton* (N) y se define como la fuerza que produce una aceleración de  $1 \text{ m/s}^2$  a una masa de  $1 \text{ kg}$ . De la ecuación se describe

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Se afirma que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades.

Lo anterior significa que las tres unidades básicas elegidas son independientes de la ubicación donde se efectúan las mediciones. El metro, el kilogramo y el segundo pueden ser utilizados en cualquier

parte sobre la Tierra; incluso pueden ser usados en otro planeta. Y siempre tendrían el mismo significado.

El *peso*  $W$  de un cuerpo, o *la fuerza de gravedad* que se ejerce sobre ese cuerpo, al igual que otra fuerza, se expresará en newtons.

Puesto que un cuerpo sometido a su propio peso adquiere una aceleración igual a la aceleración de la gravedad  $g$ , se deduce de la segunda ley de Newton que la magnitud  $W$  del peso de un cuerpo de masa  $m$  es

$$W = mg$$

Al recordar que  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , se encuentra que el peso de un cuerpo de masa  $1 \text{ kg}$  es  $W = (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.81 \text{ N}$

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza se usan con frecuencia en la práctica de la ingeniería. Estos son, respectivamente, *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*†

(Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). Por definición,

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \qquad 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$$

$$1 \text{ Mg} = 1000 \text{ kg} \qquad 1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, se efectúa simplemente desplazando el punto decimal tres lugares a la derecha o la izquierda.

Otras unidades aparte de las de masa, longitud y tiempo pueden expresarse en términos de estas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de cantidad en movimiento lineal se obtiene al recordar su definición y al escribir

$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

#### Unidades de uso común en Estados Unidos.

La mayoría de los ingenieros estadounidenses siguen utilizando de forma común un sistema

en el que las unidades básicas son las de longitud, fuerza y tiempo; estas unidades corresponden, respectivamente, al *pie* (ft), la *libra* (lb), y el *segundo* (s). El segundo es el mismo que la unidad correspondiente del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como en el National Institute of Standards and Technology, cerca de Washington, y cuya masa equivale a 0.453 592 43 kg. Puesto que el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional al de la Tierra, la cual

varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe situarse a nivel del mar y a una altura de 45° para definir de manera adecuada una fuerza de 1 lb. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. En virtud de su dependencia de la atracción gravitacional terrestre, se señala que forman un sistema *gravitacional* de unidades.

En tanto que la libra estándar sirve también como la unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede utilizarse en cálculos de ingeniería, pues una unidad de ese tipo no será

consistente con las unidades básicas definidas en el párrafo anterior. En realidad, cuando actúa sobre ella una fuerza de 1 lb, esto es, cuando se somete a su propio peso, la libra estándar recibe la aceleración de la gravedad,  $g \approx 32.2 \text{ ft/s}^2$  (figura 12.6) y no la aceleración unitaria que requiere la ecuación (12.7). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa, que recibe una aceleración de  $1 \text{ ft/s}^2$  cuando se le aplica una fuerza de 1 lb (figura 12.7). Esta unidad,

llamada en ocasiones un *slug*, puede deducirse de la ecuación  $F = ma$  después de sustituir 1 lb y  $1 \text{ ft/s}^2$  en vez de  $F$  y  $a$ , respectivamente. Se escribe

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

## 2.4. Ecuaciones de movimiento y equilibrio dinámico

Considérese una partícula de masa  $m$  sobre la que actúan varias fuerzas. Se tiene que la segunda ley de Newton puede expresarse mediante la ecuación

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

que relaciona las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector  $m\mathbf{a}$ . Sin embargo, para resolver los problemas que implican el movimiento de una partícula se encontrará más conveniente sustituir la

ecuación por ecuaciones equivalentes que incluyen cantidades escalares.

#### Componentes rectangulares.

Al descomponer cada fuerza  $\mathbf{F}$  y la aceleración  $\mathbf{a}$  en componentes rectangulares, se escribe

$$\sum (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) = m(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})$$

de lo que se deduce

$$\sum F_x = m a_x \quad \sum F_y = m a_y \quad \sum F_z = m a_z$$

Al recordar de la sección 11.11 que las componentes de la aceleración son iguales a la segunda derivada de las coordenadas de la partícula, se tiene

$$\sum F_x = m \ddot{x} \quad \sum F_y = m \ddot{y} \quad \sum F_z = m \ddot{z}$$

Considérese, como un ejemplo, el movimiento de un proyectil. Si se ignora la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil después de que éste se ha lanzado es su peso  $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$ . En consecuencia las ecuaciones que definen el movimiento del proyectil son

$$m \ddot{x} = 0 \quad m \ddot{y} = -W \quad m \ddot{z} = 0$$

y las componentes de la aceleración del proyectil corresponden a

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = -W/m = -g \quad \ddot{z} = 0$$

donde  $g$  es 9.81 m/s<sup>2</sup> or 32.2 ft/s<sup>2</sup>. Las ecuaciones que se obtienen se integran de manera independiente. para obtener la velocidad y el desplazamiento del proyectil en cualquier instante.

