1.1. Definiciones (Ecuación diferencial, orden, grado. linealidad)

Ecuación diferencial En cálculo aprendimos que la derivada, dy/dx, de la **función** $y = \phi(x)$ es en sí, otra función de x que se determina **siguiendo** las reglas adecuadas; por ejemplo, si $y = e^{x^2}$, entonces $dy/dx = 2xe^{x^2}$. Al reemplazar e^{x^2} por el símbolo y se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 2xy. \qquad (1)$$

El problema al que nos encararemos en este curso no es "dada una función $y = \phi(x)$, determinar su derivada". El problema es "dada una ecuación diferencial, como la ecuación 1, ¿hay algún método por el cual podamos llegar a la función desconocida $y = \phi(x)$?"

DEFINICIÓN 1.1 **Ecuación diferencial**

Una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes es una ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con **su tipo, orden y linealidad.**

Clasificación según el tipo Si una ecuación sólo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria.** Por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} + 10y = e^x \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias. Una ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes, respecto de dos o **más** variables independientes, se llama **ecuación en derivadas parciales.** Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

son ecuaciones en derivadas parciales,

Clasificación según el orden El **orden de una ecuación diferencial** (ordinaria o en derivadas parciales) es el de la derivada de mayor orden en la ecuación. Por ejemplo,

$$\underset{\text{segundo orden}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5\underset{\text{primer orden}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} - 4y = e^x$$

es una ecuación diferencial de segundo orden. Como la ecuación (y − x) $dx + 4x\, dy = 0$ se puede escribir en la forma

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

si se divide entre la diferencial dx, es un ejemplo de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Una ecuación diferencial ordinaria general de orden n se suele representar mediante los símbolos

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

En las explicaciones y demostraciones de este libro supondremos que se puede despejar la derivada de orden máximo, $y^{(n)}$, de una ecuación diferencial de orden n, como la ecuación (2); esto es,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Clasificación según la linealidad o no linealidad Se dice que una ecuación diferencial de la forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ es **lineal** cuandofes una función lineal dey, y', $\ldots, y^{(n-1)}$. Esto significa que una ecuación es lineal si se puede escribir en la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)\, y = g(x).$$

En esta última ecuación, vemos las dos propiedades características de las ecuaciones diferenciales lineales:

i) La variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado; esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1.
ii) Ca& coeficiente sólo depende de x, que es la variable independiente.

Las funciones dey como sen y o las funciones de las derivadas dey, como e $^{y'}$ no pueden aparecer en una ecuación lineal. Cuando una **ecuación** diferencial no es lineal, se dice que es no **lineal.** Las ecuaciones

$$(y - x)\, dx + 4x\, dy = 0, \qquad y'' - 2y' + y = 0, \qquad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} + 6y = e^x$$

son ecuaciones lineales ordinarias de primero, segundo y tercer orden, respectivamente. Por otro lado,

el coeficiente depende dey — función no lineal dey — potencia distinta de 1

$$(1 + y)\, y' + 2y = e^x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

son ecuaciones diferenciales no lineales de primero, segundo y cuarto **orden,** respectivamente.

1.2. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

Soluciones Como dijimos, uno de los objetivos de este curso es resolver o hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 1.2 **Solución de una ecuación diferencial**

Cuando una función ϕ, definida en algún intervalo I, se sustituye en una ecuación diferencial y transforma esa ecuación en una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria, como la ecuación (2), es una función ϕ con al menos n derivadas y

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{para todo } x \text{ en } I.$$

Se *dice* que $y = \phi(x)$ *satisface* la ecuación diferencial. El intervalo I puede ser intervalo abierto, (a, b), cerrado, $[a, b]$, infinito, (a, ∞), etcétera. Para nuestros fines, también supondremos que una solución ϕ es una función de valores reales.

EJEMPLO 1 **Comprobación de una solución**

Comprobar que $y = x^4/16$ es una solución de la ecuación no lineal

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

SOLUCIÓN Un modo de comprobar que la función dada es una solución es escribir la ecuación diferencial en la forma $dy/dx - xy^{1/2} = 0$, y ver, después de sustituir, si la suma $dy/dx - xy^{1/2}$ es cero para toda x en el intervalo. Con,

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \qquad \text{y} \qquad y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4},$$

vemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

para todo numero real. Obsérvese que $y^{1/2} = x^2/4$ es, por definición, la raíz cuadrada no negativa de $x^4/16$. ■

EJEMPLO 2 **Comprobación de una solución**

La función $y = xe^x$ es una solución de la ecuación lineal

$$y'' - 2y' + y = 0$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Para demostrarlo, sustituimos

$$y' = xe^x + e^x \quad \text{y} \quad y'' = xe^x + 2e^x.$$

Vemos que

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

para todo número real. ■

No toda ecuación diferencial que se nos ocurra tiene, necesariamente, una solución. Para resolver el problema 5 1 de los ejercicios 1.1, el lector debe meditar en lo anterior.

