Curso de Álgebra Lineal

1. NÚMEROS COMPLEJOS

1.1 Definición, origen y operaciones fundamentales con números complejos

Definición. Un número complejo, z, es una pareja ordenada (a, b) de números reales tales z = (a, b) que cumplen conciertas propiedades.

Origen. Los números complejos tiene su origen en la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Como puede observarse al encontrar la solución para esta ecuación se obtiene que $x= \sqrt{-1}$, pero en los números reales este número no existe, pues no existe un número real cuyo cuadrado sea -1. Es así como fueron desarrollados los números complejos, y a esa raíz se le llamo número imaginario el cual se indica con la letra "i", la cual se define como $i = \sqrt{-1}$.

Operaciones Los números reales a, b se denominan parte real y parte imaginaria, respectivamente, del número complejo z, es decir, a = parte real de z = Re(z), b = parte imaginaria de z = Im(z).

La pareja (x, 0) se identifica con el número real x, mientras que una pareja del tipo (0, y) es un número imaginario puro. La pareja (0,1) se llama unidad imaginaria "i".

Los números complejos $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, son iguales sí y sólo sí sus parte reales a_1 y a_2 son iguales y sus partes imaginarias b_1 y b_2 son iguales, en otra palabras, $z_1 = z_2$, sí y sólo sí $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Los números complejos cumplen con las siguientes reglas de operación:

<u>Suma</u>, para cada par de números complejos z_1 y z_2 existe un número complejo único z_3, llamado suma de z_1 y z_2, denotado por $z_3 = z_1 + z_2$, esto queda definido de la siguiente forma: si $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, entonces $z3 = z1 + z2 = = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

<u>Multiplicación</u>, para cada par de números complejos z_1 y z_2 existe un número complejo único z_3, llamado producto de z_1 y z_2, denotado por $z_3 = z_1 \cdot z_2$,

definido en la forma siguiente: si $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, entonces $z_3 = z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1)$.

Ejemplos.

Si $z_1 = (4, -7)$ y $z_2 = (9,3)$. Calcular $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$.

$z_1 + z_2 = (4, -7) + (9, 3) = (4 + 9, -7 + 3) = (13, -4)$

$z_1 \cdot z_2 = (4, -7) \cdot (9,3) = (36 + 21, 12 - 63) = (57, - 51)$

1.2 Potencias de "i", módulo o valor absoluto de un número complejo

Los números complejos surgen por la necesidad de encontrar la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, cuyas soluciones son: $x = \pm \sqrt[2]{-1}$, como puede observarse esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales ya que no existe un número real que elevado al cuadrado de como resultado -1.

Este nuevo número se definió como un número imaginario denotado por la letra i, de manera que $i = \sqrt[2]{-1}$, y es tal que se tienen los siguientes valores o potencias de i.

$I^2 = -1$

$I^3 = -\sqrt[2]{-1}$

$I^4 = 1$

$I^5 = \sqrt[2]{-1}$

$I^6 = -1$

De esta manera surge un nuevo sistema numérico, llamado sistema de los números complejos, que es un sistema numérico más amplio y que contiene totalmente a sistema de los números reales.

Los números complejos se denotan con la letra C, y el valor absoluto de un número complejo se expresa de la siguiente manera. Sea $z = x + i y$, un número complejo, el valor absoluto (norma o modulo) para un numero complejo se define como $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

1.3 Forma polar y exponencial de un número complejo

Los números naturales, enteros, fraccionarios y reales se pueden representar como puntos de una recta (la recta de los números reales).

Los Números Complejos podemos imaginarlos como puntos de un plano (el plano de los números complejos). En ese plano podemos trazar unos ejes perpendiculares que nos sirvan de referencia para localizar los puntos del plano.

Lo habitual es utilizar las coordenadas del punto (x,y). Cuando representamos un número complejo de esta forma decimos que está en forma cartesiana.

Esta interpretación de los números complejos (considerarlos puntos en un plano) se debe a Gauss y a Hamilton.

También se suele utilizar un vector para localizar el punto.

En un vector con principio en el origen de coordenadas y fin en el punto, identifica el punto de una manera inequívoca.

Ese vector lo podemos descomponer en dos vectores: un vector con principio en el origen de coordenadas y fin el valor de la abscisa del punto (x, y) y otro vector con principio el origen de coordenadas y fin la ordenada del punto (x, y).

Entonces el punto se representaría como una suma de vectores a + b.

Si definimos unos vectores unitarios sobre el Eje X o Real, ya que en el representamos la Parte Real del número complejo y sobre el eje Y o Eje Imaginario, representamos la parte Imaginaria. Entonces podemos representar el número de esta forma xr + yi.

Los vectores r e i tienen módulo 1, además el vector i se define cumpliendo esta condición: i2 = -1.

Cómo r tiene módulo 1 y sus potencias también son 1, no se escribe, quedando por lo tanto el número en la forma x + yi. Esta forma de representar un número complejo se llama Forma Binaria.

Se puede representar un número complejo cualquiera $z = a + bi$ en forma polar, dando su módulo y su argumento. Esta forma también se llama forma trigonométrica.

El módulo de un número complejo z es la longitud del vector que lo representa.

$$|z| = r$$

El Argumento de un complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real.

$$\arg(z) = a$$

Por lo cual $z = r(\cos ð + i \operatorname{sen} \alpha)$

Forma Binomial

Forma binomial $z = a + bi$

1.4 Teorema de Moivre, potencias y extracción de raíces de un número complejo

El teorema de Moivre afirma que para un ángulo arbitrario "α" y cualquier número entero n, $(\cos \alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha)$. En particular, si n es un número natural, entonces, $(\cos \alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha$ y

$(\cos \alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha)^n = \cos(-n\alpha) \pm i \operatorname{sen}(-n\alpha)$