2. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR
2.1. Definición de ecuación diferencial de orden n

Ecuación lineal de orden *n* con coeficientes constantes

La ecuación diferencial lineal de orden *n* con coeficientes constantes es de la siguiente forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

Donde los términos $a_i$representan constantes $\forall i \in \mathbb{N}$En el caso homogéneo cuando el segundo miembro es idénticamente nulo, las soluciones de esta ecuación se pueden obtener a partir de la raíces del polinomio característico de la ecuación:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

En el caso de que todas las raíces sean diferentes la solución viene dada por:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x}$$

En el caso de que existan varias raíces repetidas, siendo m_i la multiplicidad de la raíz i-ésima, la solución es de la forma:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(C_{i,0} + C_{i,1} x + \ldots + C_{i,m_i-1} x^{m_i-1} \right) e^{\lambda_i x} = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j} x^j \right) e^{\lambda_i x}, \quad k \leq$$

Las multiplicidades de cada raíz son el exponente de la siguiente descomposición:

$$a_n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

2.2. Problema del valor inicial

Problema de valores iniciales En la sección 1.2 definimos qué es un problema de valores iniciales para una ecuación diferencial general de orden n. Para una ecuación diferencial lineal, **un problema de valores iniciales de orden n es**

$$\textit{Resolver:}\quad a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$\text{Sujeta } a\text{:}\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1,\ldots,\quad y^{(n-1)}x_0=y_{n-1}. \qquad \textbf{(1)}$$

Recuérdese que, para un problema como éste, se busca una función definida en algún intervalo I que contenga a x_0, y satisfaga la ecuación diferencial y las n condiciones iniciales **especificadas** en x_0: $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$. Ya vimos que en el caso de un problema de valores iniciales de segundo orden, una curva de solución debe pasar por el punto (x_0, y_0) y tener la pendiente y_1 en ese punto.

2.3. Teorema de existencia y unicidad de solución única

Existencia y unicidad En la sección 1.2 enunciamos un teorema que especifica las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de una solución de un problema de valores iniciales de primer orden. El teorema siguiente describe las condiciones suficientes de existencia de solución única para el problema representado por las ecuaciones (1).

TEOREMA 4.1 **Existencia de una solución única**

Sean $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$, . . ., $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x) \neq 0$ para toda x del intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier **punto** en el **intervalo, existe una solución en dicho** intervalo $y(x)$ del problema de valores **iniciales representado** por **las ecuaciones (1) que es** única.

EJEMPLO 1 **Solución única de un problema de valores iniciales**

El problema de valores iniciales

$$3y'''+5y''-y'+7y=0,\qquad y(1)=0,\ y'(1)=0,\ y''(1)=0$$

tiene la solución trivial y = 0. Como la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se satisfacen todas las condiciones del teorema 4.1; en consecuencia, y = 0 es *la* única solución en cualquier intervalo que contenga $x = 1$. ■

EJEMPLO 2 Solución única de un problema de valores iniciales

El lector debe comprobar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es una solución del problema de valores iniciales

$$y'' - 4y = 12x, \qquad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

La ecuación diferencial es lineal, los coeficientes y g(x) son continuos y q(x) = 1 $\neq$ 0 en todo intervalo Z que contenga a $x = 0$. Según el teorema 4.1, debemos concluir que la función dada es la única solución en Z. ∎

Ambos requisitos del teorema 4.1: 1) que $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ sean continuos, y 2) que $a_n(x) \neq 0$ para toda x en Z, son importantes. En forma específica, si u,,(x) = 0 para una x en el intervalo, la solución de un problema lineal de valores iniciales quizá no sea única o incluso no exista; por ejemplo, el lector debe comprobar que la función $y = cx^2 + x + 3$ es una solución del problema de valores iniciales

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 6, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

para x en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y cualquier valor del parámetro c. En otras palabras, no hay solución única para el problema. Aunque se satisface la mayor parte de las condiciones del teorema 4.1, las dificultades obvias estriban en que $a_2(x) = x^2$ es cero cuando $x = 0$, y en que las condiciones iniciales se han impuesto en ese valor.

