### 2.8.2. Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas (coeficientes indeterminados, método de la superposición, método de operador anulador).

A continuación veremos algunos ejemplos de las clases de funciones g(x) adecuadas para nuestra descripción:

$$g(x) = 10,\ g(x) = x^2 - 5x,\ g(x) = 15x - 6 + 8e^{-x},$$
$$g(x) = \operatorname{sen} 3x - 5x \cos 2x,\quad g(x) = e^x \cos x + (3x^2 - 1)e^{-x},$$

etc.: esto es, g(x) es **una** combinación lineal de funciones del tipo

$$k \text{ (constante)},\ x^n,\ x^n e^{\alpha x},\ x^n e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{y} \quad x^n e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x,$$

en donde $n$ es un entero no negativo y $\alpha$ y $\beta$ son números reales. El método de los coeficientes indeterminados no se aplica a ecuaciones de la forma (1) cuando

$$g(x) = \ln x,\quad g(x) = \frac{1}{x},\quad g(x) = \tan x,\quad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x,$$

etc. En la sección 4.6 se trataran ecuaciones diferenciales en que la "entrada" (input) de la ecuación, g(x), sea una función como estas últimas.

El conjunto de funciones formado por constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos tiene la notable propiedad de que las derivadas de sus sumas y productosson, de nuevo, sumas y productos de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. Como la **combinación** lineal de las derivadas $a_n y_p^{(n)} + a_{n-1} y_p^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_p' + a_0 y_p$ debe ser idéntica a g(x), parece lógico suponer que $y_p$ *tiene la misma forma que g(x).*

Ilustraremos el **método** básico con dos ejemplos.

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \qquad \textbf{(1)}$$

debemos pasar por dos etapas:

*i)* Determinar la función complementaria, $y_c$.
*ii)* Establecer *cualquier* solución particular, $y_p$, de la ecuación no homogénea.

Entonces, como vimos en la sección 4.1, la solución general de (1) en un intervalo es $y = y_c + y_p$.

La función complementaria $y_c$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$. En la última sección vimos cómo resolver estas ecuaciones cuando los coeficientes son constantes. El primero de dos **métodos** que debemos considerar para obtener una solución particular, $y_p$, se llama **método de los coeficientes indeterminados**. La idea básica es una conjetura o propuesta coherente acerca de la forma de $y_p$ originada por los tipos de funciones que forman el dato g(x). El **método** es básicamente directo, pero está limitado a ecuaciones lineales no **homogéneas,** como la ecuación **(1),** en que

- Los coeficientes $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes
- g(x) es una constante $k$, una función polinomial, una función exponencial $e^{\alpha x}$, funciones seno o coseno como sen $\beta x$, $\cos \beta x$, o sumas y productos finitos de esas funciones.

**EJEMPLO 1** **Solución general con coeficientes indeterminados**

Resolver $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6.$ **(2)**

**SOLUCIÓN** **Paso** 1. Primero resolveremos la ecuación homogénea asociada $y'' + 4y' - 2y = 0$. Al aplicar la fórmula cuadrática tenemos que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 4m - 2 = 0$ son $m_1 = -2 - \sqrt{6}$ y $m_2 = -2 + \sqrt{6}$. Entonces, la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

**Paso** 2. Como la función g(x) es un polinomio cuadrático, supondremos una solución particular que también tenga la forma de un polinomio **cuadrático:**

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Tratamos de determinar coeficientes *A*, *B* y *C* ***específicos*** para los que $y_p$ sea una solución de (2). Sustituimos $y_p$ y las derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \qquad y \qquad y_p'' = 2A$$

en la ecuación diferencial dada, la ecuación **(2),** y obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' - 2y_p &= 2A + 8Ax + 4B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C \\ &= 2x^2 - 3x + 6. \end{aligned}$$

Como se supone que esta ecuación es una identidad, los coeficientes de potencias de $x$ de igual grado deben ser iguales:

igual

$$\boxed{-2A}\,x^2 + \boxed{8A - 2B}\,x + \boxed{2A + 4B - 2C} = 2x^2 - 3x + 6.$$

Esto es,

$$-2A = 2, \qquad 8A - 2B = -3, \qquad 2A + 4B - 2C = 6.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtienen $A = -1$, $B = -\frac{5}{2}$ y $C = -9$. Así, una solución particular es

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

**Paso** 3. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$ ■

**EJEMPLO 2** **Solución particular mediante coeficientes indeterminados**

Determine una solución particular de $y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen} 3x$.

**SOLUCIÓN** Una primera estimación lógica de una solución particular sería $A \operatorname{sen} 3x$; pero como las diferenciaciones sucesivas de $\operatorname{sen} 3x$ dan $\operatorname{sen} 3x$ y *también* $\cos 3x$, tenemos que suponer una solución particular que posea ambos términos:

$$y_p = A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x.$$

Al diferenciar $y_p$, sustituir los resultados en la ecuación diferencial original y reagrupar, tenemos

$$y_p'' - y_p' + y_p = (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} 3x$$

igual

$$\boxed{-8A-3B}\cos 3x + \boxed{3A-8B}\,\text{sen}\,3x = 0\cos 3x + 2\,\text{sen}\,3x.$$

Del sistema

$$-8A-3B=0, \qquad 3A-8B=2,$$

obtenemos $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Una solución particular de la ecuación es

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\,\text{sen}\,3x. \qquad \blacksquare$$

Como ya mencionamos, la forma que supongamos para la solución particular $y_p$ es una estimación coherente, no a ciegas. Dicha estimación ha de tener en cuenta no sólo los tipos de funciones que forman a g(x), sino (como veremos en el ejemplo **4),** las funciones que forman la función complementaria $y_c$.

**EJEMPLO 3** **Formación de $y_p$ por superposición**

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$. *(3)*

**SOLUCIÓN** Paso 1. Primero se determina la solución de la ecuación homogénea asociada, $y'' - 2y' - 3y = 0$, solución que es $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$.

