1.6. Exactas y no exactas, factor integrante

La sencilla ecuación $y\,dx + x\,dy = 0$ es separable, pero también equivale a la diferencial del producto de x por y; esto es,

$$y\,dx + x\,dy = d(xy) = 0.$$

Al integrar obtenemos de inmediato la solución implícita $xy = c$.

En cálculo diferencial, el lector debe recordar que si $z = f(x, y)$ es una función con primeras derivabas parciales continuas en una región R del plano xy, su diferencial (que también se llama la diferencial total) es

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad \textbf{(1)}$$

Entonces, si $f(x, y) = c$, de acuerdo con (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

En otras palabras, dada una familia de curvas $f(x, y) = c$, podemos generar una ecuación diferencial de primer orden si calculamos la diferencial total; por ejemplo, si $x^2 - 5xy + y^3 = c$, de acuerdo con la ecuación (2)

$$(2x - 5y)\,dx + (-5x + 3y^2)\,dy = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}.$$

Para nuestros fines, es más importante darle vuelta al problema, o sea: dada una ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}, \qquad (3)$$

¿podemos demostrar que la ecuación equivale a

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0?$$

2 DEFINICIÓN 2.2 ón exacta

Una ecuación diferencial $M(x, y) + N(x, y)$ **es una diferencial exacta en una región R del** plano xy si corresponde a la diferencial **de alguna función $f(x, y)$. Una ecuación diferencial** de primer orden de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

es **una ecuación diferencial exacta (diferencial exacta o ecuación exacta), si la expresión del** lado izquierdo es una diferencial ex**acta.**

La ecuación $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$ es exacta, porque

$$d\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy.$$ ■

Obsérvese que, en este ejemplo, si $M(x, y) = x^2y^3$ y $N(x, y) = x^3y^2$, entonces $\partial M/\partial y = 3x^2y^2 = \partial N/\partial x$. El teorema 2.1 indica que esta igualdad de derivadas parciales no es una casualidad.

TEOREMA 2.1 **Criterio para** una **ecuación** diferencial **exacta**

Sean continuas $M(x, y)$ y $N(x, y)$, con derivadas parciales **continuas en** una región **rectangular,** R, **definida** por $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces, la **condición** necesaria y suficiente **para que** $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ sea una diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN DE lA NECESIDAD Para simplificar supongamos que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en toda (x, y). Si la expresión $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ *es* exacta, existe una **función** f **tal** que, para todo x de R,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

En consecuencia
$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

Y
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad de las derivadas parciales mixtas es consecuencia de la continuidad de las primeras derivadas parciales de $M(x, y)$ y $N(x, y)$. ■

La parte de la suficiencia del teorema 2.1 consiste en demostrar que existe una **función,** f, para la cual $\partial f/\partial x = M(x, y)$, y $\partial f/\partial y = N(x, y)$ siempre que se aplique la ecuación (4). En realidad, la construcción de la **función** f **constituye** un procedimiento básico para resolver las ecuaciones diferenciales exactas.

Método de solución Dada una ecuación de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, *se* determina si es válida la igualdad (4). En caso afiiativo, existe una funciónfpara la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y).$$

Podemos determinar f si integramos $M(x, y)$ con respecto a x, manteniendo y constante:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y), \tag{5}$$

en donde la función arbitraria $g(y)$ es la "constante" de integración. Ahora derivamos (5) con respecto a y, y suponemos que $\partial f/\partial y = N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx + g'(y) = N(x, y).$$

Esto da

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx. \tag{6}$$

Por último integramos (6) con respecto a y y sustituimos el resultado en la ecuación (5). La solución de la ecuación es $f(x, y) = c$.

Nota

Es pertinente hacer algunas observaciones. La primera, es importante darse cuenta de que la expresión $N(x, y) - (\partial/\partial y)\int M(x, y)\,dx$ en la ecuación (6) es independiente de x porque

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

En segundo lugar, también pudimos iniciar el procedimiento anterior suponiendo que $\partial f/\partial y = N(x, y)$. Después de integrar N con respecto a y y derivar el resultado, llegaríamos a los análogos de las ecuaciones (5) y (6) que serían, respectivamente,

$$f(x, y) = \int N(x,y)\,dy + h(x) \qquad \text{y} \qquad h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy.$$

En ambos casos, no se deben memorizar las Fórmulas.

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación diferencial exacta**

Resolver $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$.