Soluciones explícitas e implícitas Al estudiar cálculo uno se familiariza con los términos *funciones explícitas e implícitas.* Como algunos métodos de solución de ecuaciones diferenciales pueden llevar directamente a estas dos formas, las soluciones de las ecuaciones diferenciales se pueden dividir en soluciones explícitas o implícitas. Una solución en que la variable dependiente se expresa tan solo en términos de la variable independiente y constantes, se llama **solución explícita.** Para nuestros fines, podemos decir que una solución explícita es una fórmula explícita $y = \phi(x)$ que podemos manipular, evaluar y diferenciar. En la descripción inicial vimos que $y = e^{x^2}$ es una solución explícita de $dy/dx = 2xy$. En los ejemplos 1 y 2, $y = x^4/16$ y $y = xe^x$ son soluciones explícitas de $dy/dx = xy^{1/2}$ y $y'' - 2y' + y = 0$, respectivamente. Obsérvese que, en los ejemplos 1 y 2, cada ecuación diferencial tiene la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. Una solución explícita de una ecuación diferencial, que es idéntica a cero en un intervalo I, se llama **solución trivial.** Una relación $G(x, y) = 0$ es una **solución implícita** de una ecuación diferencial ordinaria, como la ecuación (2), en un intervalo I, siempre y cuando exista al menos una función ϕ que satisfaga la relación, y la ecuación diferencial, en I. En otras palabras, $G(x, y) = 0$ define implícitamente a la función ϕ.

EJEMPLO 3 **Comprobación de una solución implícita**

La relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una solución implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{3}$$

en el intervalo $-2 < x < 2$. Derivando implícitamente obtenemos

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}4 = \frac{d}{dx}0 \quad \text{o bien} \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al despejar el símbolo dy/dx de la última ecuación se obtiene la ecuación (3). Además, el lector debe comprobar que las funciones $y_1 = \sqrt{4 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$ satisfacen la relación (en otras palabras, que $x^2 + y_1^2 - 4 = 0$ y $x^2 + y_2^2 - 4 = 0$) y son soluciones de la ecuación diferencial en $-2 < x < 2$. ■

Toda relación de la forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisface *formalmente* la ecuación (3) para cualquier constante c; sin embargo, se sobreentiende que la relación siempre debe tener sentido en el sistema de los números reales. Así, por ejemplo, no podemos decir que $x^2 + y^2 + 4 = 0$ sea una solución implícita de la ecuación. (¿Por qué no?)

Debe quedar intuitivamente clara la distinción entre una solución explicita y una implícita, porque en lo sucesivo ya no haremos la aclaración "es una solución explicita (o **implícita**)".

Más terminología El estudio de las ecuaciones diferenciales es semejante al del cálculo integral. A veces, a una solución se le llama **integral** de la ecuación y a su gráfica, **curva integral** o **curva de solución.** En cálculo, al evaluar una antiderivada o una integral indefinida empleamos una sola constante c de integración. En forma parecida, al resolver una ecuación diferencial de primer orden, $F(x, y, y') = 0$, por lo general obtenemos una solución con una sola constante arbitraria, o parámetro c. Una solución con una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones y se llama **familia monoparamétrica de soluciones.** Al resolver una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, se busca una **familia n-paramétrica de soluciones** $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Esto sólo quiere decir que una sola ecuación diferencial puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponden a las elecciones ilimitadas del parámetro o parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que no tiene parámetros arbitrarios se llama **solución particular**; por ejemplo, podemos demostrar que, por sustitución directa, toda función de la familia monoparamétrica $y = ce^{x^2}$ también satisface la ecuación (1). La solución original $y = e^{x^2}$ corresponde a $c = 1$ y, por consiguiente, es una solución particular de la ecuación. La figura 1.1 muestra algunas de las curvas integrales de esta familia. La solución trivial $y = 0$, que corresponde a $c = 0$, también es una solución particular de la ecuación (1).