Problema de valor en la frontera Otro tipo de problema es resolver una ecuación diferencial lineal de segundo ordeno mayor en la que la variable dependiente y, o sus derivadas, estén especificadas en *puntos distintos.* Un problema como

$$\textit{Resolver:} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeta a:} \quad y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$

se llama **problema de valores en la frontera.** Los valores necesarios, y(u) = y_0 y y(b) = y_1, se denominan **condiciones en la frontera.** Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo Z que contiene a a y b, cuya gráfica pasa por los dos puntos (u, y_0) y (b, y_1). Véase la figura 4.1.

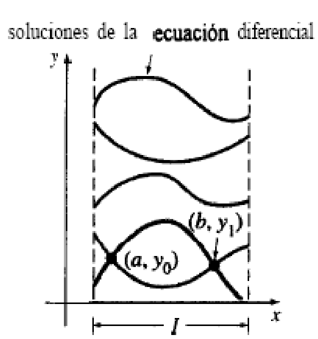

FIGURA 4.1

Para una ecuación diferencial de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser

$$y'(a) = y_0, \quad y(b) = y_1$$
$$y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1$$
$$y'(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1,$$

en donde y_0 y y_1 representan constantes arbitrarias. Estos tres pares de condiciones sólo son casos especiales de las condiciones generales en la frontera:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2.$$

Los ejemplos que siguen demuestran que aun cuando se satisfagan las condiciones del teorema 4.1, un problema de valor en la frontera puede tener i) varias soluciones (Fig. 4.1); ii) solución única, 0 iii) ninguna solución.

EJEMPLO 3 **Un problema de valor en la frontera puede tener muchas soluciones, una 0 ninguna**

En el ejemplo 5 de la sección 1.1 vimos que la familia a dos parámetros de soluciones de la ecuación diferencial $x'' + 16x = 0$ es

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t. \tag{2}$$

a) Supongamos que queremos determinar la solución de la ecuación que además satisfaga las condiciones de frontera $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$. Obsérvese que la primera condición, $0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$, implica que $c_1 = 0$, de modo que $x = c_2 \operatorname{sen} 4t$. Pero cuando $t = \pi/2$, $0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi$ es satisfactoria para cualquier elección de c_2, ya que sen $2\pi = 0$. Entonces, el problema de valores en la frontera

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{3}$$

tiene una cantidad infinita de soluciones. En la figura 4.2 vemos las gráficas de algunos de los miembros de la familia a un parámetro $x = c_2$ sen $4t$ que pasan por los dos puntos, $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

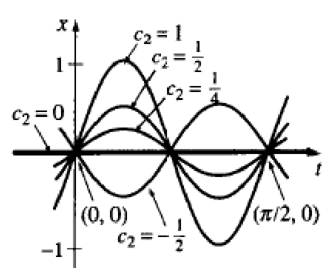

FIGURA 4.2

b) Si se modifica como sigue el problema de valores en la frontera expresado por (3),

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(0) = 0, \; x\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \tag{4}$$

x(O) = 0 sigue determinando que $c_1 = 0$ en la solución (2). Pero al aplicar $x(\pi/8) = 0$ a x $= c_2$ sen $4t$ se requiere que $0 = c_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = c_2 \cdot 1$; en consecuencia, $x = 0$ es una solución de este nuevo problema de valor en la frontera. En realidad, se puede demostrar que $x = 0$ es la solución *única* del sistema (4).

c) Por último, al transformar el problema en

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(0) = 0, \; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{5}$$

vemos, que $c_1 = 0$ porque x(O) = 0 pero, al aplicar $x(\pi/2) = 1$ a $x = c_2$ sen $4t$, llegamos a la contradicción $1 = c_2$ sen $2\pi = c_2 \cdot 0 = 0$. En consecuencia, el problema de valores en la frontera descrito por (5) no tiene solución. ■

2.4. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Una ecuación lineal de orden n de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

se llama **homogénea**, mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{7}$$

donde g(x) no es idénticamente cero, se llama **no homogénea**; por ejemplo, $2y'' + 3y' \; 5y = 0$ es una ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea, mientras que $x^3y''' + 6y' + 10y = e^x$ es una ecuación diferencial de tercer orden, lineal y no homogénea. En este contexto, la palabra *homogénea* no indica que los coeficientes sean funciones homogéneas, como sucedía en la sección 2.4.

