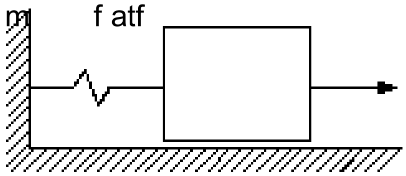
3.1. Características de los componentes de sistemas discretos

Veremos a continuación una serie de conceptos que se utilizan habitualmente en el estudio de vibraciones y que es necesario tener presentes.

Vibración: Es un movimiento oscilatorio que aparece, por lo general, en los sistemas mecánicos sometidos a la acción de fuerzas variables con el tiempo. Distinguiremos entre vibración y oscilación. La diferencia entre ellas radica en que la vibración implica la existencia de energía potencial elástica, mientras que la oscilación no. Un bloque como el de la Figura 9.1 tiene un movimiento vibratorio, mientras que un péndulo como el de la Figura 9.2 tiene movimiento oscilatorio. Puesto que los sistemas vibratorios y oscilatorios se rigen por ecuaciones similares, es costumbre estudiarlos juntos y prescindir de la diferencia conceptual entre ambas.

k m f atf



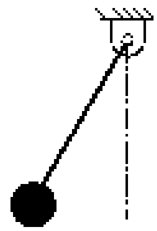
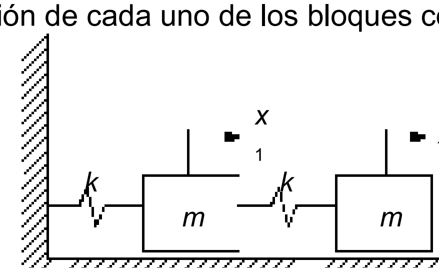


Figura 9.1. Sistema vibratorio. Figura 9.2. Sistema oscilatorio.

Grados de libertad: Son los parámetros necesarios para definir de forma unívoca la configuración del sistema vibratorio. Por ejemplo, el sistema de la Figura 9.3 tiene 2 grados de libertad, que son las dos coordenadas x1 y x2 que definen la posición de cada uno de los bloques con respecto a sus posiciones de referencia.



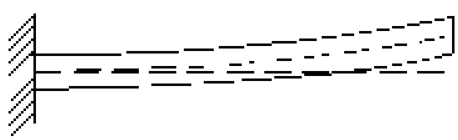


Figura 9.3. Sistema de discreto de 2 grados de libertad.

Figura 9.4. Sistema continuo

Alejo Avello, Tecnun (Universidad de Navarra).

Vibraciones en sistemas con un grado de libertad

Sistemas discretos y sistemas continuos: Se denominan sistemas discretos aquellos que pueden ser definidos mediante un número finito de grados de libertad y sistemas continuos aquellos que necesitan infinitos grados de libertad para ser exactamente definidos. Por ejemplo, el sistema de dos grados de libertad de la Figura 9.3 es un sistema discreto. En cambio, la viga de la Figura 9.4 es un sistema continuo pues para conocer su deformada es necesario especificar el desplazamiento vertical de cada uno de sus puntos, que viene dado por una función de la forma $y(x)$. Matemáticamente, los sistemas discretos conducen a ecuaciones diferenciales *ordinarias*, mientras que los sistemas continuos conducen a ecuaciones diferenciales en *derivadas parciales*. El movimiento vibratorio de los sistemas continuos, a excepción de unos pocos sistemas con geometrías sencillas, suele ser irresoluble con métodos analíticos. Para resolverlos, se suelen transformar en discretos por técnicas de discretización como el Método de los Elementos Finitos.

Sistemas lineales y sistemas no lineales: Sea un sistema mecánico que responde con movimientos $x1(t)$ y $x2(t)$ a dos fuerzas $f1(t)$ y $f1(t)$, respectivamente. Dicho sistema se denomina *lineal* si a una fuerza $f3(t)=a1f1(t) +a2f2(t)$ responde con un movimiento $x3(t)=a1x1(t) +a2x2(t)$. Una de las características de los sistemas lineales es que en ellos se puede aplicar el principio de superposición, que establece que la respuesta a una excitación combinada se puede obtener combinando las res- puestas a cada una de las excitaciones simples.