SOLUCIÓN Igualamos $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$ y tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En consecuencia, la ecuación es exacta y, de acuerdo con el teorema 2.1, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones obtenemos

$$f(x, y) = x^2y + g(y).$$

Determinamos la derivada parcial con respecto a y, igualamos el resultado a $N(x, y)$ y obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1. \qquad \leftarrow N(x, y)$$

Por lo tanto, $\qquad g'(y) = -1 \qquad$ Y $\qquad g(y) = -y.$

No es necesario incluir la constante de integración en este caso porque la solución es $f(x, y) = c$. En la figura 2.4 se ilustran algunas curvas de la familia $x^2y - y = c$.

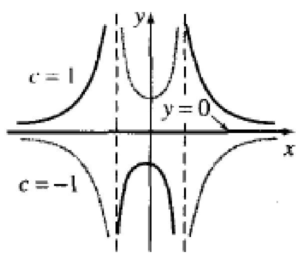

FIGURA 2.4

Nota

La solución de la ecuación no es $f(x, y) = x^2y - y$, sino que es $f(x, y) = c$ o $f(x, y) = 0$, si se usa una constante en la integración de $g'(y)$. Obsérvese que la ecuación también se podría haber resuelto por separación de variables. ■

EJEMPLO 3 Solución de una ecuación diferencial exacta

Resolver $(e^{2y} - y \cos xy)\, dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)\, dy = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación es exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} + xy\operatorname{sen} xy - \cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Entonces, existe una función $f(x, y)$ para la cual

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{Y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Para variar, comenzaremos con la hipótesis que $\partial f/\partial y = N(x, y)$;

esto es, $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - x\cos xy + 2y$$

$$f(x, y) = 2x\int e^{2y}\,dy - x\int \cos xy\,dy + 2\int y\,dy.$$

Recuérdese que la razón por la que x sale del símbolo $\int$ es que en la integración con respecto ay se considera que x es una constante ordinaria. Entonces

$$f(x, y) = xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - y\cos xy + h'(x) = e^{2y} - y\cos xy, \qquad \leftarrow M(x, y)$$

así que $h'(x) = 0$, o $h(x) = c$; por consiguiente, una familia de soluciones es

$$xe^{2y} - \operatorname{sen} xy + y^2 + c = 0.$$ ■

EJEMPLO 4 **Un problema de valor inicial**

Resolver el problema de valor inicial

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\,dx + y\,(1 - x^2)\,dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

SOLUCIÓN La ecuación es exacta, porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Entonces $$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2)$$

$$f(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x') + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

La última ecuación implica que $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$. Al integrar obtenemos

$$h(x) = -\int (\cos x)(-\operatorname{sen} x\,dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Así

$$\frac{y^2}{2}(1 - x') - \frac{1}{2}\cos^2 x = c_1 \quad \text{o sea} \quad y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = c,$$

en donde c reemplazó a $2c_1$. Para que se cumpla la condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$, se requiere que $4(1) - \cos^2(0) = c$ -es decir, que $c = 3$-. Así, una solución del problema es $y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3$. ■

1.7. Ecuaciones lineales

En el capítulo 1 definimos la forma general de una ecuación diferencial lineal de orden n como sigue:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x).$$

Recuérdese que linealidad quiere decir que todos los coeficientes sólo son funciones de x y que y y todas sus derivadas están elevadas a la primera potencia. Entonces, cuando $n = 1$, la ecuación es lineal y de primer orden.

DEFINICIÓN 2.3 **Ecuación lineal**

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad \textbf{(1)}$$

es una **ecuación lineal**.

Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre el primer coeficiente, $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x). \qquad \textbf{(2)}$$

Debemos hallar una solución de (2) en un intervalo I, sobre el cual las dos funciones P y f sean continuas.

En la descripción que sigue ilustraremos una propiedad y un procedimiento, y terminaremos con una fórmula que representa una solución de (2). La propiedad y el procedimiento son más importantes que la fórmula, porque ambos se aplican también a ecuaciones lineales de orden superior.

Propiedad El lector puede comprobar por sustitución directa que la ecuación diferencial (2) tiene la propiedad de que su solución es la **suma** de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{3}$$

y y_p es una solución particular de (2). Podemos determinar y_c por separación de variables. Escribimos la ecuación (3) en la forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0,$$

al integrar y despejar ay obtenemos $y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Por comodidad definiremos $y_c = cy_1(x)$, en donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. Aplicaremos de inmediato el hecho que $dy_1/dx + P(x)y_1 = 0$, para determinar a y_p.