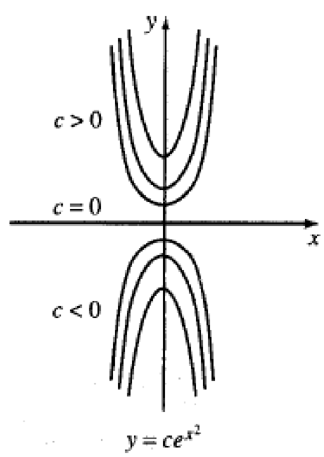

FIGURA 1.1

EJEMPLO 4 **Soluciones particulares**

La función $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación lineal de segundo orden $y'' - y = 0$. Algunas de las soluciones particulares son $y = 0$ (cuando $c_1 = c_2 = 0$), $y = e^x$ (cuando $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$), y $y = 5e^x - 2e^{-x}$ (cuando $c_1 = 5$ y $c_2 = -2$). ■

En todos los ejemplos anteriores hemos usado x y y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente. Pero en la práctica, esas dos variables se representan mediante muchos símbolos distintos. Por ejemplo, podríamos representar con t la variable independiente y con x la variable dependiente.

EJEMPLO 5 Uso de distintos símbolos

Las funciones $x = c_1 \cos 4t$ y $x = c_2$ sen $4t$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + 16x = 0.$$

Para $x = c_1 \cos 4t$, las primeras dos derivadas con respecto a t son $x' = -4c_1$ sen $4t$, y $x'' = -16\, c_1 \cos 4t$. Al sustituir x'' y x se obtiene,

$$x'' + 16x = -16c_1 \cos 4t + 16(c_1 \cos 4t) = 0.$$

Análogamente, para $x = c_2$ sen $4t$, vemos que $x'' = -16c_2$ sen $4t$, y así

$$x'' + 16x = -16c_2 \operatorname{sen} 4t + 16(c_2 \operatorname{sen} 4t) = 0.$$

Por último, es fácil comprobar que la combinación lineal de soluciones —o sea, la familia biparamétrica $x = c_1 \cos 4t + c_2$ sen $4t$— es una solución de la ecuación dada. ∎

En el próximo ejemplo mostraremos que una solución de una ecuación diferencial puede ser una función definida por tramos.

EJEMPLO 6 Solución definida por tramos

El lector debe comprobar que toda función de la familia monoparamétrica $y = cx^4$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' - 4y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ -Fig. 1.2a—. La función definida por tramos

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular de la ecuación, pero no se puede obtener a partir de la familia $y = cx^4$ escogiendo sólo una c (Fig. 1.2b). ∎

En algunos casos, una ecuación diferencial tiene una solución que no se puede obtener particularizando alguno de los parámetros en una familia de soluciones. Esa **solución** se **llama** **solución singular.**

EJEMPLO 7 Solución singular

En la sección 2.1 demostraremos que $y = (x^2/4 + c)^2$ proporciona una familia **monoparamétrica** de soluciones de $y' = xy^{1/2}$. Cuando c = 0, la solución particular que resulta es $y = x^4/16$. En este caso, la solución trivial $y = 0$ es una solución singular de la **ecuación** porque no se puede obtener partiendo de la familia y eligiendo algún valor del parámetro c. ∎

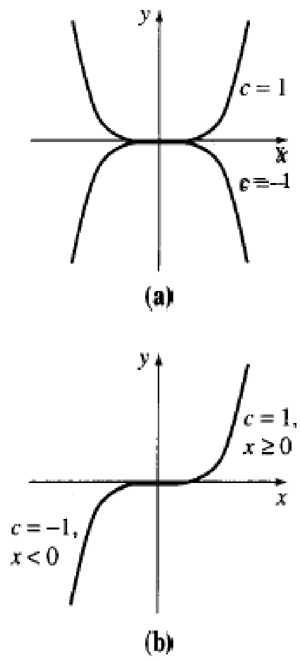

FIGURA 1.2

Solución general Si *toda* solución de una ecuación de orden n, $F(x, y, y', ., y^{(n)}) = 0$, en un intervalo I, se puede obtener partiendo de una familia n-paramétrica $G(x, y, c_1, c_2, . . ., c_n) = 0$ con valores adecuados de los parámetros c_i ($i = 1, 2, . . .,$ n), se dice que la familia es la **solución general** de la ecuación diferencial. Al resolver las ecuaciones diferenciales lineales vamos a imponer restricciones relativamente sencillas a los coeficientes de esas ecuaciones. Con estas restricciones siempre nos aseguraremos no sólo de que exista una solución en un intervalo, sino también de que una familia de soluciones contenga todas las soluciones posibles. Las ecuaciones no lineales, a excepción de algunas de primer orden, son difíciles de resolver -e incluso resultan irresolubles-, en términos de las funciones elementales comunes (combinaciones finitas de potencias o raíces enteras de x, de funciones exponenciales y logarítmicas, o funciones trigonométricas o trigonométricas inversas). Además, si en cierto momento nos encontramos con una familia de soluciones de una ecuación no lineal, no es obvio cuando la familia es una solución general. Por lo anterior, y en un nivel práctico, el nombre "solución general" sólo se aplica a las ecuaciones diferenciales lineales.