Sistemas definidos y semidefinidos: Un sistema se denomina *definido* cuando cualquier movimiento que en él se produzca conlleva una variación de la energía potencial elástica. En cambio, un sistema se dice *semidefinido* cuando existe algún movimiento que no conlleva variación de la energía potencial elástica. La Figura 9.5 es un ejemplo de un sistema definido. La Figura 9.6, en cambio, muestra un sistema semidefinido, en el que un desplazamiento de igual magnitud en ambos bloques no produce variación de la energía potencial.

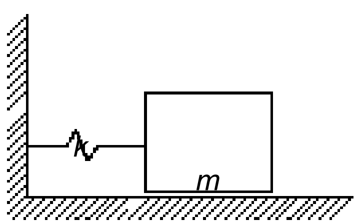


Figura 9.5. Sistema definido.

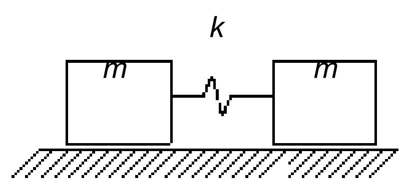


Figura 9.6. Sistema semidefinido.

Vibraciones libres y forzadas: Vibraciones libres son las que se producen al sacar un sistema de su posición de equilibrio y dejarlo oscilar libremente. Vibraciones forzadas son aquéllas que se producen por acción de fuerzas dependientes del tiempo.

Los distintos tipos de fuerzas que pueden actuar se clasifican de la siguiente manera:
Armónicas: son funciones del tipo seno o coseno.

Periódicas: son fuerzas que se reproducen con una cierta periodicidad.

Impulsos: responden al concepto mecánico de percusión.

Arbitrarias: cualquier fuerza que no se incluya en uno de los apartados anteriores.

Respuesta estacionaria y respuesta transitoria: La respuesta vibratoria de los sistemas mecánicos suele estar formada por dos partes: una parte que tiende a cero con el tiempo y que se denomina respuesta *transitoria* y otra que permanece, y que se denomina respuesta *estacionaria*. Normalmente, la parte transitoria se debe a las condiciones iniciales y a las fuerzas independientes del tiempo, mientras que la estacionaria se debe a fuerzas dependientes del tiempo.

Vibraciones deterministas y vibraciones aleatorias: Las vibraciones se denominan *deterministas* cuando se conocen las fuerzas excitadoras, y se denominan *aleatorias* cuando sólo se conocen valores estadísticos de las excitaciones. En es- te último caso, no se puede calcular la respuesta exacta y, en su lugar, se relacionan los valores estadísticos de la excitación con los de la respuesta. Ejemplos de fuerzas aleatorias son las provocadas por los terremotos o las originadas por el viento.

Utilidad de los sistemas de un grado de libertad: Los sistemas de un grado de libertad son, por una parte, sencillos y, por otra, se dan en la práctica en sistemas que son directamente asimilables a sistemas vibratorios de un grado de libertad. Además, otra propiedad importante que se verá en el Capítulo 10, es que los sistemas vibratorios de *N* grados de libertad se pueden estudiar como *N* sistemas de un grado de libertad. Por tanto, muchos de los resultados obtenidos en este Capítulo serán aplicables también a los sistemas de *N* grados de libertad.

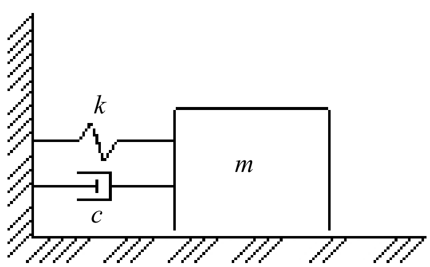


Figura 9.7. Sistema básico de un grado de libertad.