Paso 2. A continuación, la aparición de $4x - 5$ en g(x) sugiere que la solución particular contiene un polinomio lineal. Además, como la derivada del producto $xe^{2x}$ produce $2xe^{2x}$ y $e^{2x}$, también supondremos que en la solución particular hay términos en $xe^{2x}$ y en e”; en otras palabras, g es la suma de dos tipos básicos de funciones:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = \textit{polinomio} + \textit{exponenciales}.$$

En consecuencia, el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 4.7) sugiere que busquemos una solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2},$$

donde $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x}$. Sustituimos:

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + Ee^{2x}$$

en la ecuación dada (3) y agrupamos los términos semejantes:

$$y_p'' - 2y_p' - 3y_p = -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3E)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}. \qquad (4)$$

De esta identidad se obtienen cuatro ecuaciones:

$$-3A = 4, \quad -2A - 3B = -5, \quad -3C = 6, \quad 2C - 3E = 0.$$

La ultima ecuación del sistema proviene de la interpretación de que el coeficiente de $e^{2x}$ en el lado derecho de (4) es cero. Al resolver el sistema llegamos a $A = -\frac{4}{3}$, $B = \frac{23}{9}$, $C = -2$ y $E = -\frac{4}{3}$. En consecuencia,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

**Paso** 3. La solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - \left(2x + \frac{4}{3}\right)e^{2x}.$$ ■

De acuerdo con el principio de superposición, teorema 4.7, también podemos atacar al ejemplo 3 resolviendo dos problemas más sencillos. El lector debe comprobar que al sustituir

$$y_{p_1} = Ax + B \qquad \text{en } y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$$

Y

$$y_{p_2} = Cxe^{2x} + Ee^{2x} \quad \text{en} \quad y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$$

se tiene, $y_{p_1} = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9}$ y $y_{p_2} = -(2x + \frac{4}{3})e^{2x}$. Entonces, una solución particular de la ecuación (3) es $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$.

En el próximo ejemplo veremos que, a veces, la hipótesis "obvia" de la forma de $y_p$ no es una conjetura correcta.

## EJEMPLO 4 Un tropiezo del método

Determine una solución particular de $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.

**SOLUCIÓN** Al derivar $e^x$ no se obtienen funciones nuevas. Así, si procedemos como en los ejemplos anteriores, es lógico suponer **una solución** particular de la forma $y_p = Ae^x$. Pero al sustituir esta **expresión** en la ecuación diferencial obtenemos la afirmación contradictoria

$$0 = 8e^x,$$

y vemos que nuestra hipótesis de $y_p$ fue incorrecta.

**Aquí,** la dificultad se aclara al examinar la función complementaria $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Vemos que la supuesta $Ae^x$ ya está presente en $y_c$. Esto quiere decir que $e^x$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, y al sustituir **un** múltiplo constante $Ae^x$ en la ecuación diferencial se obtendra, necesariamente, cero.

**¿Entonces,** cuál debe ser la forma de $y_p$? Siguiendo el caso II de la sección 4.3, veamos si podemos tener una solución particular de la forma

$$y_p = Axe^x.$$

Sustituimos $y'_p = Axe^x + Ae^x$ y $y''_p = Axe^x + 2Ae^x$ en la ecuación diferencial, simplificamos y obtenemos

$$y''_p - 5y'_p + 4y_p = -3Ae^x = 8e^x.$$

En esta ecuación vemos que el valor de $A$ es $A = -\frac{8}{3}$; por consiguiente, una solución **particular** de la ecuación dada es

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x. \qquad \blacksquare$$

La diferencia entre los procedimientos que empleamos en los ejemplos 1 a 3 y 4 nos lleva a considerar dos casos. El primero refleja lo que sucede en los ejemplos 1 a 3.

**CASO I: Ninguna función en la solución particular supuesta es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.**

En la tabla 4.1 mostramos algunos ejemplos específicos de g(x) en (1), con la forma correspondiente de la solución particular. Naturalmente, suponemos que ninguna función, en la solución particular $y_p$ supuesta **está** duplicada (o reproducida) por una función en la solución complementaria $y_c$.

**TABLA 4.1** Soluciones particulares tentativas

| $g(x)$ | Forma de $y_p$ |
|---|---|
| 1. 1 (una constante) | $A$ |
| 2. $5x + 7$ | $Ax + B$ |
| 3. $3x^2 - 2$ | $Ax^2 + Bx + C$ |
| 4. $x^3 - x + 1$ | $Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$ |
| 5. sen $4x$ | $A\cos 4x + B\,\text{sen}\,4x$ |
| 6. $\cos 4x$ | $A\cos 4x + B\,\text{sen}\,4x$ |
| 7. $e^{5x}$ | $Ae^{5x}$ |
| 8. $(9x - 2)\,e^{5x}$ | $(Ax + B)\,e^{5x}$ |
| 9. $x^2e^{5x}$ | $(Ax^2 + Bx + C)\,e^{5x}$ |
| 10 $e^{3x}$ sen $4x$ | $Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\,\text{sen}\,4x$ |
| 11. $5x^2$ sen $4x$ | $(Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Ex^2 + Fx + G)\,\text{sen}\,4x$ |
| 12. $xe^{3x}\cos 4x$ | $(Ax + B)\,e^{3x}\cos 4x + (Cx + E)\,e^{3x}\,\text{sen}\,4x$ |

**EJEMPLO 5** Formas de soluciones particulares, caso I

Determine la forma de una solución particular de

(a) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3e^{-x} - 7e^{-x}$ (b) $y'' + 4y = x\cos x$

**SOLUCIÓN** a) Podemos escribir $g(x) = (5x^3 - 7)e^{-x}$. Tomamos nuestro modelo del renglón 9 de la tabla 4.1, y suponemos que una solución particular tiene la forma

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{-x}.$$

Obsérvese que no hay duplicación entre los términos dey,, y los de la función complementaria $y_c = e^{4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$.