Sistemas de ecuaciones diferenciales Hasta ahora hemos descrito ecuaciones diferenciales aisladas con una función desconocida; pero muchas veces, en teoría y en muchas aplicaciones, debemos manejar *sistemas* de ecuaciones diferenciales. Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** es un conjunto de dos o más ecuaciones donde aparecen las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente; por ejemplo, si x y y representan variables dependientes y t es la variable independiente, el conjunto siguiente es un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} &= x + y. \end{aligned} \qquad (4)$$

1.3. Problema del valor inicial

Problema de valor inicial A menudo nos interesa resolver una ecuación diferencial sujeta a condiciones prescritas, que son las condiciones que se imponen ay(x) o a sus derivadas. En algún intervalo Z que contenga a x_0, el problema

$$\text{Resolver: } \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$
$$\text{Sujeta a: } \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

en donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas arbitrariamente, se llama **problema de valor inicial**. Los valores dados de la función desconocida, y(x), y de sus primeras $n - 1$ derivadas en un solo punto x_0: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}$ se llaman **condiciones iniciales.**

Problemas de valor inicial de primero y segundo orden El problema **enunciado** con las ecuaciones (1) también se denomina **problema de valor inicial de enésimo orden**; por ejemplo,

$$\text{Resolver: } \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$
$$\text{Sujeta a: } \quad y(x_0) = y_0$$

$$\text{Resolver: } \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \tag{3}$$
$$\text{Sujeta a: } \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

son problemas de valor inicial de primero y segundo orden, respectivamente. Son fáciles de interpretar en términos geométricos. Para las ecuaciones (2) estamos buscando una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0, tal que una curva de solución pase por el punto prescrito (x_0, y_0) -Fig. 1.3.

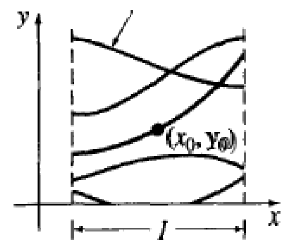

FIGURA 1.3 Problema de valor iniciol de primer orden

Para las ecuaciones (3), deseamos determinar una solución de la ecuación diferencial cuya gráfica no sólo pase por (x_0, y_0), sino que también pase por ese punto de tal manera que la pendiente de la curva en ese lugar sea y_1 (Fig. 1.4). El término *condición inicia2* procede de los sistemas físicos en que la variable independiente es el tiempo t y donde $y(t_0) = y_0$, y $y'(t_0) = y_1$ representan, respectivamente, la posición y la velocidad de un objeto en cierto momento o tiempo inicial t_0.

A menudo, la solución de un problema de valor inicial de orden n entraña la aplicación de una familia n-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial dada para determinar n constantes especializadas, de tal modo que la solución particular que resulte para la ecuación "se ajuste" (0 satisfaga) a las n condiciones iniciales.

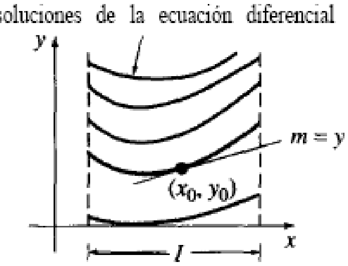

FIGURA 1.4 Problema de valor iniciol de segundo orden

EJEMPLO 1 Problema de valor inicial de primer orden

Se comprueba fácilmente que $y = ce^x$ es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación $y' = y$, de primer orden, en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Si especificamos una condición inicial, por ejemplo, $y(0) = 3$, al sustituir $x = 0$, $y = 3$ en la familia, se determina la constante $3 = ce^0 = c$; por consiguiente, la función $y = 3e^x$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Ahora bien, si pedimos que una solución de la ecuación diferencial pase por el punto (1, -2) y no por $(0, 3)$, entonces $y(1) = -2$ dará como resultado $-2 = ce$; o sea, $c = -2e^{-1}$. La función $y = -2e^{x-1}$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(1) = -2.$$