Para resolver una ecuación lineal no homogénea como la (7), en primera instancia debemos poder resolver la ecuación homogénea asociada (6).

Operadores diferenciales En cálculo, la diferenciación suele indicarse con la D mayúscula; esto es, $dy/dx = Dy$. El símbolo D se llama **operador diferencial** porque transforma una función diferenciable en otra función; por ejemplo, $D(\cos 4x) = -4 \operatorname{sen} 4x$ y $D(5x^3 - 6x^2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de D en forma natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \qquad \text{y en general} \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny,$$

en donde y representa una función suficientemente diferenciable. Las expresiones polinomiales donde interviene D, como $D + 3$, $D^2 + 3D - 4$ y $5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 9$ también son operadores diferenciales. En general, el **operador diferencial de orden n** se define:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x). \tag{8}$$

Como consecuencia de dos propiedades básicas de la diferenciación, $D(cf(x)) = cDf(x)$, donde c es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de **linealidad**; es decir, L, operando sobre una combinación lineal de dos **funciones diferenciables**, es lo mismo que una combinación lineal de L operando sobre las funciones individuales. En símbolos, esto significa que

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x)), \tag{9}$$

en donde α y β son constantes. A causa de la propiedad (9), se dice que el operador diferencial de orden n, L, es **un operador lineal.**

Ecuaciones diferenciales Toda ecuación diferencial lineal se puede expresar en notación D; por ejemplo, la ecuación diferencial $y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$ se puede escribir en la forma $D^2y + 5Dy + 6y = 5x - 3$ o como $(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$. Al aplicar la ecuación (8), las ecuaciones diferenciales (6) y (7) de orden n se pueden escribir en forma compacta como

$$L(y) = 0 \quad \text{y} \quad L(y) = g(x),$$

respectivamente.

2.4.1. Principio de superposición

Principio de superposición En el siguiente teorema veremos que la suma o superposición de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.

TEOREMA 4.2 Principio de **superposición**, ecuaciones **homogéneas**

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n, ecuación (6), donde x esta en un intervalo I. La combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x),$$

en donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución cuando x está en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN Probaremos el caso $k = 2$. Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Si definimos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, entonces, por la linealidad de L,

$$L(y) = L\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\} = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

■

Corolarios al teorema 4.2

(A) **Un múltiplo constante, $y = c_1y_1(x)$, de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.**

(B) **Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre tiene la solución trivial $y = 0$.**

EJEMPLO 4 Superposición, ecuación diferencial homogénea

Las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ para x en el intervalo $(0, \infty)$. Según el principio de superposición, la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

también es una solución de la ecuación en el intervalo. ■

La función $y = e^{7x}$ es una solución de $y'' - 9y' + 14y = 0$. Como la ecuación diferencial es lineal y homogénea, el múltiplo constante $y = ce^{7x}$ también es una solución. Cuando c tiene diversos valores, $y = 9e^{7x}$, $y = 0$, $y = -\sqrt{5}\, e^{7x}$, . . . son soluciones de la ecuación.

2.5. Dependencia e independencia lineal, wronskiano

Dependencia e independencia lineal Citaremos un par de conceptos básicos para estudiar ecuaciones diferenciales lineales.

DEFINICIÓN 4.1 **Dependencia o independencia lineal**

Se dice que un conjunto de **funciones, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en** un intervalo I si existen constantes, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no **todas cero, tales que**

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x **en el intervalo.** Si el **conjunto de funciones no es linealmente dependiente** intervalo, se dice que **es linealmente independiente.**

En otras palabras, un conjunto de funciones es linealmente independiente en un intervalo si las únicas constantes para las que se cumple

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en el intervalo son $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Es fácil comprender estas definiciones en el caso de dos funciones, $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Si las funciones son linealmente dependientes en un intervalo, existen constantes, c_1 y c_2, que no son cero a la vez, tales que, para toda x en el intervalo, $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$; por consiguiente, si suponemos que $c_1 \neq 0$, entonces

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x);$$

esto es, *si dos funciones son linealmente dependientes, entonces una es un múltiplo constante de la otra.* Al revés, si $f_1(x) = c_2 f_2(x)$ para alguna constante c_2, entonces

$$(-1) \cdot f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$$

para toda x en algún intervalo. Así, las funciones son linealmente dependientes porque al menos una de las constantes no es cero (en este caso $c_1 = -1$). Llegamos a la conclusión de que *dos funciones son linealmente independientes cuando ninguna es múltiplo constante de la otra* en un intervalo. Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $f_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$ porque $f_1(x)$ es múltiplo constante de $f_2(x)$. Con base en la fórmula de doble ángulo para el seno, recuérdese que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Por otro lado, las funciones $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = |x|$ son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. Al ver la figura 4.3 el lector se debe convencer de que ninguna de las funciones es un múltiplo constante de la otra, en el intervalo.

