ESTÁTICA

Sesión 3

3 VECTORES

3 VECTORES

Unvector es un segmento de línea recta ubicado en el espacio que rpresenta una cantidad vectoria y se caracteriza por tener:

- Origen o punto de aplicación y extremo
- Dirección: la recta que lo contiene
- Sentido: el que indica la flecha
- Módulo: longitud del segmento. Indica el valor numérico de la magnitud en la unidad elegida

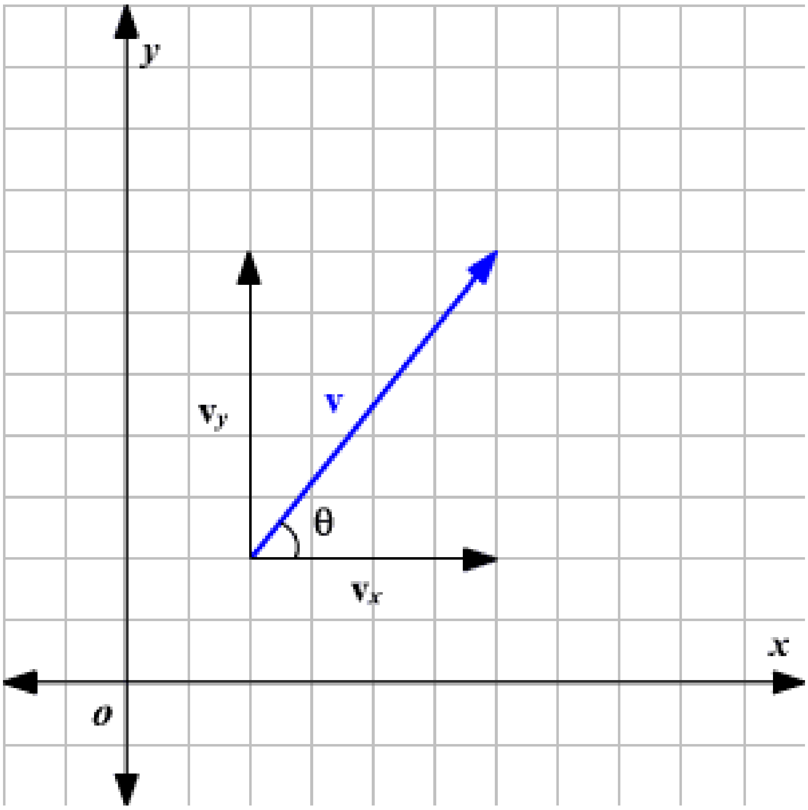
Los vectores, graficamente sin empleados pues permiten comprender mejor fenómends y evitan varias ecuaciones al determinar fuerzas resultantes por ejemplo

3.1 Componentes en dos dimensiones

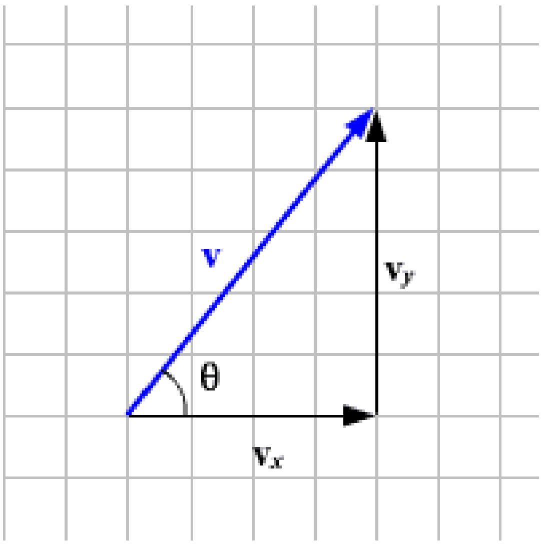
En un sistema coordenado de dos dimensiones, cualquier vector puede representarse en el componente *X* y el componente *Y* como una proyección del vector original sobre cada eje.

$$\vec{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}_x , \mathbf{v}_y \rangle$$

Por ejemplo, en la figura siguiente mostrada, el vector $\vec{\mathbf{v}}$ se separa en dos componentes, $\mathbf{v}_x$ y $\mathbf{v}_y$. Digamos que el ángulo entre el vector y su componente *x* es *θ*.



El vector y sus componentes forman un triángulo rectángulo como se muestra a continuación.



Las relaciones trigonométricas dan la relación entre la magnitud del vector y los componentes del vector.

$$\cos\theta = \frac{\text{Lado adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\mathbf{v}_x}{\mathbf{v}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\mathbf{v}_y}{\mathbf{v}}$$

$\mathbf{v}_x = \mathbf{v} \cos\theta$

$\mathbf{v}_y = \mathbf{v} \sin\theta$

Usando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo con longitudes $\mathbf{v}_x$ y $\mathbf{v}_y$:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}_x^{\,2} + \mathbf{v}_y^{\,2}}$$

3.1.1. Operación con vectores por sus componentes

Es importante considerar las siguientes fórmulas para poder realizar operacions con vectores por sus componentes

La magnitud del vector es $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}_x^{\,2} + \mathbf{v}_y^{\,2}}$.