En la figura 1.5 vemos las gráficas de esas dos funciones. ■

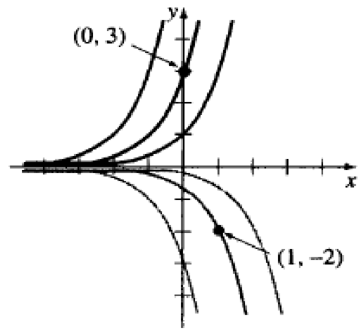

FIGURA 1.5 Soluciones de problemas de valor inicial

EJEMPLO 2 **Problema de valor inicial de segundo orden**

En el ejemplo 5 de la sección 1.1 vimos que $x = c_1 \cos 4t + c_2$ sen $4t$ es una familia biparamétrica de soluciones de $x'' + 16x = 0$. Determinemos una solución del problema de valor inicial

$$x'' + 16x = 0, \qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{4}$$

SOLUCIÓN Primero sustituimos $x(\pi/2) = -2$ en la familia dada de soluciones: $c_1 \cos 2\pi + c_2$ sen $2\pi = -2$. Como $\cos 2\pi = 1$ y sen $2\pi = 0$, vemos que $c_1 = -2$. A continuación sustituimos $x'(\pi/2) = 1$ en la familia monoparamétrica $x(t) = -2 \cos 4t + c_2$ sen $4t$. Primero derivamos y después igualamos $t = \pi/2$ y $x' = 1$, y obtenemos 8 sen $2\pi + 4c_2 \cos 2\pi = 1$, con lo que vemos que $c_2 = \frac{1}{4}$; por lo tanto,

$$x = -2 \cos 4t + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t$$

es una solución de (4) ■

1.4. Teorema de existencia y unicidad

Existencia y unicidad Al resolver un problema de valor inicial surgen dos asuntos fundamentales:

¿Existe una solución al problema? Si la hay, ¿es única?

Para un problema de valor inicial, como el de las ecuaciones (2), lo que se pregunta es:

Existencia	Unicidad
¿La ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$ tiene soluciones? ¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0)?	*¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente una curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0)?*

Nótese que en los ejemplos 1 y 2, empleamos la frase *"una* solución" y no *"la* **solución"** del problema. El artículo indefinido se usa deliberadamente para indicar la posibilidad de que existan otras soluciones. Hasta ahora no hemos demostrado que haya **una** solución única para cada problema. El ejemplo siguiente es de un problema de valor inicial con dos soluciones.

EJEMPLO 3 **Un problema de valor inicial puede tener varias soluciones**

Ambas funciones y = 0 y $y = x^4/16$ satisfacen la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$, y la condición inicial $y(0) = 0$, de modo que el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \qquad y(0) = 0$$

tiene dos soluciones cuando menos. Como vemos en la figura 1.6, las gráficas de ambas funciones pasan por el mismo punto, (0, 0). ■

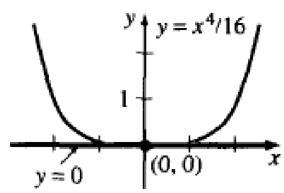

FIGURA 1.6 Dos soluciones del mismo problema de valor inicial

Dentro de los confines seguros de un curso formal de ecuaciones diferenciales, se puede asumir, que *la mayor parte* de las ecuaciones diferenciales tienen soluciones y que las soluciones de los problemas de valor inicial *probablemente sean* únicas. Sm embargo, en la vida real las cosas no son tan idílicas. Por consiguiente, antes de resolver un problema de valor inicial es preferible conocer, si existe una solución y, cuando exista, si es la única. Puesto que vamos a manejar ecuaciones diferenciales de primer orden en los dos capítulos siguientes, enunciaremos **aquí**, sin demostrarlo, un teorema que **define** las condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de una solución a un problema de valor inicial de primer orden, para ecuaciones que tengan la forma de las ecuaciones (2). **Sólo** hasta el capítulo 4 examinaremos la existencia y unicidad de **un** problema de valor inicial de segundo orden.

TEOREMA 1.1 **Existencia de una solución única**

Sea R una región rectangular del plano xy, definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, **que contiene al** punto (x_0, y_0). Si $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en F, entonces existe un intervalo I, **centrado** en x_0, y una función única, $y(x)$ definida en I, que satisface el problema de valor **inicial** expresado por las ecuaciones (2).

El resultado anterior es **uno** de los teoremas más comunes de existencia y unicidad para ecuaciones de primer orden, ya que es bastante fácil comprobar los criterios de continuidad de $f(x, y)$ y $\partial f/\partial y$. En la figura 1.7 podemos ver la **interpretación geométrica** del teorema 1.1.