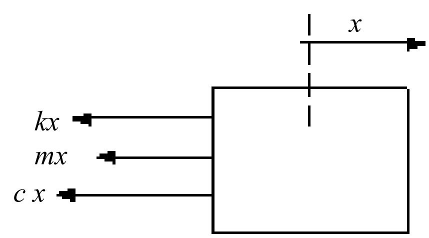


Figura 9.8. Diagrama de sólido libre del sistema básico de un grado de libertad.

3.2 Energía Potencial y cinética

Una cosa interesante sobre la velocidad final de un objeto que desciende (sin fricción) desde una altura dada **h**, a lo largo de una superficie inclinada: se puede cambiar la inclinación, se puede incluso cambiar la forma de la superficie, a pesar de todo la velocidad final con la que alcanza el fondo será siempre la misma. Si no hay fricción, cualquier esquiador, deslizándose por una colina nevada desde la cima a la base, llegará con la misma velocidad, tanto si la pista tomada es una fácil de principiantes, como si es una de expertos.

Reducir la inclinación de la superficie reduce la aceleración **a**, pero también se alarga el tiempo de descenso y esas dos variaciones se anulan, dejando la velocidad final sin cambios. La misma velocidad se obtiene también si el objeto cae verticalmente desde esa altura *h* y en ese caso se deduce fácilmente como sigue. La duración *t* de la caída está dada por

$$h = g\, t^2/2$$

Multiplicando ambos lados por *g*:

$$gh = g^2 t^2/2$$

Entonces la velocidad final

$$v = gt$$

se obtiene

$$gh = v^2/2$$

Con la última ecuación, asumiendo que nada interfiere con este movimiento, cuando el objeto pierde altura, v^2 crece y, tal y como ya se advirtió, este crecimiento no depende de la trayectoria tomada.

Este cambio entre *h* y v^2 también funciona en la dirección contraria: un objeto rodando **hacia arriba** sobre una pendiente, pierde v^2 en proporción directa a la altura *h* que gana. Una canica rodando hacia abajo por dentro de un tazón liso, gana velocidad cuando se acerca al fondo, luego, cuando sube por el otro lado, la pierde de nuevo. Si no existe fricción, volverá de nuevo a subir a la misma altura desde donde ha comenzado el movimiento.

Un péndulo simple, ó un niño en un columpio, también suben a causa de v^2 y retornan de nuevo, de la misma forma. Los ciclistas son muy conscientes de que la velocidad que ganan rodando hacia abajo de una ladera puede cambiarse por altura cuando escalan la siguiente pendiente. Es como si la altura nos diera **algo** con lo que podremos comprar velocidad, la que luego, si la ocasión lo demanda, puede convertirse de nuevo en altura.

Ese "algo" se llama **energía**. Ya ha sido planteada brevemente en una sección anterior.

Este balanceo atrás y adelante sugiere que quizás la suma

$$gh + v^2/2$$

tiene un valor constante: si un lado disminuye, el otro lado se hace mayor. Esta suma ¿es la energía?. No exactamente. El esfuerzo de conseguir que un peso grande se eleve una altura *h* es mayor que el necesario para elevar uno menor. Déjenme ahora llamar a la cantidad de materia de un objeto su "masa". Es obvio que es proporcional al peso del objeto, pero como veremos más tarde, el concepto de masa es más complicado que eso.

Si la energía es la medida del esfuerzo para elevar una carga, esa energía deberá ser proporcional a su masa *m*. Así, multiplicamos todo por *m* y escribimos

$$\text{Energía} = E = mgh + mv^2/2$$

Un hecho bien conocido y ya aludido, es que en un sistema e no interacciona con su entorno, la energía total indicada por la letra *E,* no cambia: "se conserva". En un péndulo, en el punto más extremo de su oscilación, $v = 0$ y, por lo tanto, el segundo término de la fórmula desaparece, mientras que el primer término está con su mayor valor. Después, cuando la masa desciende, $\mathbf{mv^2/2}$ aumenta y **mgh** disminuye, hasta que en la parte baja de la oscilación el primer término está en su valor mínimo y el segundo alcanza el máximo. En el ascenso el proceso se invierte y la secuencia se repite para cada oscilación.