Cuando un problema implica dos o más cuerpos, las ecuaciones de movimiento deben escribirse para cada uno de ellos. Se recuerda las secciones que todas las aceleraciones deben medirse con respecto a un sistema de referencia newtoniano. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, es posible determinar las aceleraciones con respecto a ejes unidos a la Tierra, aunque las aceleraciones relativas medidas con respecto a ejes móviles, como los ejes unidos al cuerpo acelerado, no pueden sustituirse en lugar de a en las ecuaciones de movimiento.

### EQUILIBRIO DINÁMICO

Al volver a la ecuación (12.2) y trasponer el miembro del lado derecho, se escribe la segunda ley de Newton en la forma alternativa  $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = 0$  en la que se expresa que si se suma el vector  $-m\mathbf{a}$  a las fuerzas que actúan sobre la partícula, se *obtiene un sistema de vectores equivalente a cero*

. El vector  $-m\mathbf{a}$ , de magnitud  $ma$  y de *dirección opuesta* a la de la aceleración, se denomina *vector de inercia*. De tal modo, es factible considerar que la partícula está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas dadas y del vector de inercia. Se afirma que la partícula está en *equilibrio dinámico*, y el problema que se considera puede resolverse mediante los métodos que se desarrollaron antes en estática.

En el caso de fuerzas coplanares, todos los vectores que se muestran en la , *incluyendo al vector de inercia*, pueden trazarse uno después del otro para formar un polígono vectorial cerrado.

También es posible igualar a cero la suma de los componentes de todos los vectores , incluyendo de nuevo al vector de inercia.

En consecuencia, utilizando componentes rectangulares, se escribe  $\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$  *incluyendo el vector de inercia*

Cuando se usan las componentes tangencial y normal, resulta más conveniente representar el vector de inercia por medio de sus dos componentes  $-m a_t$  y  $-m a_n$  en el mismo dibujo . La componente

tangencial del vector de inercia ofrece una medida que la resistencia de la partícula presenta a un cambio en la velocidad, en tanto que su componente normal (también llamada fuerza *centrífuga*) representa la tendencia de la partícula a abandonar su trayectoria curva. Es necesario advertir que cualquiera de estas dos componentes pueden ser cero en condiciones especiales:

1) si la partícula parte del reposo, su velocidad inicial es cero y la componente normal del vector de inercia es cero en  $t = 0$ ; 2) si la partícula se mueve con velocidad constante a lo largo de su trayectoria, la componente tangencial del vector de inercia es cero y sólo es necesario considerar su componente normal.

Debido a que mide la resistencia que la partícula ofrece cuando se trata de ponerla en movimiento, o cuando se intenta cambiar las condiciones de este mismo, los vectores

de inercia a menudo se denominan fuerzas *de inercia*. Sin embargo, las fuerzas de inercia no son similares a las que se encuentran en estática, que son fuerzas de contacto o fuerzas gravitacionales (pesos). Por consiguiente, muchas personas objetan el uso de la palabra "Fuerza" cuando se refieren al vector  $-m\mathbf{a}$ , o incluso evitan el concepto de equilibrio dinámico. Otros afirman que las fuerzas de inercia y las fuerzas reales, como las gravitacionales, afectan nuestros sentidos en la misma forma y no es posible distinguirlos por mediciones físicas. Un hombre que viaja en un elevador que se acelera

hacia arriba puede sentir que su peso se ha incrementado de manera repentina; y ninguna medida efectuada dentro del elevador podría establecer si éste en verdad está acelerado o si se ha incrementado de manera repentina la fuerza de atracción ejercida por la Tierra.

Se ha llegado a las soluciones de los problemas resueltos de este texto mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton, como se ilustra en la , y no mediante el método de equilibrio dinámico.