Procedimiento Ahora podemos definir una solución particular de la ecuación (2), siguiendo un procedimiento llamado **variación de parámetros.** Aquí, la idea básica es encontrar una función, u, tal que $y_p = u(x)y_1(x)$, en que y_1, que está definida en el párrafo anterior, sea una solución de la ecuación (2). En otras palabras, nuestra hipótesis de y_p equivale ay, $= cy_1(x)$, excepto que el "parámetro variable" u reemplaza a c. Al sustituir $y_p = uy_1$ en (2) obtenemos

$$\frac{d}{dx}[uy_1] + P(x)uy_1 = f(x)$$

$$u\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{du}{dx} + P(x)uy_1 = f(x)$$

$$u\overbrace{\left[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1\right]}^{\text{cero}} + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

de modo que

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x).$$

Separamos variables, integramos y llegamos a

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx \qquad \text{y} \qquad u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}\,dx.$$

De acuerdo con la definición de y_1, tenemos

$$y_p = uy_1 = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx.$$

Así,

$$y = y_c + y_p = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx. \qquad \textbf{(4)}$$

Entonces, si (1) tiene una solución, debe poseer la forma de la ecuación (4). Recíprocamente, por derivación directa se comprueba que la ecuación (4) es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación (2).

No se debe tratar de memorizar la ecuación (4). Hay un modo equivalente y más fácil de resolver la ecuación (2). Si se multiplica (4) por

$$e^{\int P(x)dx} \qquad \textbf{(5)}$$

y después se deriva

$$e^{\int P(x)dx}y = c + \int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx \qquad \textbf{(6)}$$

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x), \qquad (7)$$

llegamos a

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x). \qquad \textbf{(8)}$$

Al dividir este resultado entre $e^{\int P(x)dx}$ obtenemos la ecuación (2).

Método de solución El método que se recomienda para resolver las ecuaciones (2) consiste, en realidad, en pasar por las ecuaciones (6) a (8) en orden inverso. Se reconoce el lado izquierdo de la ecuación (8) como la derivada del producto de $e^{\int P(x)dx}$ por y. Esto lleva a (7). A continuación integramos ambos lados de (7) para obtener la solución (6). Como podemos resolver (2) por integración, después de multiplicar por $e^{\int P(x)dx}$, esta función se denomina **factor integrante** de la ecuación diferencial. Por comodidad resumiremos estos resultados.

Solución de una ecuación lineal de primer orden

i) Para resolver una ecuación lineal de primer orden, primero se convierte a la forma de (2); esto es, se hace que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.

ii) Hay que identificar $P(x)$ y definir el factor integrante, $e^{\int P(x)dx}$

iii) La ecuación obtenida en el paso *i* se multiplica por el factor integrante:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)\,e^{\int P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

iv) El lado izquierdo de la ecuación obtenida en el paso *iii* es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, y; esto es,

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x).$$

v) Se integran ambos lados de la ecuación obtenida en el paso *iv*.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación diferencial lineal**

Resolver $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$.

SOLUCIÓN Al dividir entre x llegamos a la forma normal

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5e^x. \tag{9}$$

Así escrita, reconocemos que $P(x) = -4/x$ y entonces el factor integrante es

$$e^{-4\int dx/x} = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Hemos aplicado la identidad básica $b^{\log_b N} = N$, $N > 0$. Ahora multiplicamos la ecuación (9) por este término,

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} \quad 4x^{-5}y = xe^x, \tag{10}$$

y obter and obtain
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] = xe^x. \tag{11}$$

Si integramos por partes, llegamos a

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + c \quad \text{0 sea} \quad y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4.$$ ■

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación diferencial lineal**

Resolver $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$.