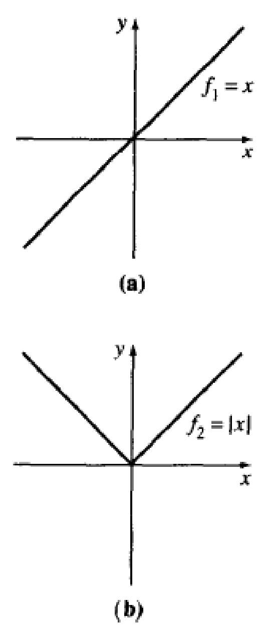

FIGURA 4.3

De lo anterior se concluye que el cociente $f_2(x)/f_1(x)$ no es constante en un intervalo en que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente independientes. En la siguiente sección utilizaremos este detalle.

EJEMPLO 5 **Funciones linealmente dependientes**

Las funciones $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \tan^2 x$ son linealmente dependientes en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ porque

$$c_1 \cos^2 x + c_2 \operatorname{sen}^2 x + c_3 \sec^2 x + c_4 \tan^2 x = 0,$$

cuando $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$, $c_4 = 1$. Hemos aplicado $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. ■

Un conjunto de funciones, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, es linealmente dependiente en un intervalo si se puede expresar al menos una función como combinación lineal de las funciones restantes.

EJEMPLO 6 **Funciones linealmente dependientes**

Las funciones $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = x^2$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, \infty)$ porque f_2 se puede escribir como una combinación lineal de f_1, f_3 y f_4. Obsérvese que

$$f_2(x) = 1 f_1(x) + 5 \cdot f_3(x) + 0 \cdot f_4(x)$$

para toda x en el intervalo $(0, \infty)$. ■

Soluciones de ecuaciones diferenciales Ante todo, nos interesan las funciones linealmente independientes o, con más precisión las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque siempre podemos recurrir a la definición 4.1, sucede que el asunto de si son linealmente independientes las n soluciones, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de una ecuación diferencial lineal de orden n como la (6) se puede definir mecánicamente recurriendo a un determinante.

DEFINICIÓN 4.2 **El wronskiano**

Supóngase que cada una de las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ posee $n - 1$ derivadas al menos. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

en donde las primas representan las derivadas, es el wronskiano de las funciones.

TEOREMA 4.3 **Criterio para soluciones linealmente independientes**

sean n soluciones, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de la ecuación diferencial (6), lineal, homogénea y de orden n, en un intervalo I. Entonces, el conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I si y sólo si

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$$

para toda x en el intervalo.

De acuerdo con el teorema 4.3, cuando $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de (6) en un intervalo I, el wronskiano $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ es idéntico a cero o nunca cero en el intervalo.

Un conjunto de n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene un nombre especial.

DEFINICIÓN 4.3 **Conjunto fundamental de soluciones**

Todo conjunto $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, ecuación (6), en un intervalo I, se llama **conjunta fundamental de** soluciones en el intervalo.

El asunto básico de si existe un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación lineal se contesta con el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4 **Existencia de un conjunto fundamental**

Existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, (6), en un intervalo I.

Así como cualquier vector en tres dimensiones se puede expresar en forma de una combinación lineal de los vectores i, j, k, *linealmente independientes,* toda solución de una ecuación diferencial lineal homogénea y de orden n, en un intervalo I, se puede expresar como una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes en Z. En otras palabras, n soluciones linealmente independientes $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son las unidades constructivas básicas de la solución general de la ecuación.

2.6. Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

TEOREMA 4.5 **Solución general, ecuaciones homogéneas**

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, (6), en un intervalo I. La **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x),$$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

El teorema 4.5 establece que si Y(x) es cualquier solución de (6) en el intervalo, siempre se pueden determinar las constantes Cr, $C_2, \ldots, C_n$ de tal modo que

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x).$$

A continuación demostraremos el caso cuando n = 2.

