SESIÓN 7: ESPACIOS VECTORIALES

Un **espacio vectorial** sobre un campo K (como el cuerpo de los números reales o los números complejos) es un conjunto V no vacío, dotado de dos operaciones para las cuales será cerrado:

$$\begin{array}{llccc} \text{Suma} & +: & V\times V & \longrightarrow & V \\ & & (\mathbf{u},\mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{u}+\mathbf{v} \end{array}$$

Es una operación interna tal que:

1) tenga la propiedad conmutativa, es decir

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}, \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

2) tenga la propiedad asociativa, es decir

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}, \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$$

3) tenga elemento neutro $\mathbf{0}$, es decir
$\exists \mathbf{0}\in V : \mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}, \forall \mathbf{u}\in V$
4) tenga elemento opuesto, es decir
$\forall \mathbf{u}\in V, \quad \exists -\mathbf{u}\in V : \mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

y la operación producto por un escalar:

$$\begin{array}{llccc} \text{Producto} & \cdot: & K\times V & \longrightarrow & V \\ & & (a,\mathbf{u}) & \mapsto & a\cdot\mathbf{u} \end{array}$$

Con la operación externa tal que:

5) tenga la propiedad asociativa:
$a\cdot(b\cdot\mathbf{u})=(a\cdot b)\cdot\mathbf{u}, \forall a,b\in K, \forall \mathbf{u}\in V$
6) $1\in K$ sea elemento neutro del producto:
$1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}, \forall \mathbf{u}\in V$
7) tenga la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de vectores:
$a\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\cdot\mathbf{u}+a\cdot\mathbf{v}, \forall a\in K, \forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in V$
8) tenga la propiedad distributiva del producto respecto a la suma de escalares:
$(a+b)\cdot\mathbf{u}=a\cdot\mathbf{u}+b\cdot\mathbf{u}, \forall a,b\in K, \forall \mathbf{u}\in V$

Observaciones

La denominación de las dos operaciones no condiciona la definición de espacio vectorial por lo que es habitual encontrar traducciones de obras en las que se utiliza *multiplicación* para el *producto* y *adición* para la *suma*, usando las distinciones propias de la aritmética.

Para demostrar que un conjunto V es un espacio vectorial:

Lo es si sus dos operaciones, por ejemplo $\odot(V,V)$ y $*(V,K)$ admiten una redefinición del tipo $+(V,V) = \odot(V,V)$ y $\cdot(K,V) = *(V,K)$ cumpliendo las 8 condiciones exigidas.

Si supiésemos que V es un grupo conmutativo respecto la suma ya tendríamos probados los apartados **1, 2, 3** y **4**.

Si supiésemos que el producto es una acción por la izquierda de V tendríamos probados los apartados **5** y **6**.

Si no se dice lo contrario:

$$a\mathbf{v} \neq \mathbf{v}a.$$

Propiedades

Unicidad del vector neutro de la propiedad **3**:

Supongamos que el neutro no es único, es decir, sean $\mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0}_2$ dos vectores neutros, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{u}+\mathbf{0}_1=\mathbf{u}\\ \mathbf{u}+\mathbf{0}_2=\mathbf{u}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{0}_1=\mathbf{u}+\mathbf{0}_2 \Rightarrow \mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2 \Rightarrow \exists!\ \mathbf{0}\in V$$

Unicidad del vector opuesto de la propiedad **4**:

Supongamos que el opuesto no es único, es decir, sean $-\mathbf{u}_1$ y $-\mathbf{u}_2$ dos vectores opuestos de $\mathbf{u}$, entonces, como el neutro es único:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{u}-\mathbf{u}_1=\mathbf{0}\\ \mathbf{u}-\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{u}-\mathbf{u}_1=\mathbf{u}-\mathbf{u}_2 \Rightarrow -\mathbf{u}_1=-\mathbf{u}_2 \Rightarrow \exists!\ -\mathbf{u}\in V$$

Unicidad del elemento 1 en el campo K:

Supongamos que 1 no es único, es decir, sean 1_1 y 1_2 dos unidades, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}a\cdot 1_1=a\\ a\cdot 1_2=a\end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 1_1=a\cdot 1_2 \Rightarrow 1_1=1_2 \Rightarrow \exists!\ 1\in K$$