Ambos términos de la ecuación superior tienen nombre: ***mgh*** es la **energía potencial,** la energía de la posición, y $\boldsymbol{mv^2/2}$ es la **energía cinética**, la energía del movimiento.

El número exacto que representa *E* dependerá desde donde se mide *h* (¿en el suelo?, ¿al nivel del mar?, ¿en el centro de la Tierra?). Son posibles diferentes elecciones y cada una nos lleva a valores diferentes de *E*: la fórmula es solo significativa si se elige una cierta altura de referencia donde $h=0$.

3.3. **Ecuación diferencial del movimiento para sistemas de segundo orden**

La Figura 9.7 muestra el sistema básico de un grado de libertad, compuesto por una masa puntual *m*, un muelle de rigidez *k* y un amortiguador de constante *c*. Llamando *x* al desplazamiento del bloque respecto de su posición inicial de equilibrio, el diagrama de sólido libre del sistema, incluyendo la fuerza de inercia, se muestra en la Figura 9.8. Sumando las fuerzas horizontales e igualando a cero, se obtiene:

$mx + cx + kx = 0$ …….(a)

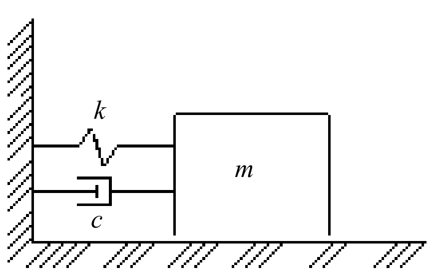


Figura 9.7. Sistema básico de un grado de libertad.

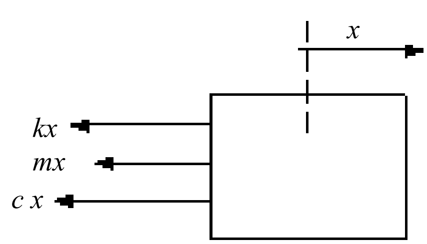


Figura 9.8. Diagrama de sólido libre del sistema básico de un grado de libertad.

La ecuación (9.1) representa una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, cuya resolución se verá en los apartados posteriores para distintos valores de los coeficientes k y c.
Sistemas lineales y sistemas no lineales: Sea un sistema mecánico que responde con movimientos $x1(t)$ y $x2(t)$ a dos fuerzas $f1(t)$ y $f1(t)$, respectivamente. Dicho sis tema se denomina *lineal* si a una fuerza $f3(t)=a1f1(t)+a2f2(t)$ responde con un movimiento $x3(t)=a1x1(t)+a2x2(t)$. Una de las características de los sistemas lineales es que en ellos se puede aplicar el principio de superposición, que establece que la respuesta a una excitación combinada se puede obtener combinando las respuestas a cada una de las excitaciones simples.

3.4. Respuesta libre de sistemas no amortiguados

Consideremos en primer lugar el caso más sencillo, sin amortiguamiento. Particularizando la ecuación (a) para c=0 tenemos

$$mx + kx = 0 \tag{9.2}$$

Por conveniencia, se divide la ecuación (9.2) por la masa m, resultando

$$x + \omega^2_n x = 0 \tag{9.3}$$

donde ω_n es una constante que se denomina *frecuencia natural* del sistema, y que va- le, por definición

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.4}$$

La solución general a la ecuación homogénea (9.3) se obtiene ensayando solucio- nes del tipo $x(t) = Ae^{\lambda t}$. Sustituyendo en (9.3) se obtiene

$$A(\lambda^2 + \omega^2_n)e^{\lambda t} = 0 \tag{9.5}$$

Por lógica, ni A ni $e^{\lambda t}$ pueden ser nulos, ya que si no la respuesta $x(t)$ sería nula. Por tanto, el paréntesis debe ser nulo, lo que equivale a

$$\lambda = \pm i\omega_n \tag{9.6}$$

La solución *x(t)* se obtiene, finalmente, como una combinación lineal de las dos soluciones posibles