SOLUCIÓN Esta ecuación diferencial se puede resolver separando variables. También, como la ecuación se encuentra en la forma normal (2), tenemos que el factor integrante es $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$. Multiplicamos la ecuación dada por este factor y el resultado es $e^{-3x}dy/dx - 3e^{-3x}y = 0$. Esta última ecuación equivale a

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-3x}y\right] = 0.$$

Al integrar obtenemos $e^{-3x}y = c$ y, por consiguiente, $y = ce^{3x}$. ■

Solución general Si se supone que $P(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo I y que x_0 es cualquier punto del intervalo, entonces, según el teorema 1.1, existe sólo una solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0. \tag{12}$$

Pero habíamos visto que la ecuación (2) posee una familia de soluciones y que toda solución de la ecuación en el intervalo I tiene la forma de (4). Así, para obtener una solución de la ecuación (12) basta hallar un valor adecuado de c en la ecuación (4). Por consiguiente, el nombre **solución general** que aplicamos a (4) está justificado. Recuérdese que, en algunos casos, llegamos a soluciones singulares de ecuaciones no lineales. Esto no puede suceder en el caso de una ecuación lineal si se pone la atención debida a resolver la ecuación en un intervalo común, en que $P(x)$ y $f(x)$ sean continuas.

EJEMPLO 3 **Solución general**

Determinar la solución general de $(x^2 + 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

SOLUCIÓN Escribimos $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{x^2+9}y = 0$.

La función $P(x) = x/(x^2 + 9)$ es continua en $(-\infty, \infty)$. Entonces, el factor integrante para la ecuación es

$$e^{\int x\,dx/(x^2+9)} = e^{\frac{1}{2}\int 2x\,dx/(x^2+9)} = e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+9)} = \sqrt{x^2+9}$$

y así

$$\sqrt{x^2+9}\,\frac{dy}{dx} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,y = 0.$$

Al integrar

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+9}\,y\right] = 0 \quad \text{da como resultado} \quad \sqrt{x^2+9}\,y = c.$$

Así pues, la solución general en el intervalo es

$$y = \frac{c}{\sqrt{x^2+9}}.$$

■

A excepción del caso en que el primer coeficiente es 1, la transformación de la ecuación (1) a la forma normal (2) requiere dividir entre $a_1(x)$. Si $a_1(x)$ no es una constante, se debe tener mucho cuidado con los puntos donde $a_1(x) = 0$. En forma específica, en la ecuación (2), los puntos en que $P(x)$ —obtenida dividiendo $a_0(x)$ entre $a_1(x)$— sea discontinua son potencialmente problemáticos.

EJEMPLO 4 **Problema de valor inicial**

Resolver el problema de valor inicial $x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x, \quad y(1) = 0.$

SOLUCIÓN Escribimos la ecuación dada en la forma

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2,$$

y vemos que $P(x) = 1/x$ es continua en cualquier intervalo que no contenga al origen. En vista de la condición inicial, resolveremos el problema en el intervalo $(0, \infty)$.

El factor integrante es $e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x$, y así

$$\frac{d}{dx}[xy] = 2x$$

que es igual a $xy = x^2 + c$. Despejamos y y llegamos a la solución general

$$y = x + \frac{c}{x}. \tag{13}$$

Pero $y(1) = 0$ implica que $c = -1$; por consiguiente, la solución es

$$y = x - \frac{1}{x}, \quad 0 < x < \infty. \tag{14}$$

La gráfica de la ecuación **(13)**, como familia monoparamétrica de curvas, se presenta en la figura 2.5. La solución (14) del problema de valor inicial se indica como la línea gruesa en la gráfica ■

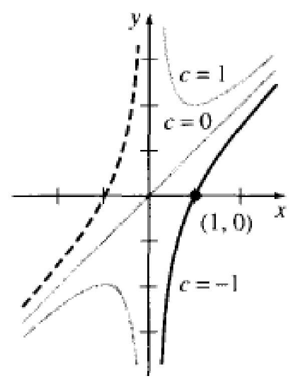

FIGURA 2.5

El ejemplo siguiente muestra cómo resolver la ecuación (2) cuando f tiene una discontinuidad.

EJEMPLO 5 Una $f(x)$ discontinua

Determinar una solución continua que satisfaga

$$\frac{dy}{dx} + y = f(x), \quad \text{en donde} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

y la condición inicial $y(0) = 0$.