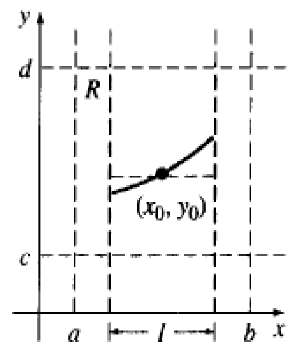

FIGURA 1.7 Región rectangular R

EJEMPLO 4 Regreso al ejemplo 3

En el ejemplo anterior vimos que la ecuación diferencial $dy/dx = xy^{1/2}$ tiene cuando menos dos soluciones cuyas gráficas pasan por (0, 0). Al examinar las funciones

$$f(x, y) = xy^{1/2} \qquad Y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

se advierte que son continuas en el semiplano superior definido por y > 0; por consiguiente, el teorema 1.1 permite llegar a la conclusión de que para cada punto (x_0, y_0), $y_0 > 0$ de ese semiplano, hay un intervalo centrado en x_0 en que la ecuación diferencial tiene una solución única. Así, por ejemplo, sin resolverla, sabemos que existe un intervalo centrado en 2 en que el problema de valor inicial $dy/dx = xy^{1/2}$, $y(2) = 1$, tiene una solución ímica. ■

El teorema 1.1 garantiza que, en el ejemplo 1, no hay otras soluciones de los problemas de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 3$ y $y' = y$, $y(1) = -2$, aparte de $y = 3e^x$ y $y = -2e^{x-1}$, respectivamente. Esto es consecuencia de que $f(x, y) = y$ y $\partial f/\partial y = 1$ sean continuas en todo el plano xy. También se puede demostrar que el intervalo en que está definida cada solución es $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 5 Intervalo de existencia

En la ecuación $dy/dx = x^2 + y^2$, vemos que $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son ambas polinomios en x y y y, por consiguiente, continuas en cualquier punto. En otras palabras, la región R del teorema 1.1 es todo el plano xy; en consecuencia, por cada punto dado (x_0, y_0) pasa una y sólo una curva de solución. Sin embargo, observemos que esto no significa que el intervalo máximo I de validez de una solución de un problema de valor inicial sea, necesariamente, $(-\infty, \infty)$. El intervalo I no necesita ser tan amplio como la región R. En general, no es posible hallar un intervalo específico I en que se defina una solución sin resolver la ecuación diferencial (consulte los problemas 18, 19 y 29, en los ejercicios 1.2). ■

1.5. Variables separables y reducibles

Solución por integración Comenzaremos nuestro estudio de la metodología para resolver ecuaciones de primer orden, $dy/dx = f(x, y)$, con la más sencilla de todas las ecuaciones diferenciales. Cuandofes independiente de la variable y -esto es, cuando $f(x, y) = g(x)$- la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{1}$$

se puede resolver por integración. Si $g(x)$ es una función continua, al integrar ambos lados de (1) se llega a la solución

$$y = \int g(x)\, dx = G(x) + c,$$

en donde $G(x)$ es una antiderivada (o integral indefinida) de $g(x)$; por ejemplo,

$$\text{Si} \quad \frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x} \text{ entonces} \quad y = \int (1 + e^{2x})\, dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + c.$$

La ecuación (1), y su método de solución, no son más que un caso especial en que f, en $dy/dx = f(x, y)$ es un producto de una función de x por una función dey.

DEFINICIÓN 2.1 **Ecuación separable**

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y)$$

es separable, o de variables separables.

Obsérvese que al dividir entre la función $h(y)$, una ecuación separable se puede escribir en la forma

$$p(y)\frac{dy}{dx}=g(x), \tag{2}$$

donde, por comodidad, $p(y)$ representa a $1/h(y)$. Así podemos ver de inmediato que la ecuación (2) se reduce a la ecuación (1) cuando $h(y) = 1$.

Ahora bien, si $y = \phi(x)$ representa una solución de (2), se debe cumplir

$$\int p(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int g(x)\,dx. \tag{3}$$

Pero $dy = \phi'(x)\,dx$, de modo que la ecuación (3) es lo mismo que

$$\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad H(y) = G(x) + c, \tag{4}$$

en donde $H(y)$ y $G(x)$ son **antiderivadas** de $p(y) = 1/h(y)$ y de $g(x)$, respectivamente.

Método de solución La ecuación (4) indica el procedimiento para resolver las ecuaciones separables. Al integrar ambos lados de $p(y)\,dy = g(x)\,dx$ se obtiene una familia **monoparamétrica** de soluciones, que casi siempre se expresa de manera implícita.

Nota

No hay necesidad de emplear dos constantes cuando se integra una ecuación separable, porque si escribimos $H(y) + c_1 = G(x) + c_2$, la diferencia $c_2 - c_1$ se puede reemplazar con una sola constante c, como en la ecuación (4). En muchos casos de los capítulos siguientes, sustituiremos las constantes en la forma más conveniente para determinada ecuación; por ejemplo, a veces se pueden reemplazar los múltiplos o las combinaciones de constantes con una sola constante.