$$x(t) = A_1 e^{i\omega nt} + A_2 e^{-i\omega nt} \tag{9.7}$$

Obsérvese que aunque en la ecuación (9.7) aparecen números complejos la res- puesta $x(t)$ ha de ser real, ya que de otra forma no tendría sentido físico. Para ello, es necesario que las constantes A_1 y A_2 sean números complejos conjugados. De esta manera, las partes complejas de los dos sumandos de la ecuación (9.7) se anulan y el resultado es real. La ecuación se puede reescribir utilizando funciones trigonométricas. Para ello sustituimos los términos exponenciales complejos $e^{i\omega nt}$ y $e^{-i\omega_n t}$ por sus equivalentes trigonométricos, mediante las expresiones

$$e^{i\omega nt} = \cos\omega_n t + i\,\mathrm{sen}\;\omega_n t$$
$$e^{-i\omega nt} = \cos\omega_n t - i\,\mathrm{sen}\;\omega_n t \qquad (9.8)$$

lo que conduce a

$$x(t) = (A_1 + A_2)\cos\omega_n t + i(A_1 - A_2)\,\mathrm{sen}\;\omega_n t \qquad (9.9)$$

Puesto que A_1 y A_2 son complejos conjugados, la suma $A_1 + A_2$ es un número real al al que podemos llamar B_1 y el término $i(A_1 - A_2)$ también es un número real al que podemos llamar B_2. Introduciendo estos dos nuevos términos, la ecuación (9.9) queda de la forma

3.5 Conceptos fundamentales

3.5.1. Frecuencia Natural
3.5.2. Frecuencia amortiguada
3.5.3. Frecuencia Crítica
3.5.4. Factor de amortiguación
3.5.5. Fuerza transmitida

3.6. Respuesta de excitación armónica

Excitación armónica

La función fuerza de la excitación armónica es la función armónica, es decir funciones de senoidal y cósenoidal. Este tipo de excitación es común a muchos sistema que involucra el movimiento reciproca. Es más, pueden representarse muchas otras fuerzas como un una serie de funciones armónicas infinito. Por el principio de superposición, la respuesta es la suma de la respuestas de la armónica individual.

Es más conveniente usar la técnica de dominio de frecuencia resolviendo los problemas de la excitación armónicos.

Esto es porque la contestación a las frecuencias de la excitación diferentes puede verse en un gráfico.

Permítanos enfocar en la solución particular de

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$$

normalice la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \cos\omega t, \;\; f_0 = F_0 / m$$

$$f(t) = f_0\,\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right]$$

resolviendo y solucinando para $z(t)$ from $\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = f_0 e^{i\omega t}$

es la parte real $z(t);\ \ x(t) = \mathrm{Re}\left[z(t)\right]$

Asuma la solución para tener la misma forma como la función impelente

$z(t) = Z(i\omega)e^{i\omega t}$ la misma frecuencia como la la entrada con diferente magnitud y fase

$$\left(-\omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n + \omega_n^2\right)Z(i\omega)e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$Z(i\omega) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n} = \frac{f_0 / \omega_n^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + i2\zeta\omega/\omega_n}$$

$$= \frac{F_0}{k\left[1 - (\omega/\omega_n)^2 + i2\zeta\omega/\omega_n\right]}$$

$$z(t) = \frac{F_0}{k\left[1 - r^2 + i2\zeta r\right]}e^{i\omega t} = H(i\omega)F_0 e^{i\omega t}$$

$$\therefore x(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{F_0}{k\left[1 - r^2 + i2\zeta r\right]}e^{i\omega t}\right],\ r = \omega/\omega_n$$

$$\text{If } H(i\omega) = \frac{1}{k\left[1 - r^2 + i2\zeta r\right]} = \left|H(i\omega)\right|e^{i\theta} \text{ is the frequency response}$$

$$\therefore x(t) = F_0\left|H(i\omega)\right|\cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{where } \left|H(i\omega)\right| = \frac{1}{k\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2\zeta r)^2}} = \text{ magnitude}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-2\zeta r}{1 - r^2} = \text{ phase}$$