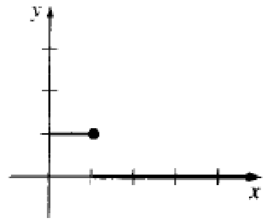

FIGURA 2.6

SOLUCIÓN En la figura 2.6 vemos que f es continua en intervalos, con una discontinuidad en $x = 1$. En consecuencia, resolveremos el problema en las dos partes que corresponden a los dos intervalos en que f está definida. Para $0 \le x \le 1$,

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \qquad 0, \text{ lo que es igual}, \qquad \frac{d}{dx}[e^{x}y] = e^{x}.$$

Al integrar la última ecuación y despejar y, obtenemos $y = 1 + c_1e^{-x}$. Como $y(0) = 0$, se debe cumplir que $c_1 = -1$ y, por consiguiente,

$$y = 1 - e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1.$$

Para $x > 1$,

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

da como resultado $y = c_2e^{-x}$. Por lo anterior podemos escribir

$$y = \begin{cases} . - e - “ , & 0 \le x \le 1 \\ c_2e^{-x}, & x > 1. \end{cases}$$

Ahora, para que y sea función continua, necesitamos que $\lim_{x \to 1^+} y(x) = y(1)$. Este requisito equivale a $c_2e^{-1} = 1 - e^{-1}$, o bien, $c_2 = e - 1$. Como vemos en la figura 2.7, la función

$$y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & 0 \le x \le 1 \\ (e - 1)e^{-x}, & x > 1 \end{cases}$$

es continua pero no es diferenciable en $x = 1$. ■

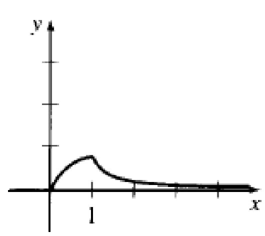

FIGURA 2.7

1.8. Ecuación de Bernoulli

Sustituciones Para resolver una ecuación diferencial, reconocemos en ella cierto tipo de ecuación (separable, por ejemplo), y a continuación aplicamos un procedimiento formado por etapas específicas del tipo de ecuación que nos conducen a una función diferenciable, la cual satisface la ecuación. A menudo, el primer paso es transformarla en otra ecuación diferencial mediante **sustitución.** Por ejemplo. supongamos que se quiere transformar la ecuación de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ con la sustitución $y = g(x, u)$, en que u se considera función de la variable x. Si g tiene primeras derivadas parciales, entonces, la regla de la cadena da,

$$\frac{dy}{dx} = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}.$$

Al sustituir dy/dx con $f(x, y)$ y y con $g(x, u)$ en la derivada anterior, obtenemos la nueva ecuación diferencial de primer orden

$$f(x, g(x, u)) = g_x(x, u) + g_u(x, u)\frac{du}{dx}$$

que, después de despejar du/dx, tiene la forma $du/dx = F(x, u)$. Si podemos determinar una solución $u = \phi(x)$ de esta segunda ecuación, una solución de la ecuación diferencial ordinaria es $y = g(x, \phi(x))$.

Uso de sustituciones: ecuaciones homogéneas Cuando una función f tiene la propiedad

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$$

para un número real α, se dice que f es una **función homogénea** de grado α; por ejemplo, $f(x, y) = x^3 + y^3$ es homogénea de grado 3, porque

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3(x^3 + y^3) = t^3 f(x, y),$$

mientras que $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ no es homogénea.

Una ecuación diferencial de primer orden,

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

es **homogénea** si los coeficientes M y N, a la vez, son funciones homogéneas del *mismo* grado. En otras palabras, la ecuación (1) es homogénea si

$$M(tx, ty) = t^{\alpha} M(x, y) \qquad \text{Y} \qquad N(tx, ty) = t^{\alpha} N(x, y).$$

Método de solución Una ecuación diferencial homogénea como $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ se puede resolver por sustitución algebraica. Específicamente, *alguna* de las dos sustituciones $y = ux$, o $x = vy$, donde u y v son nuevas variables dependientes, *reducen la ecuación a una ecuación diferencial separable, de primer orden.* Para demostrarlo, sustituimos $y = ux$ y su diferencial, $dy = u\, dx + x$, en la ecuación (1):

$$M(x, ux)\, dx + N(x, ux)[u\, dx + x\, du] = 0.$$

Aplicamos la propiedad de homogeneidad para poder escribir

$$x^{\alpha} M(1, u)\, dx + x^{\alpha} N(1, u)[u\, dx + x\, du] = 0$$

o bien $$[M(1, u) + uN(1, u)]\, dx + xN(1, u)\, du = 0,$$

que da $$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)\, du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0.$$

Volvemos a insistir en que esta fórmula no se debe memorizar; más bien, ***cada vez se debe aplicar el método.*** La demostración de que la sustitución $x = vy$ en la ecuación (1) también conduce a una ecuación separable es análoga.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación diferencial homogénea**

Resolver $(x^2 + y^2)\, dx + (x^2 - xy)\, dy = 0$.