EJEMPLO 1 **Solución** de una ecuación **diferencial separable**

Resolver $(1 + x)\,dy - y\,dx = 0$.

SOLUCIÓN Dividimos entre $(1 + x)y$ y escribimos $dy/y = dx/(1 + x)$, de donde

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{1+x} \\
\ln|y| &= \ln|1+x| + c_1 \\
y &= e^{\ln|1+x|+c_1} \\
&= e^{\ln|1+x|}\cdot e^{c_1} && \leftarrow \text{leyes de los exponentes} \\
&= |1+x|e^{c_1} \\
&= \pm e^{c_1}(1+x). && \leftarrow \begin{cases} |1+x| = 1+x, & x \ge -1 \\ |1+x| = -(1+x), & x < -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Definimos c como $\pm e^{c_1}$, con lo que llegamos a $y = c(1 + x)$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA Como cada integral da como resultado un logaritmo, la elección más prudente de la constante de integración es $\ln|c|$, en lugar de c:

$$\ln|y| = \ln|1 + x| + \ln|c|, \quad \text{o bien} \quad \ln|y|\ ) = \ln|c(1 + x)|,$$

y entonces $$y = c(1 + x).$$

Aun cuando no *todas* las integrales indefinidas sean logaritmos, podría seguir siendo más conveniente usar $\ln|c|$. Sin embargo, no se puede establecer una regla invariable. ■

EJEMPLO 2 **Problema de valor inicial**

Resolver el problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $y(4) = 3$.

SOLUCIÓN Partimos dey $dy = -x\ dx$ para obtener

$$\int y\,dy = -\int x\,dx \qquad y \qquad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$$

Esta solución se puede escribir en la forma $x^2 + y^2 = c^2$, si sustituimos la constante $2c_1$ con c^2. Vemos que la solución representa una familia de círculos concéntricos.

Cuando $x = 4$, $y = 3$, de modo que $16 + 9 = 25 = c^2$. Así, el problema de valor inicial determina que $x^2 + y^2 = 25$. De acuerdo con el teorema 1.1, podemos concluir que, es el ímico círculo de la familia que pasa por el punto (4, 3) (Fig. 2.1). ■

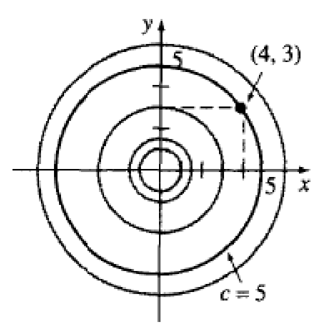

FIGURA 2.1

Se debe tener cuidado al separar las variables porque los divisores variables podrían ser cero en algún punto. Como veremos en los dos ejemplos siguientes, en ocasiones se puede perder una solución constante mientras resolvemos un problema. Consúltese también el problema 58, en los ejercicios 2.1.

EJEMPLO 3 **Pérdida de una solución**

Resolver $xy^4\,dx + (y^2 + 2)e^{-3x}dy = 0$. (5)

SOLUCIÓN Al multiplicar la ecuación por e^{3x} y dividirla entre y^4 obtenemos

división término a término $\rightarrow$ $$xe^{3x}\,dx + \frac{y^2+2}{y^4}\,dy = 0 \qquad \text{o sea} \qquad xe^{3x}\,dx + (y^{-2} + 2y^{-4})\,dy = 0. \tag{6}$$

En el primer término integramos por partes y

$$\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} - y^{-1} - \frac{2}{3}y^{-3} = c_1.$$

La familia monoparamétrica de soluciones también se puede escribir en la forma

$$e^{3x}(3x - 1) = \frac{9}{y} + \frac{6}{y^3} + c, \tag{7}$$

en donde c sustituyó a la constante $9c_1$. Obsérvese que $y = 0$ es una solución correcta de la ecuación (5), pero no es un miembro del conjunto de soluciones que define la ecuación (7). ∎

EJEMPLO 4 Problema de valor inicial

Resolver el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$, $y(0) = -2$.