DEMOSTRACIÓN Sea Y una solución y sean y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de a_2 y" + a_1 y' + $a_0 y = 0$ en un intervalo I. Supongamos que $x = t$ es un punto en I para el que $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Consideremos, también, que Y(r) = k_1 y que Y'(t) = k_2. Si examinamos las ecuaciones

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1$$
$$C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = k_2,$$

veremos que podemos determinar C_1 y C_2 en forma única, siempre que el determinante de los coeficientes satisfaga

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pero este determinante no es más que el wronskiano evaluado en $x = t$, y, por hipótesis, $W \neq 0$. Si definimos G(x) = $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, veremos que i) G(x) satisface la ecuación diferencial porque es una superposición de dos soluciones conocidas, **ii)** G(x) satisface las condiciones iniciales

$$G(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = k_1$$
$$G'(t) = C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = k_2;$$

iii) Y(x) satisface *Za misma* ecuación lineal y *las mismas* condiciones iniciales. Como la solución de este problema lineal de valor inicial es única (teorema 4. **1)**, entonces Y(x) = G(x), o bien Y(x) = $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. ∎

EJEMPLO 7 **Solución general de una ecuación diferencial homogénea**

Las funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea/' $- 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección, las soluciones son linealmente independientes en todos los reales o en todo **R.** Podemos corroborar esto al observar que el wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{matrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{matrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Llegamos a la conclusión de que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y, en consecuencia,

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

es la solución general de la ecuación en el intervalo. ∎

EJEMPLO 8 Solución obtenida a partir de una solución general

La función y = 4 senh $3x - 5e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial del ejemplo 7. (Confíe esta afirmación.) Según el teorema 4.5, podremos obtener esta solución a partir de la solución general $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$. Obsérvese que si elegimos $c_1 = 2$ y $c_2 = -7$, entonces $y = 2e^{3x} - 7e^{-3x}$ se puede escribir en la forma

$$y = 2e^{3x} - 2e^{-3x} - 5e^{-3x} = 4\left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2}\right) - 5e^{-3x}.$$

Esta última expresión es y = 4 senh $3x - 5e^{-3x}$. ∎

EJEMPLO 9 Solución general de una ecuación diferencial homogénea

Las funciones $y_1 = e^{x}$, $y_2 = e^{2x}$ y $y_3 = e^{3x}$ satisfacen la ecuación de tercer orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Como
$$W(e^{x}, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq \text{Cl}$$

para todo valor real de x, las funciones y_1, y_2 y y_3 forman un conjunto fundamental de soluciones en $(-\infty, \infty)$. En conclusión,

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo. ∎

2.6.1. Reducción de orden de una ecuación diferencial lineal de orden dos a una de primer orden, construcción de una segunda solución a partir de otra ya conocida

Uno de los hechos matemáticos más interesantes al estudiar ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden es que podemos formar una segunda solución, y_2, de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

en un intervalo Z a partir de una solución y_1 no trivial. Buscamos una segunda solución, $y_2(x)$, de la ecuación (1) tal que y_1 y y_2 sean linealmente independientes en Z. Recordemos que si y_1 y y_2 son linealmente independientes, su **relación** y_2/y_1 es no constante en I; esto es, $y_2/y_1 = u(x)$ o $y_2 = u(x)y_1(x)$. La idea es determinar la función $u(x)$ sustituyendo $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial dada. Este método se llama **reducción de orden** porque debemos resolver una ecuación lineal ***de primer orden*** para hallar u.

EJEMPLO 1 **Segunda solución por reducción de orden**

Si $y_1 = e^x$ es una solución de $y'' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, aplique la reducción de orden para determinar una segunda solución, y_2.