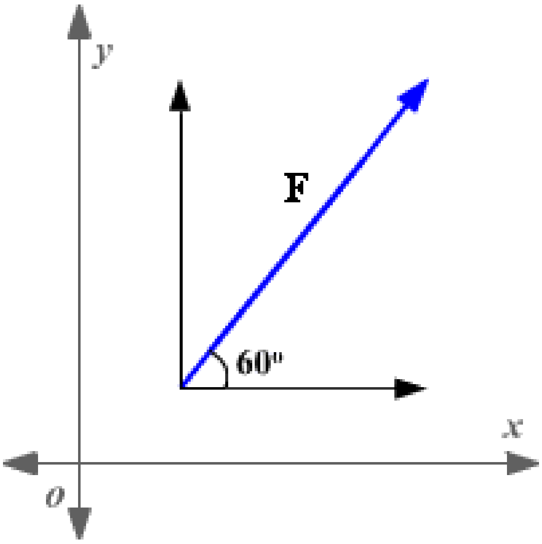
Para encontrar la dirección del vector, $\tan\theta = \frac{\mathbf{v}_y}{\mathbf{v}_x}$.

$\mathbf{v}_x = \mathbf{v} \cos\theta$

$\mathbf{v}_y = \mathbf{v} \sin\theta$

Ejemplo:

La magnitud de un vector $\vec{\mathbf{F}}$ es de 10 unidades y la dirección del vector es de 60° con la horizontal. Encuentre los componentes del vector.



La componente en X de este vector será determinda por

F$\boldsymbol{x}$ = **F** cos 60° =10 (0.5) = 5

La componente en Y de este vector será determinda por

Fy = **F** sin 60° = 10 (0.8660) =8.660

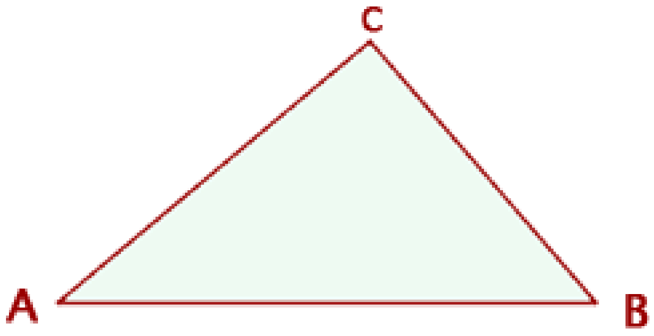
Así que el vector de módulo 10 elevado 60º sobre el eje de las X tiene dos componentes en las dos dimensiones X, Y dadas por (5, 8.660)

3.1.2 Vectores de posición por sus componentes

Si las coordenadas de A y B son: A(x1, y1, z1) y B(x2, y2, z2) Las coordenadas o componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del extremo menos las coordenadas del origen.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Determinar la componentes de los vectores que se pueden trazar el el triángulo de vértices A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1).



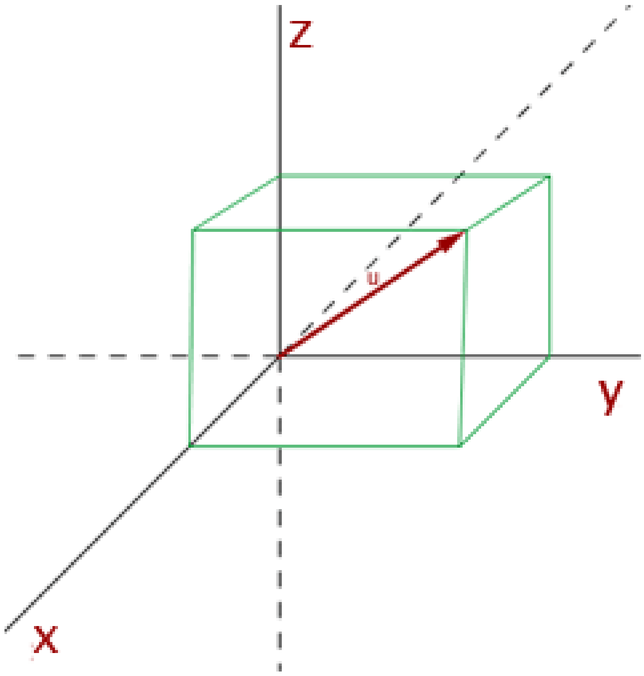
$\overrightarrow{AB} = (3+3, 6-4, 3-0) = (6, 2, 3)$ $\overrightarrow{BA} = (-6, -2, -3)$

