SESIÓN10: BASES Y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Base de un espacio vectorial

Base y *Dimensión*.

Las *bases* revelan la estructura de los espacios vectoriales de una manera concisa. Una base es el menor conjunto (finito o infinito) $B = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ de vectores que generan todo el espacio. Esto significa que cualquier vector **v** puede ser expresado como una suma (llamada *combinación lineal*) de elementos de la base

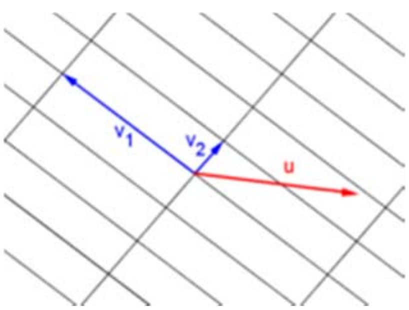
$$a_1\mathbf{v}_{i1} + a_2\mathbf{v}_{i2} + \ldots + a_n\mathbf{v}_{in},$$

donde los a_k son escalares y $\mathbf{v}_{ik}$ ($k = 1, \ldots, n$) elementos de la base B. La minimalidad, por otro lado, se hace formal por el concepto de independencia lineal. Un conjunto de vectores se dice que es linealmente independiente si ninguno de sus elementos puede ser expresado como una combinación lineal de los restantes. Equivalentemente, una ecuación

$$a_1\mathbf{v}_{i1} + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_{\mathrm{in}} = 0$$

sólo se consigue si todos los escalares $a_1, \ldots, a_n$ son iguales a cero. Por definición de la base cada vector puede ser expresado como una suma finita de los elementos de la base. Debido a la independencia lineal este tipo de representación es única. Los espacios vectoriales a veces se introducen desde este punto de vista.

Base formalmente



v_1 y v_2 son base de un plano, si hubiese dependencia lineal la cuadrícula no podría generarse

Dado un sistema de generadores, diremos que es una **base** si son linealmente independientes.

Proposición 3. Dado un espacio vectorial E, $\{v_1, \ldots, v_n\} = F \subset E$ es una base $\Leftrightarrow \forall u \in E,\ \exists! a_i \in K,\ i \in 1, \ldots, n : u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$.

Proposición 4. Dado un espacio vectorial E, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ linealmente independiente y $u \notin \langle S \rangle \Rightarrow \{u\} \cup S = \{u, v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Teorema de la base de generadores

Todo sistema de generadores tiene una base.

Teorema Steinitz

Toda base de un espacio vectorial puede ser cambiada parcialmente por vectores linealmente independientes.

Corolario. Si un espacio vectorial E tiene una base de n vectores $\Rightarrow$ cualquier otra base posee n vectores.

Observación

Todo espacio vectorial tiene una base. Este hecho se basa en el lema de Zorn, una formulación equivalente del axioma de elección. Habida cuenta de los otros axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, la existencia de bases es equivalente al axioma de elección. El ultrafiltro lema, que es más débil que el axioma de elección, implica que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo "tamaño", es decir, cardinalidad. Si el espacio es generado por un número finito de vectores, todo lo anterior puede demostrarse sin necesidad de acudir a la teoría de conjuntos.

Dimensión

Dado un espacio vectorial sobre K:

- Si tiene base finita, diremos **dimensión** al número de elementos de dicha base.
- Si tiene base no finita, diremos que es de **dimensión infinita**.