Unicidad del elemento inverso en el campo K:

Supongamos que el inverso a^{-1}de a, no es único, es decir, sean a_1^{-1} y a_2^{-1} dos opuestos de a, entonces, como el neutro es único:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot a_1^{-1} = 1 \\ a \cdot a_2^{-1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot a_1^{-1} = a \cdot a_2^{-1} \Rightarrow a_1^{-1} = a_2^{-1} \Rightarrow \exists! \, a^{-1} \in K$$

Producto de un escalar por el vector neutro:

$$a \cdot \mathbf{u} = a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{0} \Rightarrow a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Producto del escalar 0 por un vector:

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} = (1 + 0) \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{u} \Rightarrow 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Si $a \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow a = 0 \quad \vee \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}.$

Si $a = 0$, es cierto.

Si $a \neq 0$, entonces:

$$\exists! \, a^{-1} \in K : a^{-1} a = 1 \Rightarrow u = 1u = (a^{-1} a) u = a^{-1} (au) = a^{-1} 0 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Notación

$$-au = -(au).$$

Observación

$$-au = (-a)u = a(-u)$$

- Si $au + a(-u) = a(u - u) = a0 = 0 \Rightarrow a(-u) = -au$
- Si $au + (-a)u = (a - a)u = 0u = 0 \Rightarrow (-a)u = -au$

Primer ejemplo con demostración al detalle

Se quiere probar que $\mathbb{R}^2$es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

Si $\mathbb{R}^2$juega el papel de V y $\mathbb{R}$el de K:

Los elementos:

$$\mathbf{u} \in V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

son, de forma genérica:

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y)$$

es decir, pares de números reales. Por claridad se conserva la denominación del vector, en este caso **u**, en sus coordenadas, añadiendo el subíndice **x** o **y** para denominar su componente en el eje **x** o **y** respectivamente

En V se define la operación suma:

$$\begin{array}{cccc} + : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{array}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_x, u_y) \\ \mathbf{v} &= (v_x, v_y) \\ \mathbf{w} &= (w_x, w_y) \end{aligned}$$

y la suma de **u** y **v** sería:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x, u_y) + (v_x, v_y) = (u_x + v_x, u_y + v_y) = (w_x, w_y) = \mathbf{w}$$

donde:

$$\begin{aligned} w_x &= u_x + v_x \\ w_y &= u_y + v_y \end{aligned}$$

esto implica que la suma de vectores es interna y bien definida.

La operación interna suma tiene las propiedades:

1) La propiedad conmutativa, es decir:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \\ &\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ &(u_x, u_y) + (v_x, v_y) = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ &(u_x + v_x, u_y + v_y) = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ &(v_x + u_x, v_y + u_y) = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ &(v_x, v_y) + (u_x, u_y) = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\ &\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

2) La propiedad asociativa:

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})\\
&\Big((u_x,u_y)+(v_x,v_y)\Big)+(w_x,w_y)=(u_x,u_y)+\Big((v_x,v_y)+(w_x,w_y)\Big)\\
&(u_x+v_x,u_y+v_y)+(w_x,w_y)=(u_x,u_y)+(v_x+w_x,v_y+w_y)\\
&(u_x+v_x+w_x,u_y+v_y+w_y)=(u_x+v_x+w_x,u_y+v_y+w_y)
\end{aligned}
$$

3) tiene elemento neutro $\mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}\\
&(u_x,u_y)+(0,0)=(u_x+0,u_y+0)=(u_x,u_y)
\end{aligned}
$$

4) tenga elemento opuesto:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}=(u_x,u_y)\\
&-\mathbf{u}=(-u_x,-u_y)\\
&\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(u_x,u_y)+(-u_x,-u_y)=(u_x-u_x,u_y-u_y)=(0,0)=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

La operación producto por un escalar:

$$
\begin{array}{llll}
\cdot: & K\times V & \longrightarrow & V\\
 & (a,\mathbf{u}) & \mapsto & \mathbf{v}-a\cdot\mathbf{u}
\end{array}
$$

El producto de **a** y **u** será:

$$
a\cdot\mathbf{u}=a\cdot(u_x,u_y)=(a\cdot u_x,a\cdot u_y)=(v_x,v_y)=\mathbf{v}
$$

donde:

$$
\begin{aligned}
&v_x=a\cdot u_x\\
&v_y=a\cdot u_y
\end{aligned}
$$

esto implica que la multiplicación de vector por escalar es externa y aun así está bien definida.