SOLUCIÓN Pasamos la ecuación a la forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \tag{8}$$

y empleamos el método de fracciones parciales en el lado izquierdo. Entonces

$$\left[\frac{-1/4}{y+2} + \frac{1/4}{y-2}\right] dy = dx \tag{9}$$

de modo que $$-\frac{1}{4}\ln|y+2| + \frac{1}{4}\ln|y-2| = x + c_1. \tag{10}$$

En este caso es fácil despejar y de la ecuación implícita en función de x. Al multiplicar la ecuación por 4 y combinar logaritmos resulta

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + c_2 \qquad \text{y así} \qquad \frac{y-2}{y+2} = ce^{4x}.$$

Hemos reemplazado $4c_1$ con c_2, y e^{c_2} con c. Por último, despejamos y de la última ecuación y obtenemos

$$y = 2\,\frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}}. \tag{11}$$

Si sustituimos $x = 0$ y $y = -2$, se presenta el dilema matemático

$$-2 = 2\frac{1+c}{1-c} \text{ o bien-1 + c = 1 + c o bien-1 = 1.}$$

Al llegar a la ultima igualdad vemos que debemos examinar con más cuidado la ecuación diferencial. El hecho es que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (y + 2)(y - 2)$$

queda satisfecha con dos funciones constantes, que son y = -2 y y = 2. Al revisar las ecuaciones **(8),** (9) y (10) advertimos que debemos excluir ay = -2 y y = 2 de esos pasos de **la** solución. Es interesante observar que después podemos recuperar la solución y = 2 si hacemos que c = 0 en la ecuación (ll). Sin embargo, no hay valor finito de c que pueda producir la solución y = -2. Esta última función constante es la única solución al problema de valor inicial (Fig. 2.2). ■

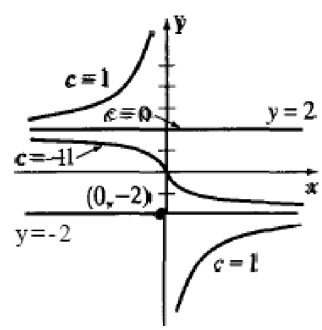

FIGURA 2.2

Si en el ejemplo 4 hubiéramos empleado **ln|*c*|** como constante de integración, la forma de la familia monoparamétrica de soluciones sería

$$y = 2\frac{c + e^{4x}}{c - e^{4x}}. \quad \textbf{(12)}$$

Obsérvese que la ecuación (12) se reduce ay = -2 cuando c = 0; pero en este caso no hay valor finito de c que pueda dar como resultado la solución constante y = 2.

Si al determinar un valor específico del parámetro c en una familia de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden llegamos a una solución particular, la mayoría de los estudiantes (y de los profesores) tenderá a descansar satisfechos. Pero en la sección 1.2 vimos que una solución de un problema de valor inicial quizá no sera única; por ejemplo, en el ejemplo 3 de esa sección el problema

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0 \quad \textbf{(13)}$$

tiene dos soluciones cuando menos, las cuales **son** $y = 0$ y $y = x^4/1$ 6. Ahora ya podemos resolver esa ecuación. Si separamos variables obtenemos

$$Y^{-1/2}\, dy = x\, dx,$$

que al integrar da

$$2y^{1/2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{o sea} \quad y = \left(\frac{x^2}{4} + c\right)^2.$$

Cuando x = 0, y = 0, así que necesariamente c = 0; por lo tanto, $y = x^4/16$. Se perdió la solución y = 0 al dividir entre $y^{1/2}$. Además, el problema de valor inicial, ecuación (13), tiene una cantidad infinitamente mayor de soluciones porque por cada elección del parámetro $a \geq 0$ la función definida en secciones

$$y = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{(x^2 - a^2)^2}{16}, & x \geq a \end{cases}$$

satisface al mismo tiempo la ecuación diferencial y la condición inicial (Fig. 2.3).

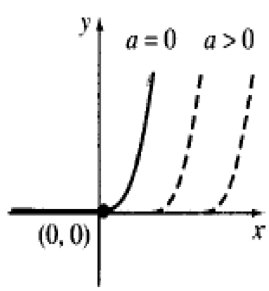

FIGURA 2.3

Observación

En algunos de los ejemplos anteriores vimos que la constante de la familia monoparamétrica de soluciones de una ecuación diferencial de primer orden se puede redefinir para mayor comodidad. También se puede dar con facilidad el caso de que dos personas lleguen a expresiones distintas de las mismas respuestas al resolver en forma correcta la misma ecuación; por ejemplo, separando variables se puede demostrar que familias monoparamétricas de soluciones de $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$ son

$$\arctan x + \arctan y = c \quad \text{o bien} \quad \frac{x + y}{1 - xy} = c.$$

Al avanzar en las siguientes secciones, el lector debe tener en cuenta que las familias de soluciones pueden ser equivalentes, en el sentido de que una se puede obtener de otra, ya sea por redefinición de la constante o por transformaciones algebraicas o trigonométricas.