SOLUCIÓN Si $y = u(x)y_1(x) = u(x)e^x$, según la regla del producto

$$y' = ue^x + e^x u', \qquad y'' = ue^x + 2e^x u' + e^x u'',$$

y así

$$y'' - y = e^x(u'' + 2u') = 0.$$

Puesto que $e^x \neq 0$, para esta ultima ecuación se requiere que $u'' + 2u' = 0$. Al efectuar la sustitución $w = u'$, esta **ecuación** lineal de segundo orden en u se transforma en $w' + 2w = 0$, una ecuación lineal de primer orden en w. Usamos el factor integrante e^{2x} y así podemos escribir

$$\frac{d}{dx}[e^{2x}w] = 0.$$

Después de integrar se obtiene $w = c_1e^{-2x}$, o sea que $u' = c_1e^{-2x}$. Integramos de nuevo y llegamos a

$$u = -\frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2.$$

Por consiguiente,

$$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x. \qquad (2)$$

Al elegir $c_2 = 0$ y $c_1 = -2$ obtenemos la segunda solución que buscábamos, $y_2 = e^{-x}$. Dado que $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para toda x, las soluciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$. ■

Como hemos demostrado que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal de segundo orden, la ecuación (2) es la solución general de $y'' - y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

Caso general Si dividimos por $a_2(x)$ para llevar la ecuación (1) a la **forma estándar**

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{3}$$

en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en algún intervalo I. Supóngase, ademas, que $y_1(x)$ es una solución conocida de (3) en I y que $y_1(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo. Si definimos que $y = u(x)y_1(x)$, entonces

$$y' = uy_1' + y_1u', \qquad y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1u''$$

$$y'' + Py' + Qy = u\underbrace{\left[y_1'' + Py_1' + Qy_1\right]}_{\text{cero}} + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0.$$

Para lo anterior se debe cumplir

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0 \quad \text{0 sea} \quad y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{4}$$

en donde hemos igualado $w = u'$. **Obsérvese** que la última de las ecuaciones (4) es lineal y separable, a la vez. Al separar las variables e integrar obtenemos

$$\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + P\,dx = 0$$

$$\ln|wy_1^2| = -\int P\,dx + c \quad \text{0 sea} \quad wy_1^2 = c_1e^{-\int P dx}.$$

De la última ecuación despejamos w, regresamos a $w = u'$ e integramos de nuevo:

$$u = c_1\int \frac{e^{-\int P dx}}{y_1^2}dx + c_2.$$

Si elegimos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$, vemos en $y = u(x)y_1(x)$ que una segunda solución de la ecuación (3) es

$$y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx. \tag{5}$$

Un buen repaso de la derivación sera comprobar que la **función** $y_2(x)$ definida en la ecuación (5) satisface la ecuación (3) y que y_1 y y_2 son linealnente independientes en cualquier intervalo en que y_1 no sea cero. **Véase** el problema 29, de los ejercicios 4.2.

EJEMPLO 2 Segunda solución con la fórmula (5)

La función $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Determine la solución general en el intervalo $(0, \infty)$.

SOLUCIÓN Partimos de la forma reducida de la ecuación,

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0,$$

y vemos, de acuerdo con (5), que $\quad y_2 = x^2 \int \frac{e^{3\int dx/x}}{x^4} dx \qquad \leftarrow e^{3\int dx/x} = e^{\ln x^3} = x^3$

$$= x^2 \int \frac{dx}{x} x^2 \ \ln x.$$

La solución general en $(0, \infty)$ esta **definida** por $y = c_1y_1 + c_2 y_2$; esto es,

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x.$$

2.6.2. Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

Hemos visto que la ecuación lineal de primer orden, $dy/dx + ay = 0$, donde a es una constante, tiene la solución exponencial $y = c_1 e^{-ax}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$; por consiguiente, lo más natural es tratar de determinar si existen soluciones exponenciales en $(-\infty, \infty)$ de las ecuaciones lineales homogéneas de orden superior del tipo

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0, \qquad (1)$$

en donde los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales y $a_n \neq 0$. Para nuestra sorpresa, todas las soluciones de la ecuación (1) son funciones exponenciales o están formadas a partir de funciones exponenciales.

2.6.2.1. Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos

EJEMPLO 1 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Resuelva las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$ (b) $y'' - 10y' + 25y = 0$ (c) $y'' + y' + y = 0$

SOLUCIÓN Presentaremos las ecuaciones auxiliares, raíces y soluciones generales correspondientes.