b) La función $g(x) = x \cos x$ se parece a la del renglón ll de la tabla 4.1 excepto que usamos un polinomio lineal y no cuadrático, y $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en lugar de $\cos 4x$ y $\operatorname{sen} 4x$, en la forma dey,:

$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + E)\operatorname{sen} x.$$

Nótese que no hay duplicación de términos entre $y_p$ y $y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$. ∎

Si $g(x)$ está formada por una suma de, digamos, $m$ términos del tipo de los de la tabla, entonces, como en el ejemplo 3, la hipótesis de una solución particular $y_p$ consiste en la suma de las formas tentativas $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_m}$ que corresponden a los términos

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}.$$

Lo que acabamos de decir se puede formular también como

***Regla de formación para el caso I** La forma dey,, es una combinación lineal de **todas las funciones linealmente independientes generadas por diferenciaciones** repetidas de g(x).*

**EJEMPLO 6** **Formación de $y_p$ por superposición, caso I**

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5 \operatorname{sen} 2x + 7xe^{6x}.$$

**SOLUCIÓN**

Suponemos que $3x^2$ corresponde a $\quad y_{p_1} = Ax^2 + Bx + C.$

Suponemos que $-5 \operatorname{sen} 2x$ corresponde a $\quad y_{p_2} = E\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x.$

Suponemos que $7xe^{6x}$ corresponde a $\quad y_{p_3} = (Gx + H)e^{6x}.$

Entonces, la propuesta de solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = Ax^2 + Bx + C + E\cos 2x + F\operatorname{sen} 2x + (Gx + H)e^{6x}.$$

Ningún término de esta propuesta repite, o duplica, un término de $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$. ∎

**CASO II: Una función en la solución particular supuesta también es una solución de la ecuación diferencial homogénea asociada.**

El ejemplo que sigue se parece al 4.

**EJEMPLO 7** **Solución particular, caso II**

Determine una solución particular de $y'' - 2y' + y = e^x$.

**SOLUCIÓN** La solución complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$. Al igual que en el ejemplo 4, la hipótesis $y_p = Ae^x$ no dará resultado porque se ve, en $y_c$, que $e^x$ es una solución de la ecuación homogénea asociada $y'' - 2y' + y = 0$. Además, no podremos determinar una solución particular de la forma $y_p = Axe^x$, ya que el término $xe^x$ también está duplicado en $y_c$. Probaremos a continuación con

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial dada se obtiene

$$2Ae^x = e^x, \qquad \text{de modo que} \qquad A = \frac{1}{2}.$$

Entonces, una solución particular es $y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$. ∎

Supongamos de nuevo que g(x) está formada por m términos de los tipos que aparecen en la tabla 4.1 y que la hipótesis normal de una solución particular es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m},$$

en donde las $y_{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ son formas tentativas de solución particular que corresponden a esos términos. En las condiciones descritas en el caso II podemos establecer la siguiente regla general:

*Regla de **multiplicación** para el caso II Si alguna $y_{p_i}$ contiene términos que duplican los términos en $y_c$, entonces $y_{p_i}$ se debe multiplicar por $x^n$, donde n es el entero positivo **mínimo** que elimina esa duplicación.*

**EJEMPLO 8** **Un problema de valores iniciales**

Resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + y = 4x + 10 \operatorname{sen} x, \qquad y(\pi) = 0, \; y'(\pi) = 2.$$

**SOLUCIÓN** La solución de la ecuación homogénea asociada, $y'' + y = 0$, es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Como $g(x) = 4x + 10 \operatorname{sen} x$ es la suma de un polinomio lineal y una función senoidal, nuestra tentativa lógica de $y_p$, según los renglones 2 y 5 de la tabla 4.1, **sería** la suma de $y_{p_1} = Ax + B$ y $y_{p_2} = C \cos x + E \operatorname{sen} x$:

$$y_p = Ax + B + C\cos x + E\operatorname{sen} x. \tag{5}$$

Pero hay una duplicación obvia en los términos $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ en esta forma tentativa y dos términos de la función complementaria. Podemos eliminar esta repetición con sólo multiplicar $y_{p_2}$ por x. En lugar de la ecuación (5) usaremos ahora

$$y_p = Ax + B + Cx\cos x + Ex\operatorname{sen} x. \tag{6}$$

Al derivar esta expresión y sustituir los resultados en la ecuación diferencial se obtiene

$$y_p'' + y_p = Ax + B \quad 2C\operatorname{sen}x + 2E\cos x = 4x + 10\operatorname{sen} x,$$

y así

$$A = 4, \quad B = 0, \quad -2C = 10, \quad 2E = 0.$$

Las soluciones del sistema se ven de inmediato: $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$ y $E = 0$. Entonces, de acuerdo con (6), obtenemos $y_p = 4x - 5x \cos x$. La solución general de la ecuación dada es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

Ahora aplicaremos las condiciones iniciales a la solución general de la ecuación. Primero, $y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \operatorname{sen} \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0$ da $c_1 = 9\pi$, porque $\cos \pi = -1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$. A continuación, a partir de la derivada

$$y' = -9\pi \operatorname{sen}x + c_2 \cos x + 4 + 5x\operatorname{sen}x - 5 \cos x$$

Y

$$y'(\pi) = -9\pi \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi + 4 + 5\pi \operatorname{sen} \pi - 5 \cos \pi = 2$$

llegamos a $c_2 = 7$. La solución del problema de valor inicial es

$$y = 9\pi \cos x + 7 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

■

**EJEMPLO 9** Empleo de la regla de multiplicación

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$.