5) tenga la propiedad asociativa:

$$
a\cdot(b\cdot\mathbf{u})=(a\cdot b)\cdot\mathbf{u},\quad \forall a,b\in K,\quad \forall\mathbf{u}\in V
$$

Esto es:

$$
\begin{aligned}
&a\cdot(b\cdot\mathbf{u})=(a\cdot b)\cdot\mathbf{u}\\
&a\cdot(b\cdot(u_x,u_y))=(a\cdot b)\cdot(u_x,u_y)
\end{aligned}
$$

$$a \cdot (b \cdot u_x, b \cdot u_y) = (a \cdot b) \cdot (u_x, u_y)$$
$$(a \cdot b \cdot u_x, a \cdot b \cdot u_y) = (a \cdot b \cdot u_x, a \cdot b \cdot u_y)$$

6) $1 \in R$sea elemento neutro en el producto:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

Que resulta:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$
$$1 \cdot (u_x, u_y) = \mathbf{u}$$
$$(1 \cdot u_x, 1 \cdot u_y) = \mathbf{u}$$
$$(u_x, u_y) = \mathbf{u}$$

Que tiene la propiedad distributiva:

7) distributiva por la izquierda:

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}, \quad \forall a \in R, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

En este caso tenemos:

$$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$$
$$a \cdot ((u_x, u_y) + (v_x, v_y)) = a \cdot (u_x, u_y) + a \cdot (v_x, v_y)$$
$$a \cdot (u_x + v_x, u_y + v_y) = (a \cdot u_x, a \cdot u_y) + (a \cdot v_x, a \cdot v_y)$$
$$a \cdot (u_x + v_x, u_y + v_y) = (a \cdot u_x + a \cdot v_x, a \cdot u_y + a \cdot v_y)$$
$$(a \cdot (u_x + v_x), a \cdot (u_y + v_y)) = (a \cdot (u_x + v_x), a \cdot (u_y + v_y))$$

8) distributiva por la derecha:

$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}, \quad \forall a, b \in R, \quad \forall \mathbf{u} \in V$$

Que en este caso tenemos:

$$(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$$
$$(a + b) \cdot (u_x, u_y) = a \cdot (u_x, u_y) + b \cdot (u_x, u_y)$$
$$(a + b) \cdot (u_x, u_y) = (a \cdot u_x, a \cdot u_y) + (b \cdot u_x, b \cdot u_y)$$
$$(a + b) \cdot (u_x, u_y) = (a \cdot u_x + b \cdot u_x, a \cdot u_y + b \cdot u_y)$$
$$((a + b) \cdot u_x, (a + b) \cdot u_y) = ((a + b) \cdot u_x, (a + b) \cdot u_y)$$

Queda demostrado que es espacio vectorial.

Ejemplos de espacios vectoriales

1. Los Campos

Todo cuerpo es un espacio vectorial sobre él mismo, usando como producto por escalar el producto del campo.

$\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión uno sobre $\mathbb{C}$.

Todo cuerpo es un espacio vectorial sobre su subcampo, usando como producto por escalar el producto del cuerpo.

$\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$.

$\mathbb{C}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{Q}$.

2. Sucesiones sobre un campo K

El espacio vectorial más conocido notado como K^n, donde *n*>0 es un entero, tiene como elementos *n*-tuplas, es decir, sucesiones finitas de K de longitud *n* con las operaciones:

$(u_1, u_2, ..., u_n)+(v_1, v_2, ..., v_n)=(u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n)$.
$a(u_1, u_2, ..., u_n)=(au_1, au_2, ..., au_n)$.

Las sucesiones infinitas de K son espacios vectoriales con las operaciones:

$(u_1, u_2, ..., u_n, ...)+(v_1, v_2, ..., v_n, ...)=(u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n, ...)$.
$a(u_1, u_2, ..., u_n, ...)=(au_1, au_2, ..., au_n, ...)$.