(a) $2m^2 - 5m - 3 = (2m + 1)(m - 3) = 0$, $m_1 = -\frac{1}{2}$, $m_2 = 3$,
$y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{3x}$

(b) $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$, $m_1 = m_2 = 5$,
$y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$

(c) $m^2 + m + 1 = 0$, $m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$ ■

EJEMPLO 2 Problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

SOLUCIÓN Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 13 = 0$ son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$, de modo que

$$y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x).$$

Al aplicar la condición $y(0) = -1$, vemos que $-1 = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)$ y que $c_1 = -1$. Diferenciamos la ecuación de arriba y a continuación, aplicando $y'(0) = 2$, obtenemos $2 = 3c_2 - 2$, o sea, $c_2 = \frac{4}{3}$; por consiguiente, la solución es

$$y = e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{4}{3}\operatorname{sen} 3x\right).$$ ■

Las dos ecuaciones diferenciales, $y'' + k^2y = 0$ y $y'' - k^2y = 0$, k real, son importantes en las matemáticas aplicadas. Para la primera, la ecuación auxiliar $m^2 + k^2 = 0$ tiene las raíces imaginarias $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$. Según la ecuación (8), con $\alpha = 0$ y $\beta = k$, la solución general es

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx. \tag{9}$$

La ecuación auxiliar de la segunda ecuación, $m^2 - k^2 = 0$, tiene las raíces reales distintas $m_1 = k$ y $m_2 = -k$; por ello, su solución general es

$$y = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}. \tag{10}$$

Obsérvese que si elegimos $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ y después $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$ en (10), llegamos a las soluciones particulares $y = (e^{kx} + e^{-kx})/2 = \cosh kx$ y $y = (e^{kx} - e^{-kx})/2 = \operatorname{senh} kx$. Puesto que $\cosh kx$ y $\operatorname{senh} kx$ son linealmente independientes en cualquier intervalo del eje x, una forma alternativa de la solución general de $y'' - k^2y = 0$ es

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx.$$

2.6.2.2. Ecuación característica (raíces reales y distintas, raíces reales e iguales, raíces complejas conjugadas)

Método de solución Comenzaremos con el caso especial de la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

Si probamos con una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, de modo que la ecuación (2) se transforma en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \quad \text{o sea} \quad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como e^{mx} nunca es cero cuando x tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es eligiendo una m tal que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3}$$

Esta ecuación se llama **ecuación auxiliar o ecuación característica** de la ecuación diferencial (2). Examinaremos tres casos: las soluciones de la ecuación auxiliar que corresponden a raíces reales distintas, raíces reales e iguales y raíces complejas conjugadas.

CASO I: Raíces reales distintas Si la ecuación (3) tiene dos raíces reales distintas, m_1 y m_2, llegamos a dos soluciones, $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$. Estas funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$ y, en consecuencia, forman un conjunto fundamental. Entonces, la solución general de la ecuación (2) en ese intervalo es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \tag{4}$$

CASO II: Raíces reales e iguales Cuando $m_1 = m_2$ llegamos, necesariamente, sólo a una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1x}$. Según la fórmula cuadrática, $m_1 = -b/2a$ porque la única forma de que $m_1 = m_2$ es que $b^2 - 4ac = 0$. Así, por lo argumentado en la sección 4.2, una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}\,dx = e^{m_1x}\int dx = xe^{m_1x}. \tag{5}$$

En esta ecuación aprovechamos que $-b/a = 2m_1$. La solución general es, en consecuencia,

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}. \tag{6}$$

CASO III: Raíces complejos conjugados Si m_1 y m_2 son complejas, podremos escribir $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde α y $\beta > 0$ y son reales, e $i^2 = -1$. No hay diferencia formal entre este caso y el caso 1; por ello,

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Sin embargo, en la práctica se prefiere trabajar con funciones reales y no con exponenciales complejas. Con este objeto se usa la formula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

en que θ es un número real. La consecuencia de esta fórmula es que

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \qquad \text{Y} \qquad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x, \tag{7}$$

en donde hemos empleado $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. Obsérvese que si primero sumamos y después restamos las dos ecuaciones de (7), obtenemos respectivamente

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \qquad \text{Y} \qquad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}\beta x.$$

Como $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ es una solución de la ecuación (2) para cualquier elección de las constantes C_1 y C_2, si $C_1 = C_2 = 1$ y $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ obtenemos las soluciones:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \qquad \text{Y} \qquad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Pero
$$y_1 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$$