**SOLUCIÓN** La función complementaria es $y_c = c_1 e^{3x} + c_2xe^{3x}$. Entonces, basándonos en los renglones 3 y 7 de la tabla 4.1, la hipótesis normal de una solución particular sería

$$y_p = \underbrace{Ax^2 + Bx + C}_{y_{p_1}} + \underbrace{Ee^{3x}}_{y_{p_2}}.$$

Al revisar estas funciones vemos que un término de $y_{p_2}$ está repetido en $y_c$. Si multiplicamos $y_{p_2}$ por $x$ el término $xe^{3x}$ sigue siendo parte de $y_c$. Pero si multiplicamos $y_{p_2}$ por $x^2$ se eliminan todas las duplicaciones. Así, la forma operativa de una solución particular es

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + Ex^2e^{3x}.$$

Si derivamos esta forma, sustituimos en la ecuación diferencial y reunimos los términos semejantes, llegamos a

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2Ee^{3x} = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

De acuerdo con esta identidad, $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$ y $E = -6$.
Por lo tanto, la solución general $y = y_c + y_p$, es

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}.$$

■

**EJEMPLO 10** **Ecuación diferencial de tercer orden, caso I**

Resuelva $y''' + y'' = e^x \cos x$.

**SOLUCIÓN** Partimos de la ecuación característica $m^3 + m^2 = 0$ y vemos que $m_1 = m_2 = 0$, y $m_3 = -1$. Entonces, la función complementaria de la ecuación es $y_c = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$. Si $g(x) = e^x \cos x$, de acuerdo con el renglón 10 de la tabla 4.1, deberíamos suponer

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \operatorname{sen} x.$$

Como no hay funciones en $y_p$ que repiten las funciones de la solución complementaria, procederemos normalmente. Partimos de

$$y_p''' + y_p'' = (-2A + 4B)e^x \cos x + (-4A - 2B)e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x$$

y obtenemos $$-2A + 4B = 1, \qquad -4A - 2B = 0.$$

Con este sistema tenemos $A = -\frac{1}{10}$ y $B = \frac{1}{5}$, de tal suerte que una solución particular es $y_p = -\frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x$. La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} - \frac{1}{10}e^x \cos x + \frac{1}{5}e^x \operatorname{sen} x.$$ ■

**EJEMPLO 11** **Ecuación diferencial de cuarto orden, caso II**

Determine la forma de una solución particular de $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$.

**SOLUCIÓN** Comparamos $y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$ con nuestra tentativa normal de solución particular

$$y_p = \underbrace{A}_{y_{p_1}} + \underbrace{Bx^2e^{-x} + Cxe^{-x} + Ee^{-x}}_{y_{p_2}},$$

vemos que se eliminan las duplicaciones entre $y_c$ y $y_p$ cuando se multiplica $y_{p_1}$ por $x^3$ y $y_{p_2}$ por x. Así, la hipótesis correcta de una solución particular es

$$y_p = Ax^3 + Bx^3e^{-x} + Cx^2e^{-x} + Exe^{-x}.$$ ■

En la sección 4.1 planteamos que una ecuación diferencial lineal de orden $n$ se puede escribir como sigue:

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \dots + a_1Dy + a_0y = g(x), \tag{1}$$

en donde $D^k y = d^k y/dx^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Cuando nos convenga, representaremos también esta ecuación en la forma $L(x) = g(x)$, donde $L$ representa el operador diferencial lineal de orden $n$:

$$L = a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0. \tag{2}$$

La notación de operadores es más que taquigrafía útil; en un nivel muy práctico, la *aplicación* de los operadores diferenciales nos permite llegar a una solución particular de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Antes de hacerlo, necesitamos examinar dos concepto%:

**Factorización de operadores** Cuando las $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ son constantes reales, se puede *factorizar* un operador diferencial lineal (2) siempre que se factorice el polinomio característico $a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0$. En otras palabras, si $r_1$ es una raíz de la ecuación

$$a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0,$$

entonces $L = (D - r_1)P(D)$, donde la expresión polinomial P(D) es un operador diferencial lineal de orden $n - 1$; por ejemplo, si manejamos $D$ como una cantidad algebraica, el operador $D^2 + SD + 6$ se puede factorizar como $(D + 2)(D + 3)$ o bien $(D + 3)(D + 2)$. Así, si una función $y = f(x)$ tiene segunda derivada,

$$(D^2 + SD + 6)y = (D + 2)(D + 3)y = (D + 3)(D + 2)y.$$

Lo anterior es un ejemplo de una propiedad general:

*Los factores de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes son conmutativos.*

Una ecuación diferencial como $y'' + 4y' + 4y = 0$ se puede escribir en la forma

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \text{ o sea } (D + 2)(D + 2)y = 0 \text{ o sea } (D + 2)^2 y = 0.$$

**Operador anulador** Si $L$ es un operador diferencial con coeficientes constantes y $f$ es una función suficientemente diferenciable tal que

$$L(f(x)) = 0,$$

se dice que **$L$ es un anulador** de la función; por ejemplo, una función constante como $y = k$ es anulada por $D$ porque $Dk = 0$. La función $y = x$ es anulada por el operador diferencial $D^2$ porque la primera y segunda derivadas de $x$ son 1 y 0, respectivamente. En forma similar, $D^3x^2 = 0$, etcétera.

El operador diferencial $D^n$ anula cada una de las siguientes funciones:

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}. \tag{3}$$

Como consecuencia inmediata de la ecuación (3) y del hecho de que la diferenciacióńse puede llevar a cabo término a término, un polinomio

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} \tag{4}$$

se puede anular definiendo un operador que anule la potencia máxima de x.

Las funciones que anula un operador diferencial lineal $L$ de orden $n$ son aquellas que se pueden obtener de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$.

El operador **diferencial $(D - \alpha)^n$ anula** cada una de las siguientes funciones

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x},\ x^2e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{5}$$

Para comprobarlo, observemos que la ecuación auxiliar de la ecuación homogénea $(D - \alpha)^n y = 0$ es $(m - \alpha)^n = 0$. Puesto que $\alpha$ es una raíz de multiplicidad $n$, la solución general es

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}. \tag{6}$$

**EJEMPLO 1** **Operadores anuladores**

Determine un operador diferencial que anule la función dada.