Los sistema modulares de entrada armónica por un magnitud $\left|H(i\omega)\right|$ y fase $\measuredangle H(i\omega)$ la respuesta total el homogéneo la solución particular. Revoque la solución homogénea del sistema del sin amortiguamiento

$$x_h = Ce^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi) \text{ or } x_h = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A_1 \sin\omega_d t + A_2 \cos\omega_d t\right)$$

$$\therefore x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi) + F_0\left|H(i\omega)\right|\cos(\omega t + \theta)$$

$$\text{or } x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A_1 \sin\omega_d t + A_2 \cos\omega_d t\right) + F_0\left|H(i\omega)\right|\cos(\omega t + \theta)$$

Las condiciones iniciales se usarán para determinar, o ,They será diferente de aquéllos de contestación libre porque el término transeúnte es ahora en parte debido a la fuerza de la excitación y en parte debido a las condiciones iniciales

3.7 Respuesta a un impulso unitario

La extensión de la función impulso unitario al tiempo-discreto se convierte en una trivialidad. Todo lo que realmente necesitamos es darnos cuenta que la integración en tiempo-continuo equivale a una sumatoria en tiempo-discreto. Por lo tanto buscaremos una señal que al sumarla sea cero y al mismo tiempo sea cero en todas partes excepto en el origen.
Impulso de Tiempo-Discreto

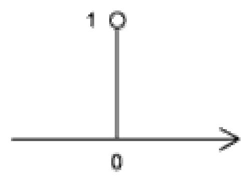


Figura 3: Representación gráfica del impulso discreto

Al analizar una gráfica de tiempo-discreto de cualquier señal discreta, uno puede notar que todas las señales discretas están compuestas de un conjunto de muestras unitarias que están escalados y desplazados en el tiempo. Si dejamos que el valor de una secuencia en cada entero k sea descrita por $s[k]$ y la muestra unitaria retrasado que ocurre en k sea escrito como $\delta[n-k]$, nosotros podríamos escribir cualquier señal como la suma de impulsos unitarios retrasados que son escalados por un valor de la señal, o por coeficientes de escalamiento.

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(s[k] \delta[n-k] \right) \quad (5)$$

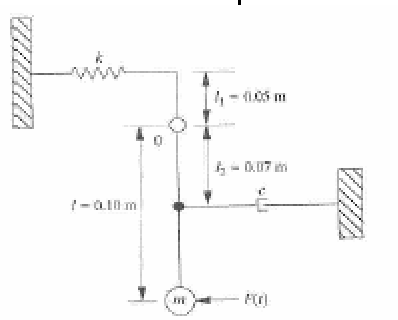
Esta descomposición es una propiedad que solo se aplica a señales de tiempo-discreto y resulta ser una propiedad muy útil para estas señales.

Actividades complementarias.

1.- Investigar y desarrollar los siguientes temas:
- 3.5 Conceptos fundamentales
  - 3.5.1. Frecuencia Natural
  - 3.5.2. Frecuencia amortiguada
  - 3.5.3. Frecuencia Crítica
  - 3.5.4. Factor de amortiguación
  - 3.5.5 Fuerza transmitida

2.- Calcule y trace la respuesta de un sistema del resorte-masa a una fuerza de magnitud 23 N, frecuencia tendencia de dos veces la frecuencia natural e i.c. dado por el x0 = 0 m y v0 = 0.2 m/s. La masa del sistema es 10 kg y la tension del resorte es 1000 N/m.

3.- Considere el mecanismo montado sobre un eje con el $k=4x10^3$ N/m, $l_1=0.05$ m, $l_2=0.07$ m, $l=0.10$ m, y kg del m=40.
La masa de la viga es 40kg qué se monta sobre un eje al punto O y se asume estar rígido.
a.-Calcule c para que la proporción humedeciendo del sistema sea 0.2.
b.- También determine la amplitud de vibración del
la respuesta del sostener-estado si una fuerza de 10 N es aplicada



a la masa a una frecuencia de 10 rad/s