Y
$$y_2 = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x.$$

En consecuencia, según el corolario (A) del teorema 4.2, los dos últimos resultados demuestran que las funciones reales $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones de la ecuación (2). Además, esas soluciones forman un conjunto fundamental en $(-\infty, \infty)$; por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ &= e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x). \end{aligned} \tag{8}$$

2.7. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Ecuaciones de orden superior En general, para resolver una ecuación diferencial de orden n como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{11}$$

en donde las a_i, $i = 0, 1, \dots, n$ son constantes reales, debemos resolver una ecuación polinomial de grado n:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \dots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0. \tag{12}$$

Si todas las raíces de la ecuación (12) son reales y distintas, la solución general de la ecuación (11) es

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x}.$$

Es más difícil resumir los análogos de los casos II y III porque las raíces de una ecuación auxiliar de grado mayor que dos pueden presentarse en muchas combinaciones. Por ejemplo, una ecuación de quinto grado podría tener cinco raíces reales distintas, o tres raíces reales distintas y dos complejas, o una real y cuatro complejas, cinco reales pero iguales, cinco reales pero dos iguales, etcétera. Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de grado n (esto es, k raíces son iguales a m_1), se puede demostrar que las soluciones linealmente independientes son

$$e^{m_1 x}, x e^{m_1 x}, x^2 e^{m_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{m_1 x}$$

y que la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + c_k x^{k-1} e^{m_1 x}.$$

Por ultimo, recuérdese que cuando los coeficientes son reales, las raíces complejas de una ecuación auxiliar siempre aparecen en pares conjugados. Así, por ejemplo, una ecuación polinomial cúbica puede tener dos raíces complejas cuando mucho.

EJEMPLO 3 **Ecuación diferencial de tercer orden**

Resolver $y''' + 3y'' - 4y = 0$.

SOLUCIÓN Al examinar $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$ debemos notar que una de sus raíces es $m_1 = 1$. Si dividimos $m^3 + 3m^2 - 4$ entre $m - 1$, vemos que

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$

y entonces las demás raíces son $m_2 = m_3 = -2$. Así, la solución general es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}.$$ ∎

2.8. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas . .

4.1.3 Ecuaciones no homogéneas

Toda función y_p libre de parámetros arbitrarios que satisface la ecuación (7) se llama **solución particular o integral particular** de la ecuación; por ejemplo, se puede demostrar directamente que la función constante y_p 3 es una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + 9y = 27$.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ son soluciones de la ecuación (6) en un intervalo *Z* y y_p es cualquier solución particular de la ecuación (7) en Z, entonces, la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) + y_p \qquad \textbf{(10)}$$

también es una solución de la ecuación (7) no homogénea. Si el lector lo medita tiene sentido, ya que la combinación lineal $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_k y_k(x)$ se transforma en 0 mediante el operador $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$, mientras que y_p se convierte en g(x). Si usamos k n soluciones linealmente independientes de la ecuación (6) de orden n, la expresión (10) viene a ser la solución general de (7).

2.8.1. Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas

TEOREMA 4.6 Solución general, ecuaciones no homogéneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal, no homogénea, de orden n, ecuación (7), en un intervalo I, y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (6), en I. Entonces, la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p,$$

en donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACIÓN Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si definimos $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, por la linealidad de L se debe cumplir

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$; por consiguiente, según el teorema 4.5, $u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + . + c_n y_n(x)$, y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

o sea

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x). \qquad \blacksquare$$

Función complementaria En el teorema 4.6 vemos, que la solución general de una ecuación lineal no homogénea consiste en la suma de dos funciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal $y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$, que es la solución general de **(6), se** llama **función complementaria** para la ecuación (7). En otras **palabras, para** resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se determina cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es, entonces,

y = función complementaria + cualquier solución particular.

EJEMPLO 10 Solución general de una ecuación diferencial no homogénea

Se demuestra fácilmente por sustitución que la función $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 3x. \qquad \textbf{(11)}$$

Para llegar a la solución general de (1 1), también debemos resolver la ecuación homogénea asociada

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Pero en el ejemplo 9 vimos, que la solución general de esta última ecuación era $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$; por lo tanto, la solución general de (ll) en el intervalo es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$