(a) $1 - 5x^2 + 8x^3$ (b) $e^{-3x}$ (c) $4e^{2x} - 10xe^{2x}$

**SOLUCIÓN** a) De acuerdo con (3), sabemos que $D^4x^3 = 0$ y, como consecuencia de (4),

$$D^4(1 - 5x^2 + 8x^3) = 0.$$

b) De acuerdo con (5), con $\alpha = -3$ y $n = 1$, vemos que

$$(D + 3)e^{-3x} = 0.$$

c) Según (5) y (6), con $\alpha = 2$ y $n = 2$, tenemos

$$(D - 2)^2(4e^{2x} - 10xe^{2x}) = 0.$$ ■

Cuando $\alpha$ y $\beta$ son números reales, la fórmula cuadrática indica que $[m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)]^n = 0$ tiene las raíces complejas $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ambas de multiplicidad $n$. De acuerdo con la explicación al final de la sección 4.3 llegamos al siguiente resultado.

**El operador diferencial $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula cada una de las siguientes funciones:**

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\\ &e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\quad xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\quad x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\quad \ldots,\quad x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x. \end{aligned} \tag{7}$$

**EJEMPLO 2** **Operador anulador**

Determine un operador diferencial que anule a $5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\operatorname{sen} 2x$.

**SOLUCIÓN** Al examinar las funciones $e^{-x}\cos 2x$ y $e^{-x}$ sen $2x$ se ve que $\alpha = -1$ y $\beta = 2$. Entonces, según (7), llegamos a la conclusión de que $D^2 + 2D + 5$ anulara cada función. Dado que $D^2 + 2D + 5$ es un operador lineal, **anulará** *cualquier* combinación lineal de esas funciones, como $5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}$ sen $2x$. ■

Cuando $\alpha = 0$ y $n = 1$ se tiene el caso especial de (7):

$$(D^2 + \beta^2)\begin{cases}\cos \beta x \\ \text{sen}\, \beta x\end{cases} = 0. \tag{8}$$

Por ejemplo, $D^2 + 16$ anula cualquier combinación lineal de sen $4x$ y $\cos 4x$.

Con frecuencia desearemos anular la suma de dos o más funciones. Según acabamos de ver en los ejemplos 1 y 2, si $L$ es un operador diferencial lineal tal que $L(y_1) = 0$ y $L(y_2) = 0$, entonces anula la combinación lineal $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Esto es consecuencia directa del teorema 4.2. Supongamos que $L_1$ y $L_2$ son operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes, tales que $L_1$ anula a $y_1(x)$ y $L_2$ anula a $y_2(x)$, pero $L_1(y_2) \neq 0$ y $L_2(y_1) \neq 0$. Entonces, el *producto* de los operadores lineales, $L_1L_2$, anula la suma $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Esto se demuestra con facilidad aplicando la linealidad y el hecho de que $L_1L_2 = L_2L_1$:

$$\begin{aligned} L_1L_2(y_1 + y_2) &= L_1L_2(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2L_1(y_1) + L_1L_2(y_2) \\ &= L_2\underbrace{[L_1(y_1)]}_{\text{cero}} + L_1\underbrace{[L_2(y_2)]}_{\text{cero}} = 0. \end{aligned}$$

Por ejemplo, de acuerdo con (3), sabemos que $D^2$ anula a $7 - x$ y según (8), $D^2 + 16$ anula sen $4x$. Entonces, el producto de los operadores, que es $D^2(D^2 + 16)$, anula la combinación lineal $7 - x + 6$ sen $4x$.

## *Nota*

**El operador diferencial que anula a una función no es único. En la parte b) del ejemplo 1 señalamos que $D + 3$ anula a $e^{-3x}$, pero también la anulan operadores diferenciales de orden superior, siempre que $D + 3$ sea uno de los factores del operador; por ejemplo, $(D + 3)(D + 1)$, $(D + 3)^2$ y $D^3(D + 3)$ anulan, todos, a $e^{-3x}$. (Compruébelo.) Para este curso, cuando busquemos un anulador de una función $y = f(x)$ obtendremos el operador del *orden mínimo* posible que lo haga.**

**Coeficientes indeterminados** Lo anterior nos conduce al punto de la descripción anterior. Supongamos que $L(y) = g(x)$ es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, y que la **entrada** $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de las funciones mencionadas en (3), (5) y (7), esto es, que g(x) es una combinación lineal de funciones de la forma

$$k \text{ (constante)},\ x^m,\ x^m e^{\alpha x},\ x^m e^{\alpha x}\cos \beta x \text{ y } x^m e^{\alpha x} \text{ sen } \beta x,$$

en donde m es un entero no negativo y $\alpha$ y $\beta$ son números reales. Ya sabemos que esa **función** g(x) se puede anular con un operador diferencial, $L_1$, de orden mínimo, formado por un producto de los operadores $D^n$, $(D - \alpha)^n$ y $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$. Aplicamos $L_1$ a ambos lados de la ecuación $L(y) = $ g(x) y obtenemos $L_1L(y) = L_1(g(x)) = 0$. Al resolver la ecuación *homogénea y* de orden *superior* $L_1L(y) = 0$, descubriremos *la forma* de una solución particular, $y_p$, de la ecuación original no *homogénea* $L(y) = g(x)$. A continuación sustituimos esa forma supuesta en $L(y) = g(x)$ para determinar una solución particular explícita. Este procedimiento de determinación de $y_p$ se llama **método de los coeficientes indeterminados** y lo aplicaremos en los próximos ejemplos.