El espacio de las matrices $n \times m$, $M_{n\times m}(K)$, sobre K, con las operaciones:

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n,1} & \cdots & y_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1}+y_{1,1} & \cdots & x_{1,m}+y_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}+y_{n,1} & \cdots & x_{n,m}+y_{n,m} \end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{1,1} & \cdots & ax_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ ax_{n,1} & \cdots & ax_{n,m} \end{pmatrix}$$

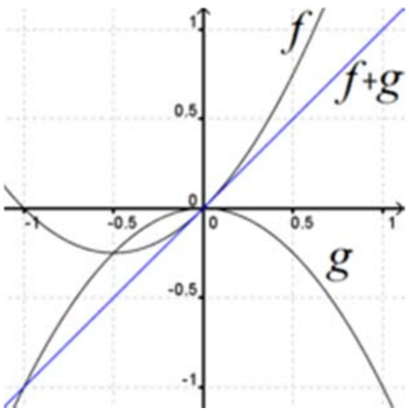
También son espacios vectoriales cualquier agrupación de elementos de K en las cuales se defina las operaciones suma y producto entre estas agrupaciones, elemento a elemento, similar al de matrices $n \times m$, así por ejemplo tenemos las cajas $n \times m \times r$ sobre K que aparecen en el desarrollo de Taylor de orden 3 de una función genérica.

3. Espacios de aplicaciones sobre un cuerpo

El conjunto F de las aplicaciones $f : M \to K$, K un cuerpo y M un conjunto, también forman espacios vectoriales mediante la suma y la multiplicación habitual:

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in F,\ \forall a \in K \\ (f+g)(w) &:= f(w) + g(w), \\ (af)(w) &:= a(f)(w). \end{aligned}$$

Los polinomios



Suma de *f(x)=x+x*^{2} y *g(x)=-x*^{2}.

El espacio vectorial *K*[x] formado por funciones polinómicas, veámoslo:

Expresión general: $p(x) = r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_1 x + r_0$, donde los coeficientes $r_n, \ldots, r_0 \in K$, considérese $\forall i > n\ r_i = 0$.

$p(x) + q(x) = (r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_1 x + r_0)$
$+ (s_m x^m + s_{m-1}x^{m-1} + \ldots + s_1 x + s_0) = \ldots$
$= (t_M x^M + t_{M-1}x^{M-1} + \ldots + t_1 x + s_0) = (p+q)(x)$, donde $M = \max\{m,\ n\}$ y $t_i = r_i + s_i$,

$a(p(x)) = a(r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \ldots + r_1 x + r_0)$
$= (ar_n x^n + ar_{n-1}x^{n-1} + \ldots + ar_1 x + ar_0)$
$= t_n x^n + t_{n-1}x^{n-1} + \ldots + t_1 x + t_0 = (ap)(x)$.

Las series de potencias son similares, salvo que se permiten infinitos términos distintos de cero.

4. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas forman espacios vectoriales, con las siguientes operaciones:

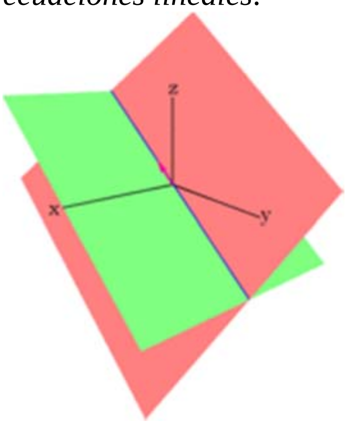
Expresión general: $f(x) = a_f \sum_{i=1}^{n} (b_{f,i}\mathrm{sen}(ix) + c_{f,i}\cos(ix)) \in L^2$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$= a_f \sum_{i=1}^{n} (b_{f,i}\mathrm{sen}(ix) + c_{f,i}\cos(ix)) + a_g \sum_{i=1}^{n} (b_{g,i}\mathrm{sen}(ix) + c_{g,i}\cos(ix))$$
$$= (a_f + a_g) \sum_{i=1}^{n} ((b_{f,i} + b_{g,i})\mathrm{sen}(ix) + (c_{f,i} + c_{g,i})\cos(ix)) \in L^2$$
,

$$(af)(x) := af(x) = a(a_f \sum_{i=1}^{n} (b_{f,i}\mathrm{sen}(ix) + c_{f,i}\cos(ix)))$$
$$= aa_f \sum_{i=1}^{n} (ab_{f,i}\mathrm{sen}(ix) + ac_{f,i}\cos(ix)) \in L^2$$
.

5. Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Artículos principales: *Ecuación lineal*, *Ecuación diferencial lineal* y *Sistemas de ecuaciones lineales*.



Sistema de 2 ecuaciones y 3 variables

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = 0 \end{cases}$$
o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & + \dots & + a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & + \dots & + a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
simplificado como $Ax = 0$

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneas(ecuaciones lineales en las que $x = 0$ es siempre una solución, es decir, $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$) posee soluciones que forman un espacio vectorial, se puede ver en sus dos operaciones:

Si $Ax = 0, Ay = 0 \Rightarrow Ax + Ay = 0 \Rightarrow A(x + y) = 0$
Si $Ax = 0, a \in K \Rightarrow a(Ax) = 0 \Rightarrow A(ax) = 0$.

También que las ecuaciones en sí, filas de la matriz A notadas como una matriz $1 \times n$, es decir, $E_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$, son un espacio vectorial, como se puede ver en sus dos operaciones:

Si $E_i x = 0,\ E_j x = 0 \Rightarrow E_i x + E_j x = 0 \Rightarrow (E_i + E_j)x = 0$
Si $E_i x = 0,\ a \in K \Rightarrow a(E_i x) = 0 \Rightarrow (aE_i)x = 0$.

6.1 Definición de subespacio vectorial

Sea V un espacio vectorial sobre K y $U \subset V$ no vacío, U es un **subespacio vectorial** de V si:

$i)\ \forall u, v \in U, u + v \in U$
$ii)\ \forall u \in U, \forall k \in K, ku \in U$

Consecuencias

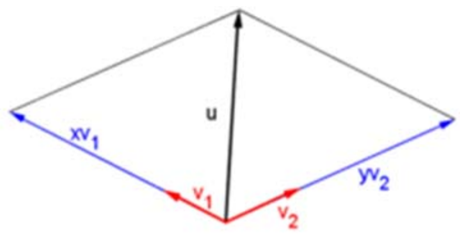
U hereda las operaciones de V como aplicaciones bien definidas, es decir que no escapan de U, y como consecuencia tenemos que U es un espacio vectorial sobre K.

Con cualquier subconjunto de elementos seleccionados en los espacios vectoriales anteriores, no vacío, se pueden generar subespacios vectoriales, para ello seria útil introducir nuevos conceptos que facilitarán el trabajo sobre estos nuevos espacios vectoriales.

Resultados internos

Para detallar el comportamiento interno de todos los espacios vectoriales de modo general es necesario exponer una serie de herramientas cronológicamente vinculadas entre ellas, con las cuales es posible construir resultados válidos en cualquier estructura que sea espacio vectorial.

6.2 COMBINACIONES LINEALES



Cada vector *u* es combinación lineal de forma única

Dado un espacio vectorial E, diremos que un vector *u* es **combinación lineal** de los vectores de $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset E$ si existen escalares $a_1, \ldots, a_n$ tales que

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

Notaremos como $\langle S \rangle_E$ el conjunto resultante de todas las combinaciones lineales de los vectores de $S \subset E$.

Proposición 1[editar]

Dado E un espacio vectorial y $S \subset E$ un conjunto de vectores, el conjunto $F = \langle S \rangle_E$ es el subespacio vectorial más pequeño contenido en E y que contiene a S.

[Expandir] **Demostración**

Nota. En este caso se dice que S es un **sistema de generadores** que genera a F.

Independencia lineal[editar]

Diremos que un conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores es **linealmente independiente** si el vector 0 no se puede expresar como combinación lineal no nula de los vectores de S, es decir:

Si $0 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Diremos que un conjunto S de vectores es **linealmente dependiente** si no es linealmente independiente.

Proposición 2

$v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes $\Leftrightarrow \exists v_i \neq 0 : v_i = \sum_{i \neq j \geq 1}^{n} a_j v_j$