5. TRANSFORMACIONES LINEALES

OBJETIVO

Aprender la definición de transformación lineal e interpretarlo como una generalización del concepto de función.

Conocer los conceptos fundamentales, como núcleo e imagen de una transformación lineal, así como en el concepto de isomorfismo.

INTRODUCCIÓN

A continuación se estudiará un caso especial de función denominada *transformación lineal* que aparecen continuamente en el estudio del álgebra lineal.

5.1. Definición de transformación lineal, núcleo o kernel

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector **v** ϵ V un vector único T**v** ϵ W y que satisface, para cada **u** y **v** y cada escalar α:

$$T(u + v) = Tu + Tv$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

Aclaremos el concepto de transformación lineal mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Proyección sobre el eje x

En R^2 se define una función T mediante la fórmula $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. El significado geométrico del presente ejemplo es que se trata de una transformación T que toma un vector en R^2 y lo refleje al eje x.

Ejemplo 2: Transformación lineal de R^2 en R^2

Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$, definida de la siguiente manera $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$.

$$T\left[\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x1+x2 \\ y1+y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1+x2+y1+y2 \\ x1+x2+y1+y2 \\ 3y1+3y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1+y1 \\ x1-y1 \\ 3y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2+y2 \\ x2-y2 \\ 3y2 \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x1+y1 \\ x1-y1 \\ 3y1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x2+y2 \\ x2-y2 \\ 3y2 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

Así que

$$T\left[\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

De manera similar

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x+\alpha y \\ \alpha x-\alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3: La transformación cero

Sean V y W dos espacios vectoriales y definida T: V $\rightarrow$ W por T**v** = **0** para todo **v** en V. Entonces $T(v_1 + v_2) = 0 = 0 + 0 = Tv_1 + Tv_2$, y a su vez T(α**v**) = 0 = α**0** = αT**v**.

Ejemplo 4: La transformación identidad

Sea V un espacio vectorial y definida I: V $\rightarrow$ V por I**v** = **v**, para todo **v** en V. Claramente I es una transformación lineal, la cual se denomina transformación identidad.

Pasemos a las definiciones de Núcleo o kerrnel y de la imagen de una transformación lineal.

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea T: V → W una transformación lineal. Entonces

El núcleo o kernel de una transformación lineal, T, está dado por

nuc (T) = $\{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$

5. 2. La imagen de una transformación lineal

La imagen de una transformación lineal, se define como:

$$\text{Im } T = \{\mathbf{w} \in W: \mathbf{w} = T\mathbf{v}, \text{ para alguna } \mathbf{v} \text{ en } V\}$$

Ejemplo 5: Núcleo e imagen de la transformación cero

Sea T**v** = **0** para todo **v** en V (T es la transformación cero). Entonces nuc T = **V e Im** T = {**0**}

Ejemplo 6: Núcleo e imagen de la transformación identidad

Sea Tv = v para toda v en V (T es la transformación identidad). Entonces el núcleo de una transformación lineal se define como

$$\text{nu } T = \{\mathbf{0}\} \text{ e Im } T = \mathbf{V}.$$

5.3. Matriz de una transformación lineal y representación matricial de una transformación lineal.

Sea $T: R^n \rightarrow R^m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única m x n, A_T, tal que

$$T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x}, \text{ para toda } \mathbf{x} \text{ en } R^n.$$

A la matriz A_T se le llama matriz de transformación o representación matricial de T.

Ejemplo7: Representación matricial de una transformación de R^3 en R^4.

Sea T: R^3 en R^4 definida como $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x-y-z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$. Encontrar

a) La matriz de la transformación lineal

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de modo que

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nótese que $T\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x-y-z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$, es la matriz de la transformación

b) El núcleo de la transformación lineal.

La forma escalonada por renglones de

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 \\ 2-1-1 & & \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{es} \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{por lo tanto un T} = \{\mathbf{0}\}$$

c) La imagen de la transformación

ImT = 3

5.4. Transformaciones y sistemas de ecuaciones lineales

5.5. Álgebra de las transformaciones lineales

Sea T_1 y T_2 dos transformaciones lineales, entonces

1. $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

2. Para toda transformación lineal existe una transformación nula, denotada por T(**0**) = **0** tal que T + **0** = **0** + T = T

3. Para toda transformación lineal existe su inversa, denotada por –T, tal que T + (-T) = T(**0**) = **0**

4. Si T_1, T_2, T_3 son tres transformaciones lineales, entonces:

$T_1(T_2 + T_3) = (T_1\ T_2) + (T_1\ T_3)$