Antes de seguir, recordemos que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea $L(y) = g(x)$ es $y = y_c + y_p$, donde $y_c$ es la función complementaria; esto es, la solución general de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$. La solución general de cada ecuación $L(y) = g(x)$ está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

## EJEMPLO 3 Solución general mediante coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$. **(9)**

**SOLUCIÓN** **Paso 1.** Primero resolvemos la ecuación homogénea $y'' + 3y' + 2y = 0$. A continuación, a partir de la ecuación auxiliar $m^2 + 3m + 2 = (m + 1)(m + 2) = 0$, determinamos que $m_1 = -1$ y $m_2 = -2$; por lo tanto, la función complementaria es

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

**Paso 2.** Como el operador diferencial $D^3$ anula a $4x^2$, vemos que $D^3(D^2 + 3D + 2)y = 4D^3x^2$ es lo mismo que

$$D^3(D^2 + 3D + 2)y = 0. \tag{10}$$

La ecuación auxiliar de la ecuación (10), de quinto orden

$$m^3(m^2 + 3m + 2) = 0 \quad \text{o sea} \quad m^3(m + 1)(m + 2) = 0,$$

tiene las raíces $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, $m_4 = -1$ y $m_5 = -2$. Así, su solución general debe ser

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \boxed{c_4e^{-x} + c_5e^{-2x}} \tag{11}$$

Los términos en la zona sombrea& de la ecuación (11) constituyen la función complementaria de la ecuación original, (9). Entonces podemos decir que una solución particular, $y_p$, de (9) también debería satisfacer la ecuación (10). Esto significa que los términos restantes en la ecuación (11) han de tener la forma básica de $y_p$:

$$y = A + Bx + Cx^2, \tag{12}$$

en donde, por comodidad, hemos sustituido $c_1$, $c_2$ y $c_3$ por $A$, $B$ y $C$, respectivamente. Para que la ecuación (12) sea una solución particular de la (9), se necesita determinar los coeficientes *específicos* $A$, $B$ y $C$. Derivamos la función (12) para obtener

$$y_p' = B + 2Cx, \qquad y_p'' = 2C,$$

y sustituimos en (9) para llegar a

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 2C + 3B + 6Cx + 2A + 2Bx + 2Cx^2 = 4x^2.$$

Como se supone que esta ultima ecuación tiene que ser una identidad, los coeficientes de las potencias de igual grado en $x$ deben ser iguales:

igual

$$\boxed{2C}\,x^2 + \boxed{2B + 6C}\,x + \boxed{2A + 3B + 2C} = 4x^2 + 0x + 0.$$

Esto es,
$$2C = 4, \quad 2B + 6C = 0, \quad 2A + 3B + 2C = 0. \qquad \textbf{(13)}$$

Resolvemos las ecuaciones en **(13)**, para obtener $A = 7$, $B = -6$ y $C = 2$. En esta forma, $y_p = 7 - 6x + 2x^2$.

**Paso** 3. La solución general de la ecuación (9) es $y = y_c + y_p$, o sea

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 7 - 6x + 2x^2.$$

■

## EJEMPLO 4 Solución general empleando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4 \operatorname{sen} x.$ **(14)**

SOLUCIÓN **Paso 1.** La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea asociada $y'' - 3y' = 0$ es $m^2 - 3m = m(m - 3) = 0$, así que $y_c = c_1 + c_2e^{3x}$.

**Paso 2.** En vista de que $(D - 3)e^{3x} = 0$ y $(D^2 + 1) \operatorname{sen} x = 0$, aplicamos el operador diferencial $(D - 3)(D^2 + 1)$ a ambos lados de (14):

$$(D - 3)(D^2 + 1)(D^2 - 3D)y = 0. \qquad \textbf{(15)}$$

La ecuación auxiliar de la ecuación (15) es

$$(m - 3)(m^2 + 1)(m^2 - 3m) = 0 \quad \text{o sea} \quad m(m - 3)^2(m^2 + 1) = 0.$$

De modo que
$$y = \boxed{c_1 + c_2e^{3x}} + c_3xe^{3x} + c_4 \cos x + c_5 \operatorname{sen} x.$$

Después de excluir la combinación lineal de términos indicada en gris que corresponde a $y_c$, llegamos a la forma de $y_p$:

$$y_p = Axe^{3x} + B \cos x + C \operatorname{sen} x.$$

Sustituimos $y_p$ en **(14)**, simplificamos y obtenemos

$$y_p'' - 3y_p' = 3Ae^{3x} + (-B - 3C) \cos x + (3B - C) \operatorname{sen} x = 8e^{3x} + 4 \operatorname{sen} x.$$

Igualamos coeficientes:

$$3A = 8, \quad -B - 3C = 0, \quad 3B - C = 4.$$

Vemos que $A = \frac{8}{3}$, $B = \frac{6}{5}$ y $C = -\frac{2}{5}$ y, en consecuencia,

$$y_p = \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x.$$

**Paso** 3. Entonces, la solución general de (14) es

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}\cos x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

**EJEMPLO 5** **Solución general mediante coeficientes indeterminados**

Resuelva $y'' + y = x\cos x - \cos x$. **(16)**

**SOLUCIÓN** La función complementaria es $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Si comparamos $\cos x$ y $x \cos x$ con las funciones del primer renglón de (7), veremos que $\alpha = 0$ y $n = 1$, así que $(D^2 + 1)^2$ es un anulador del lado derecho de la ecuación (16). Aplicamos ese operador a la ecuación y tenemos

$$(D^2 + 1)^2(D^2 + 1)y = 0, \qquad 0 \text{ sea} \qquad (D^2 + 1)^3 y = 0.$$

Como $i$ y $-i$ son, a la vez, raíces complejas de multiplicidad 3 de la ecuación auxiliar de la ultima ecuación diferencial, concluimos que

$$y = \boxed{c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x} + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x\, c_5 x^2 \cos x + c_6 x^2 \operatorname{sen} x.$$

Sustituimos

$$y_p = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x + Cx^2\cos x + Ex^2 \operatorname{sen} x$$

en la ecuación (16) y simplificamos:

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= 4Ex\cos x - 4Cx\operatorname{sen} x + (2B + 2C)\cos x + (-2A + 2E)\operatorname{sen} x \\ &= x\cos x - \cos x. \end{aligned}$$

Igualamos los coeficientes y obtenemos las ecuaciones

$$4E = 1, \quad -4C = 0, \quad 2B + 2C = -1, \quad -2A + 2E = 0,$$

cuyas soluciones son $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$ y $E = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la solución general de (16) es

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x\cos x - \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}x^2 \operatorname{sen} x. \qquad \blacksquare$$

## EJEMPLO 6 Forma de una solución particular

Determine la forma de una solución particular de

$$y'' - 2y' + y = 10e^{-2x} \cos x \tag{17}$$

**SOLUCIÓN** La función complementaria, para la ecuación dada, es $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$.