## 2.5. Momento angular de una partícula

Considérese una partícula  $P$  de masa  $m$  que se mueve con respecto a un sistema de referencia newtoniano  $Oxyz$ . Como se estudió en la sección 12.3, la cantidad de movimiento lineal de la partícula en un instante determinado se define como el vector  $m\mathbf{v}$  obtenido al multiplicar

la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula por su masa  $m$ . El momento alrededor de  $O$  del vector  $m\mathbf{v}$  se denomina *momento de la cantidad de movimiento*, o la *cantidad de movimiento angular* de la partícula en torno a  $O$  en ese instante y se denota por medio de  $\mathbf{H}_O$ . Al recordar la definición del momento de un vector y denotar mediante  $\mathbf{r}$  el vector de posición de  $P$ , se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} * m\mathbf{v}$$

se tiene que  $\mathbf{H}_O$  es un vector perpendicular al plano que contiene  $\mathbf{r}$  y  $m\mathbf{v}$  y de magnitud

$$H_O = rmv \sin \beta$$

donde  $\beta$  es el ángulo entre  $\mathbf{r}$  y  $m\mathbf{v}$ . El sentido de  $\mathbf{H}_O$  puede determinarse a partir del sentido de  $m\mathbf{v}$  aplicando la regla de la mano derecha. La unidad de cantidad de movimiento angular se obtiene

al multiplicar las unidades de longitud y de cantidad de movimiento lineal. Con unidades del SI se tiene

$$(m)(kg * m/s) = kg * m^2/s$$

Con unidades de uso común en Estados Unidos, se escribe

$$(ft)(lb * s) = ft * lb * s$$

Al descomponer los vectores  $\mathbf{r}$  y  $m\mathbf{v}$  en componentes y aplicar la fórmula , se escribe

$$\mathbf{H}_O = H_o = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Las componentes de  $\mathbf{H}_O$ , las cuales representan también los momentos de la cantidad de movimiento lineal  $m\mathbf{v}$  alrededor de los ejes de coordenadas, se obtienen expandiendo el determinante en . Se tiene

$$H_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$H_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$H_z = m(xv_y - yv_x)$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano  $xy$ , se tiene  $z = v_z = 0$  y las componentes  $H_x$  y  $H_y$  se reducen a cero. De tal modo, la cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano  $xy$ ; en ese caso se define por completo mediante el escalar

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x)$$

que será positivo o negativo de acuerdo con el sentido en el cual se observa que la partícula se mueve desde  $O$ . Si se recurre a coordenadas polares, se descompone la cantidad de movimiento lineal de la partícula en las componentes radial y transversal y se escribe

$$H_O = r m v_{\theta} \sin \phi = r m v_{\theta}$$

o, al recordar de que  $v_{\theta} = r \dot{\theta}$ ,

$$H_O = r^2 m \dot{\theta}$$

A continuación se calcula la derivada con respecto a  $t$  de la cantidad de movimiento angular  $H_O$  de la partícula  $P$  que se mueve en el espacio. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación, y recordar

la regla para la diferenciación de un producto vectorial, se escribe

$$\dot{H}_O = \dot{r} \times m v + r \times m \dot{v} = v \times m v + r \times m a$$

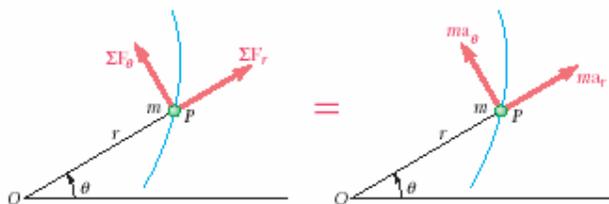
Puesto que los vectores  $v$  y  $m v$  son colineales, el primer término de la expresión que se obtiene es cero; y, mediante la segunda ley de Newton,  $m a$  es igual a la suma  $\Sigma F$  de las fuerzas que actúan sobre  $P$ . Si  $r \times \Sigma F$  representa la suma  $\Sigma M_O$  de los momentos alrededor de  $O$  de estas fuerzas, se escribe

$$\dot{H}_O = \Sigma M_O$$

La ecuación, resulta directamente de la segunda ley de Newton, establece que la suma de los momentos de  $O$  de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento, o cantidad de movimiento angular, de la partícula alrededor de  $O$ .