SOLUCIÓN Al examinar $M(x, y) = x^2 + y^2$ y $N(x, y) = x^2 - xy$ vemos que los dos coeficientes son funciones homogéneas de grado 2. Si escribimos $y = ux$, entonces $dy = u\, dx$ y así, después de sustituir, la ecuación dada se transforma en

$$(x^2 + u^2x^2)\, dx + (x^2 - ux^2)[u\, dx + x\, du] = 0$$
$$x^2(1 + u)\, dx + x^3(1 - u)\, du = 0$$
$$\frac{1 - u}{1 + u}\, du + \frac{dx}{x} = 0$$
$$\left[-1 + \frac{2}{1 + u}\right] du + \frac{dx}{x} = 0. \quad \leftarrow \text{división larga}$$

Luego de integrar, el último renglón se transforma en

$$-u + 2\ln|1 + u| + \ln|x| = \ln|c|$$

$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| = \ln|c|. \quad \leftarrow \text{sustitución inversa } u = y/x$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para escribir la solución anterior en la forma

$$\ln\left|\frac{(x + y)^2}{cx}\right| = \frac{y}{x} \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad (x + y)^2 = cxe^{y/x}. \qquad \blacksquare$$

Aunque se puede usar cualquiera de las sustituciones en toda ecuación diferencial homogénea, en la práctica probaremos con $x = vy$ cuando la función $M(x, y)$ sea más simple que $N(x, y)$. También podría suceder que después de aplicar una sustitución, nos encontráramos con integrales difíciles o imposibles de evaluar en forma cerrada; en este caso, si cambiamos la variable sustituida quizá podamos tener un problema más fácil de resolver.

Uso de sustituciones: la ecuación de Bernoulli La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = f(x)\, y^n, \tag{2}$$

en que n es cualquier número real, es la **ecuación de Bernoulli**. Obsérvese que cuando $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación (2) es lineal. Cuando $n \neq 0$ y $n \neq 1$, la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma (2) a una ecuación lineal.

EJEMPLO 2 **Solución de una ecuación diferencial de Bernoulli**

Resolver $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^2y^2$.

SOLUCIÓN Primero reformulamos la ecuación como sigue:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$$

dividiéndola entre x. A continuación sustituimos, con $n = 2$,

$$y = u^{-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx} \qquad \leftarrow \text{regla de la cadena}$$

en la ecuación dada, y simplificamos. El resultado es

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -x.$$

El factor integrante para esta ecuación lineal en, por ejemplo $(0, \infty)$, es

$$e^{-\int dx/x} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}.$$

Integramos $$\frac{d}{dx}[x^{-1}u] = -1$$

y obtenemos $$x^{-1}u = -x + c, \quad \text{0 sea,} \quad u = -x^2 + cx.$$

Como $y = u^{-1}$, entonces $y = 1/u$ y, en consecuencia, una solución de la ecuación es

$$y = \frac{1}{-x^2 + cx}.$$ ■

Nótese que en el ejemplo 2 no hemos llegado a la solución general de la ecuación diferencial no lineal original, porque $y = 0$ es una solución singular de esa ecuación.

1.9. Sustituciones diversas

Uso de sustituciones: reducción a separación de variables Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C) \tag{3}$$

siempre se puede reducir a una ecuación con variables separables, con la sustitución $u = Ax + By + C$, $B \neq 0$. En el ejemplo 3 mostraremos esa técnica.

EJEMPLO 3 **Empleo de una sustitución**

Resolver $\dfrac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$.

SOLUCIÓN Si hacemos que $u = -5x + y$, entonces $du/dx = -5 + dy/dx$, y así la ecuación dada se transforma en

$$\frac{du}{dx} + 5 = u^2 - 4 \quad \text{o sea} \quad \frac{du}{dx} = u^2 - 9.$$

Separamos variables, empleamos fracciones parciales e integramos:

$$\frac{du}{(u-3)(u+3)} = dx$$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u-3} - \frac{1}{u+3}\right] = dx$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-3}{u+3}\right| = x + c_1$$

$$\frac{u-3}{u+3} = e^{6x+6c_1} = ce^{6x}. \qquad \leftarrow \text{se sustituye } e^{6c_1} \text{ por } c$$

Al despejar u de la última ecuación para resustituirla, llegamos a la solución

$$u = \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}} \quad \text{o sea} \quad y = 5x + \frac{3(1 + ce^{6x})}{1 - ce^{6x}}.$$ ■