De acuerdo con (7), con $\alpha = -2$, $\beta = 1$ y $n = 1$, sabemos que

$$(D^2 + 4D + 5)e^{-2x} \cos x = 0.$$

Aplicamos el operador $D^2 + 4D + 5$ a la ecuación 17 para obtener

$$(D^2 + 4D + 5)(D^2 - 2D + 1)y = 0. \tag{18}$$

Como las raíces de la ecuación auxiliar de (18) son $-2 - i$, $-2 + i$, $1$ y $1$,

$$y = \boxed{c_1e^x + c_2xe^x} + c_3e^{-2x} \cos x + c_4e^{-2x} \operatorname{sen} x.$$

Se llega a una solución particular de (17) de la forma

$$y_p = Ae^{-2x} \cos x + Be^{-2x} \operatorname{sen} x.$$ ■

## EJEMPLO 7 Forma de una solución particular

Determine la forma de una solución particular de

$$y''' - 4y'' + 4y' = 5x^2 - 6x + 4x^2e^{2x} + 3e^{5x}. \tag{19}$$

**SOLUCIÓN** Primero vemos que

$$D^3(5x^2 - 6x) = 0, \quad (D - 2)^3x^2e^{2x} = 0, \qquad \text{y} \qquad (D - 5)e^{5x} = 0.$$

Entonces, al aplicar $D^3(D - 2)^3(D - 5)$ a (19) se obtiene

$$D^3(D - 2)^3(D - 5)(D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$$

o sea

$$D^4(D - 2)^5(D - 5)y = 0.$$

Fácilmente se advierte que las raíces de la ecuación auxiliar de la última ecuación diferencial son 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2 y 5. De aquí que

$$y = \boxed{c_1} + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \boxed{c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}} + c_7x^2e^{2x} + c_8x^3e^{2x} + c_9x^4e^{2x} + c_{10}e^{5x}. \tag{20}$$

Como la combinación lineal $c_1 + c_5e^{2x} + c_6xe^{2x}$ corresponde a la función complementaria de (19), los términos restantes en la ecuación (20) expresan la forma que buscamos:

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Ex^2e^{2x} + Fx^3e^{2x} + Gx^4e^{2x} + He^{5x}.$$ ■

**Resumen del método** Para comodidad del lector resumiremos el método de los coeficientes indeterminados.

### Coeficientes indeterminados, método del anulador

La ecuación diferencial Uy) = g(x) tiene coeficientes constantes y la función $g(x)$ consiste en sumas y productos finitos de constantes, polinomios, funciones exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos.

*i)* Se determina la solución complementaria, $y_c$, de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.
ii) Ambos lados de la ecuación no homogénea $L(y)$ = g(x) se Someten a la acción de un operador diferencial, $L_1$, que anule la función $g(x)$.
*iii)* Se determina la solución general de la ecución diferencial homogénea de orden superior $L_1L(y) = 0$.
iv) De la solución obtenida en el paso *iii)*, se eliminan todos los términos duplicados en la solución complementaria, $y_c$, que se determinó en el paso i). Se forma una combinación lineal, $y_p$, con los términos restantes. Ésta será la forma de una solución particular de $L(y)$ = g(x).
v) Se sustituye $y_p$ que se determinó en el paso iv) en $L(y)$ = g(x). Se igualan los coeficientes de las diversas funciones a cada lado de la igualdad y se despejan los coeficientes desconocidos en $y_p$ del sistema de ecuaciones resultante.
vi) Con la solución particular que se determino en el paso v), se forma la solución general $y = y_c + y_p$ de la ecuación diferencial dada.

## 2.8.3. Solución de las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas por el método de variación de parámetros

El procedimiento que seguimos en la sección 2.3 para llegar a una solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

en un intervalo se aplica también a ecuaciones lineales de orden superior. Para adaptar el método de **variación de parámetros** a una ecuación diferencial de segundo orden,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x), \qquad \textbf{(2)}$$

comenzaremos igual que en la sección 4.2; es decir, llevaremos la ecuación diferencial a su forma reducida

$$Y'' + WY' + Q(x)y = f(x) \qquad \textbf{(3)}$$

dividiéndola por el primer coeficiente, $a_2(x)$. Suponemos que P(x), $Q(x)$ y $f(x)$ son continuas en algún intervalo $I$. La ecuación (3) es el análogo de la ecuación (1). Según vimos en la sección 4.3, no hay dificultad en obtener la función complementaria, $y_c$, de **(2),** cuando los coeficientes son constantes.

**Hipótesis** Es similar a la hipótesis $y_p = u(x)y_1(x)$ que usamos en la sección 2.3 a **fin** de hallar una solución particular, $y_p$, de la ecuación lineal de primer orden (1). Para la ecuación lineal de segundo orden (2) se busca **una** solución de la forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x), \tag{4}$$

en que $y_1$ y $y_2$ formen un conjunto fundamental de soluciones, en $I$, de la forma homogénea asociada de (2). Aplicamos dos veces la regla del producto para diferenciar $y_p$ y obtenemos

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2' \\ y_p'' &= u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'. \end{aligned}$$

Sustituimos **(4),** las derivadas de arriba en la **ecuación** (2) y agrupamos los términos:

$$\begin{aligned} y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p &= u_1\overbrace{[\,y_1'' + Py_1' + Qy_1]}^{\text{cero}} + u_2\overbrace{[\,y_2'' + Py_2' + Qy_2]}^{\text{cero}} \\ &\quad + y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Dado que buscamos determinar dos funciones desconocidas, $u_1$ y $u_2$, es de esperar que necesitemos dos ecuaciones. Las podemos obtener si establecemos la hipótesis adicional de que las funciones $u_1$ y $u_2$ satisfacen $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$. Esta hipótesis es pertinente porque si pedimos que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$, la ecuación (5) se reduce a $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$. Con ello ya tenemos las dos ecuaciones que deseábamos, aunque sea para determinar las derivadas $u_1'$ y $u_2'$. Aplicamos la regla de Cramer y la solución del sistema