$\overrightarrow{AC} = (-1+3, 2-4, 1-0) = (2, -2, 1)$ $\overrightarrow{CA} = (-2, 2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (-1-3, 2-6, 1-3) = (-4, -4, -2)$ $\overrightarrow{CB} = (4, 4, 2)$

3.2 Componentes en tres dimensiones

Al hablar de tres dimensiones estamos ubicando un vector de manera tridimensional, es decir, en el espacio. Y si ya hablábamos de tenerlo en dos dimensiones dadas por los ejes (X,Y), simplemente será cosa de ubicarlo también sobre otro eje, cotidianamente llamado Z, de tal forma que ahora nuestro vector en tres dimensiones tendrá tres componentes (X, Y, Z)



3.2.1 Magnitud de un vector en función de sus componentes

Módulo de un vector

El módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es un número siempre positivo y solamente el vector nulo tiene módulo cero.

Cálculo del módulo conociendo sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2}$$

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (4)^2} = \sqrt{29}$$

Cálculo del módulo conociendo las coordenadas de los puntos

$$A(x_1, y_1, z_1) \qquad B(x_2, y_2, z_2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia entre dos puntos

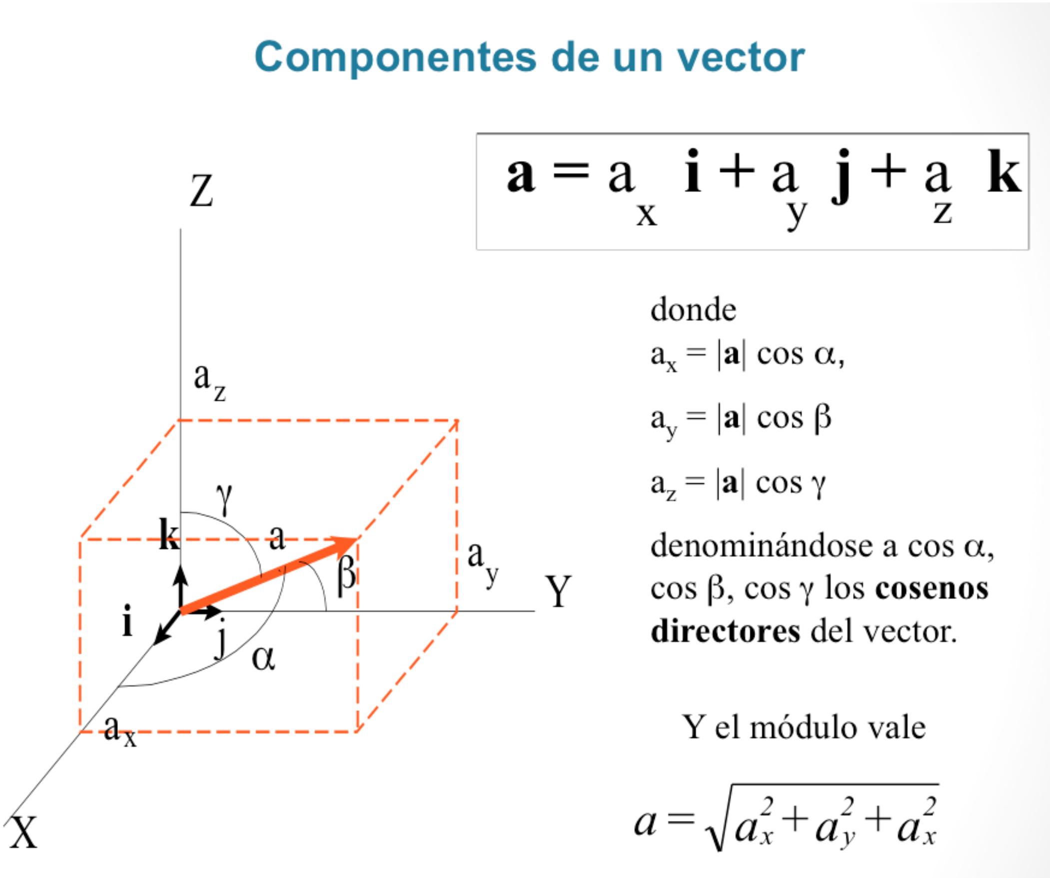
La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que tiene de extremos dichos puntos.

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Hallar la distancia entre los puntos A(1, 2, 3) y B(−1, 2, 0).

$$d(AB) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{13}$$

3.2.2 Cosenos directores



3.2.3 Vectores de posición en función de sus componentes

3.2.4 Componentes de un vector paralelo a una línea dada

3.3 Producto punto o producto escalar

3.3.1Definición

3.3.2 Producto punto en función de sus componentes

3.4 Producto cruz o producto vectorial

3.4.1 Definición

3.4.2 Producto cruz en función de sus componentes

3.5 Fuentes de consulta.