## 2.6. Ecuaciones de movimiento radial y transversal

Considérese una partícula  $P$ , de coordenadas polares  $r$  y  $\theta$ , que se mueve en un plano bajo la acción de varias fuerzas. Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en las componentes radial y transversal y sustituir la ecuación, se obtienen las dos ecuaciones escalares



Al sustituir  $a_r$  y  $a_{\theta}$  de acuerdo con las ecuaciones, se tiene

$$\Sigma F_r = m(r'' - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Sigma F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Las ecuaciones que se obtienen pueden resolverse para dos incógnitas, Será posible deducir la ecuación Al recordar y notar que  $\Sigma \mathbf{M}_O = r\Sigma F_{\theta}$  la ecuación produce

$$r\Sigma F_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$

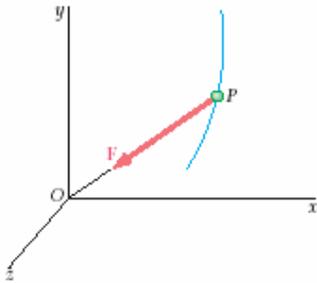
$$r\Sigma F_{\theta} = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

y, después de dividir ambos miembros entre  $r$ ,

$$\Sigma F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

## 2.7. Movimiento bajo la fuerza central

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula  $P$  es una fuerza  $\mathbf{F}$  dirigida hacia  $O$  alejándose de un punto fijo  $O$ , se dice que la partícula se está moviendo *bajo una fuerza central*, y el punto  $O$  se conoce como el *centro de fuerza*. Puesto que la línea de acción de  $\mathbf{F}$  pasa por  $O$ , se debe tener  $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$  en cualquier instante. Al sustituir la ecuación, se obtiene



$$HO = 0$$

para todos los valores de  $t$  e, integrar en  $t$ ,

$$HO = \text{constante}$$

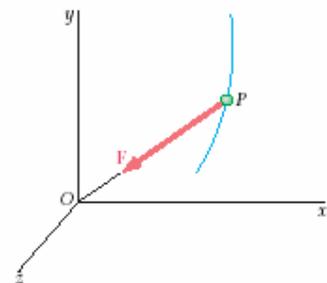
Se concluye en consecuencia que *la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección.*

Al recordar la definición de la cantidad de movimiento angular de

una partícula, se escribe

$$\mathbf{r} * m\mathbf{v} = \mathbf{HO} = \text{constante}$$

de la cual se concluye que el vector de posición  $\mathbf{r}$  de la partícula  $P$  debe ser perpendicular al vector constante  $\mathbf{HO}$ . Por consiguiente, una partícula sometida a una fuerza central se mueve en un plano fijo perpendicular a  $\mathbf{HO}$ . El vector  $\mathbf{HO}$  y el plano fijo se definen mediante el vector de posición



inicial  $\mathbf{r}_0$  y la velocidad inicial  $\mathbf{v}_0$  de la partícula. Por conveniencia, se considerará que el plano de la figura coincide con el plano fijo de movimiento.

Puesto que la magnitud  $HO$  de la cantidad de movimiento angular

de la partícula  $P$  es constante, el miembro del lado derecho de la ecuación debe ser constante. Por lo tanto, se escribe

$$rmv \sin \phi = r_0 m v_0 \sin \phi_0$$

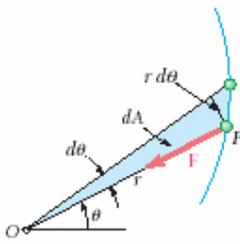
Esta relación se aplica al movimiento de cualquier partícula sometida a una fuerza central. Puesto que la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre un planeta es una fuerza central dirigida hacia el centro del Sol, la ecuación es fundamental para el estudio del movimiento planetario. Por una razón similar, también es fundamental para el estudio del movimiento de vehículos espaciales en órbita alrededor de la Tierra. De manera alternativa, al recordar la ecuación, es posible expresar el hecho de que la magnitud  $HO$  de la cantidad de movimiento angular de la partícula  $P$  es constante al escribir

$$m^2 \dot{\theta} = H_O = \text{constante}$$

o, dividir entre  $m$  y denotar por  $h$  el movimiento angular por masa unitaria  $HO/m$ ,

$$r^2 \dot{\theta} = h$$

Es posible dar a la ecuación una interpretación geométrica interesante.