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x) \end{aligned}$$

se puede expresar en términos de los determinantes

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W}, \tag{6}$$

en donde
$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Las funciones $u_1$ y $u_2$ se determinan integrando los resultados en (6). Se ve que el determinante $W$ es el wronskiano de $y_1$ y $y_2$. Sabemos, por la independencia lineal entre $y_1$ y $y_2$ en $I$, que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

**Resumen del método** Por lo general, no se aconseja memorizar fórmulas, sino más bien comprender un procedimiento. Sin embargo, el procedimiento anterior es demasiado largo y complicado para recurrir a él cada que deseemos resolver una ecuación diferencial. En este caso lo más eficaz es usar las formulas (6). Así, para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, primero se halla la función complementaria $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, y después se calcula el wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$. Se divide entre $a_2$ para llevar la ecuación a su forma reducida $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para hallar $f(x)$. Se determinan $u_1$ y $u_2$ integrando, respectivamente, $u_1' = W_1/W$ y $u_2' = W_2/W$, donde se definen $W_1$ y $W_2$ de acuerdo con (7). Una solución particular es $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. La solución general de la ecuación es, por consiguiente, $y = y_c + y_p$.

**EJEMPLO 1** **Solución general mediante variación de parámetros**

Resuelva $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$.

**SOLUCIÓN** Partimos de la ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$, y tenemos que $y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. Identificamos $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = xe^{2x}$ y calculamos el wronskiano

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x}$$

Como la ecuación diferencial dada está en la forma reducida (3) (esto es, el coeficiente de $y''$ es 1), vemos que $f(x) = (x + 1)e^{2x}$. Aplicamos (7) y efectuamos las operaciones

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x+1)xe^{4x}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x},$$

y así, según (6),

$$u_1' = -\frac{(x+1)xe^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x, \qquad u_2' = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1.$$

En consecuencia, $$u_1 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}, \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{x^2}{2} + x.$$

Entonces, $$y_p = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$$

Y $$y = y_c + y_p = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$$ ■

**EJEMPLO 2** **Solución general mediante variación de parámetros**

Resuelva $4y'' + 36y = \csc 3x$.

**SOLUCIÓN** Primero llevamos la ecuación a su forma reducida (6) dividiéndola por 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4} \csc 3x.$$

En virtud de que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$, la función complementaria es $y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$. Sustituimos $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \operatorname{sen} 3x$ y $f(x) = \frac{1}{4} \csc 3x$ en las definiciones (7) y obtenemos

$$W(\cos 3x, \operatorname{sen} 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3 \operatorname{sen} 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = 3$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4} \csc 3x & 3 \cos 3x \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3 \operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4} \csc 3x \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Al integrar

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{1}{12} \qquad \text{y} \qquad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{1}{12} \frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

obtenemos

$$u_1 = -\frac{1}{12} x \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{1}{36} \ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

Así, una solución particular es

$$y_p = -\frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} (\operatorname{sen} 3x) \ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

La solución general de la ecuación es

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12} x \cos 3x + \frac{1}{36} (\operatorname{sen} 3x) \ln|\operatorname{sen} 3x|. \qquad \textbf{(8)}$$

La ecuación (8) representa la solución general de la ecuación diferencial en, por ejemplo, el intervalo $(0, \pi/6)$.

**Constantes de integración** Al determinar las integrales indefinidas de $u_1'$ y $u_2'$, no necesitamos introducir constantes. Porque

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + (u_1 + a_1) y_1 + (u_2 + b_1) y_2 \\ &= (c_1 + a_1) y_1 + (c_2 + b_1) y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2. \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Solución general por **variación** de **parámetros**

Resuelva $y'' - y = \dfrac{1}{x}$.

**SOLUCIÓN** La **ecuación** auxiliar, $m^2 - 1 = 0$ da como resultado $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$. Entonces, $y_c = c_1e^x + c_2e^{-x}$. Tenemos $W(e^x, e^{-x}) = -2$ y

$$u_1' = -\frac{e^{-x}(1/x)}{-2}, \qquad u_1 = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

$$u_2' = \frac{e^{x}(1/x)}{-2}, \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt.$$

Se sabe bien que las integrales que definen a $u_1$ y $u_2$ no se pueden expresar en términos de funciones elementales. En consecuencia, escribimos

$$y_p = \frac{1}{2}e^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt,$$

y así

$$y = y_c + y_p = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \frac{1}{2}e^{-x}\int_{x_0}^{x} \frac{e^{t}}{t}\,dt. \qquad \blacksquare$$

En el ejemplo 3 podemos integrar en cualquier intervalo $x_0 \leq t \leq x$ que no contenga al origen.

**Ecuaciones de orden superior** El método que acabamos de describir para las ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden, se puede generalizar a ecuaciones lineales de orden $n$ escritas en su forma **estándar**

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x). \tag{9}$$

Si $y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_n y_n$ es la función complementaria de (9), una solución particular es

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x),$$

en que las $u_k'$, $k = 1, 2, \ldots, n$ están determinadas por las $n$ ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1u_1' + \quad y_2u_2' + \cdots + \quad y_nu_n' &= 0 \\ y_1'u_1' + \quad y_2'u_2' + \cdots + \quad y_n'u_n' &= 0 \\ \\ y_1^{(n-1)}u_1' + y_2^{(n-1)}u_2' + \ldots + y_n^{(n-1)}u_n' &= f(x). \end{aligned}$$

Las primeras $n - 1$ ecuaciones del sistema, al igual que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ en (5), son hipótesis hechas para simplificar la ecuación resultante después de sustituir $y_p = u_1(x)y_1(x) + \ldots + u_n(x)y_n(x)$ en (9). En este caso, la regla de Cramer da

$$u_k' = \frac{W_k}{W}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$