Si se observa en la figura que el vector radial  $OP$  barre

un área infinitesimal  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$  conforme gira un ángulo

$d\theta$ , y si se define la *velocidad de área* de la partícula como el cociente  $dA/dt$ , se nota que el miembro del lado izquierdo de la ecuación representa el doble de la velocidad de área de la partícula. Por consiguiente, se concluye que *cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central, su velocidad de*

*área es constante.*

## 2.8. Trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central

Considérese una partícula  $P$  que se mueve bajo el efecto de una fuerza central  $F$ . Se desea obtener la ecuación diferencial que define su trayectoria. Si se supone que la fuerza  $F$  está dirigida hacia el centro de fuerza  $O$ , se tiene que  $\sum F_r$  y  $\sum F_\theta$  se reduce, respectivamente, a  $-F$  y *cero* en las ecuaciones (12.21) y (12.22). Por lo tanto, se escribe

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -F \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones definen el movimiento de  $P$ . Sin embargo, se sustituye la ecuación por la ecuación, la cual es equivalente a la ecuación, lo cual se verifica sin dificultad al diferenciarla con respecto a  $t$ , pero cuyo uso es más conveniente. Se escribe

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad \text{o} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$$

La ecuación se usa para eliminar la variable independiente  $t$  de la ecuación. Al resolver la ecuación para  $\theta$  o  $d\theta/dt$  se tiene

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$$

de la cual se deduce que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

o, al sustituir  $\dot{r}$  de ,

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[ -h \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

La sustitución de  $\dot{\theta}$  y  $\ddot{r}$  de respectivamente, en la ecuación e introducir la función  $u = 1/r$ , se obtiene

después de simplificaciones

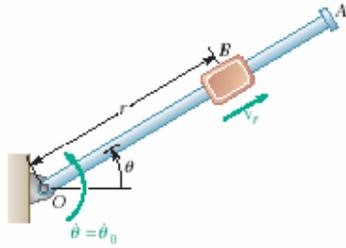
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2 u^2}$$

Para obtener la ecuación , se supuso que la fuerza  $F$  estaba dirigida hacia  $O$ . Por lo tanto, la magnitud  $F$  será positiva si  $F$  realmente apunta hacia  $O$  (fuerza atractiva) y negativa si  $F$  apunta alejándose de  $O$  (fuerza repulsiva). Si  $F$  es una función conocida de  $r$  y, en consecuencia, de  $u$ , la ecuación es una ecuación diferencial en  $u$  y  $\theta$  que define a la trayectoria seguida por la partícula bajo la acción de la fuerza central  $F$ . La ecuación de la trayectoria se obtiene al resolver la ecuación diferencial (12.37) para  $u$  con una función de  $\theta$  y al determinar las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales.

## Bibliografía

- Robert Resnick, David Halliday (2004). *Física 4ta. Edición Vol. 1* (en Español). SECSA, México. [ISBN 970-24-0257-3](#).
- Mecánica Aplicada (cinemática de partículas) **Beer,INDICE**
- Mecánica Vectorial Para Ingenieros. 6a Edición  
Ed. Mc Graw Hill Beer Ferdinand, Johnston Russel
- Ingeniería Mecánica. 4a Edición  
Ed. CECSA Hibbeler R. C.
- Mecánica Para Ingeniería  
Ed. Addison Wesley Bedford A., Fowler W..

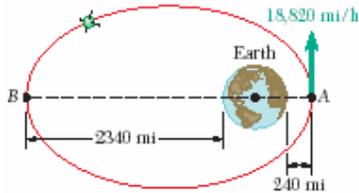
Actividades adicionales:



1.-

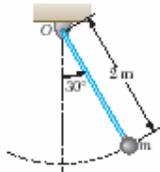
Un bloque  $B$  de masa  $m$  se puede deslizar libremente sobre un brazo  $OA$  sin fricción, que gira en un plano horizontal a razón constante  $\dot{\theta}_0$ . Si se sabe que  $B$  se suelta a una distancia  $r_0$  de  $O$ , exprese como función de  $r$ ,  
 a) la componente  $v_r$ , de la velocidad de  $B$  a lo largo de  $OA$ , b) la magnitud de la fuerza horizontal  $F$  ejercida sobre  $B$  por el brazo  $OA$ .

2.-



Se lanza un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 18 820 mi/h desde una altura de 240 mi. Determine la velocidad del satélite cuando éste alcanza su altura máxima de 2 340 mi. Recuerdese que el radio de la Tierra es de 3 960 mi.

3.-



La plomada de un péndulo de 2 m describe un arco de círculo en un plano vertical. Si la tensión de la cuerda de estos puntos es cinco veces el peso de la plomada en la posición que se indica, determine la velocidad y la aceleración de la plomada en esa posición.