3. TRANSFORMADAS DE LAPLACE

3.1. Definición de la trasformada de Laplace

Definición básica Si $f(t)$ **está** definida cuando $t \geq 0$, la integral impropia $\int_0^\infty K(s, t)f(t)\,dt$ se define como un límite:

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b K(s,t)f(t)\,dt.$$

Si existe el límite, se dice que la integral existe 0 que es convergente; si no existe el límite, la integral no existe y se dice que es divergente. En general, el límite anterior existe **sólo** para ciertos valores de la variable s. La sustitución $K(s, t) = e^{-st}$ proporciona una transformación integral muy importante.

DEFINICIÓN 7.1 **La transformada de Laplace**

Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces la integral

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

Cuando la integral definitoria (2) converge, el resultado es una **función** de s. En la descripción general emplearemos letras minúsculas para representar la función que se va a transformar y la mayúscula correspondiente para denotar su transformada de **Laplace;** por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s), \qquad \mathscr{L}\{g(t)\} = G(s), \qquad \mathscr{L}\{y(t)\} = Y(s).$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la definición 7.1

Evalúe $\mathscr{L}\{1\}$.

SOLUCIÓN

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^b = \lim_{b\to\infty}\frac{-e^{-sb}+1}{s} = \frac{1}{s}$$

siempre que $s > 0$; en otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo, y $e^{-sb} \to 0$ cuando $b \to \infty$. Cuando $s < 0$, la integral es divergente. ■

El empleo del signo de límite se vuelve tedioso, así que adoptaremos la notación $|_0^\infty$ como versión **taquigráfica** de $\lim_{b\to\infty}(\ )|_0^b$; por ejemplo,

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Se sobreentiende que en el límite superior queremos decir que $e^{-st} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y cuando $s > 0$.

$\mathcal{L}$ es una transformación lineal Para una suma de funciones se puede escribir

$$\int_0^\infty e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)]\, dt = \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt$$

siempre que las dos integrales converjan; por consiguiente,

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\} + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s). \qquad \textbf{(3)}$$

Se dice que $\mathcal{L}$ es una **transformada lineal** debido a la propiedad **señalada** en (3).

3.2. Condiciones suficientes de existencia para la trasformada de Laplace

Condiciones suficientes para la existencia de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ No es necesario que converja la integral que define ala transformada de Laplace; por ejemplo, ni $\mathcal{L}\{1/t\}$ ni $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ existen. Las condiciones de suficiencia que garantizan la existencia de $\mathcal{L}$ (f(t)} son que f sea continua por tramos en $[0, \infty)$, y quef sea de orden exponencial cuando $t > T$. Recuerdese que una función es **continua por tramos** en $[0, \infty)$ si, en cualquier intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$ hay, cuando mucho, una cantidad finita de puntos t_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(t_{k-1} < t_k)$ en los cuales f tiene discontinuidades finitas y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$. (Fig. 7.2). A continuación definiremos el concepto de **orden exponencial.**

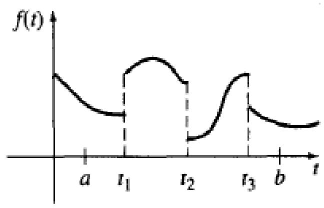


FIGURA 7.2

DEFINICIÓN 7.2 Orden exponencial

Se dice que una función f es de orden exponencial c si existen constantes c, $M > 0$ y $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Si f es una función *creciente,* la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$ tan sólo expresa que la gráfica de f en el intervalo (T, ∞) no crece con más rapidez que la gráfica de la función exponencial Me^{ct}, donde c es una constante positiva (Fig. 7.3). Las funciones $f(t) = t$, $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2 \cos t$ son de orden exponencial $c = 1$, para $t > 0$ porque, respectivamente,

$$|t| \leq e^t, \qquad |e^{-t}| \leq e^t, \qquad |2 \cos t| \leq 2e^t.$$

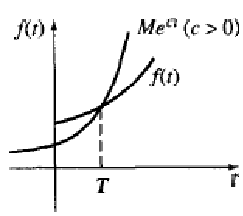


FIGURA 7.3

En la figura 7.4 se comparan las gráficas en el intervalo $[0, \infty)$.

Una función como $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial porque, como vemos en la figura 7.5, su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de e en $t > c > 0$.

Una potencia entera positiva de t siempre es de orden exponencial porque, cuando $c > 0$,

$$|t^n| \leq Me^{ct} \quad \text{o sea} \quad \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leq M \quad \text{cuando } t > T$$

equivale a demostrar que $\lim_{t \to \infty} t^n/e^{ct}$ es finito para $n = 1, 2, 3, \ldots$ El resultado se obtiene con n aplicaciones de la regla de L'Hôpital.

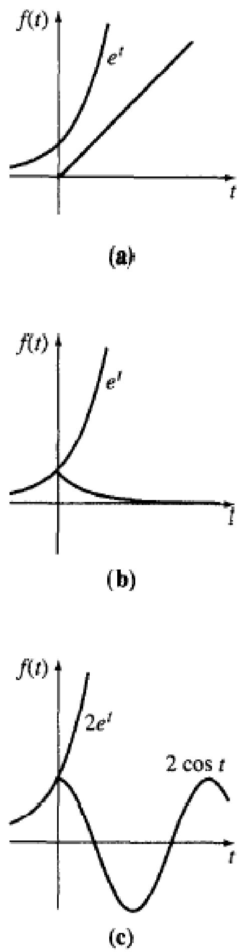


FIGURA 7.4

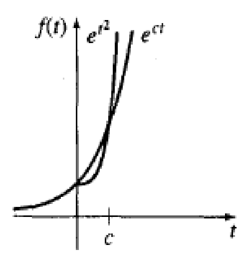


FIGURA 7.5

TEOREMA 7.1 Condiciones suficientes para la existencia

Si $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$ y de orden exponencial c para $t > T$, entonces $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

DEMOSTRACIÓN $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt = I_1 + I_2.$

La integral I_1 existe, porque se puede expresar como una suma de integrales sobre intervalos en que $e^{-st}f(t)$ es continua. Ahora

$$|I_2| \le \int_T^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt \le M\int_T^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt$$
$$= M\int_T^\infty e^{-(s-c)t}\,dt = -M\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\Bigg|_T^\infty = M\frac{e^{-(s-c)T}}{s-c}$$

cuando $s > c$. Como $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st}f(t)|dt$ converge, de acuerdo con la prueba de comparación para integrales impropias. **Esto,** a su vez, implica que I_2 existe para $s > c$. La existencia de I_1 e I_2 implica que $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ existe cuando $s > c$. ■

En todo el capítulo nos ocuparemos **sólo** de las funciones que son, a la vez, continuas por tramos y de orden exponencial; sin embargo, debemos notar que esas condiciones son suficientes, pero no necesarias, para la existencia de una transformada de **Laplace.** Ahora, la función $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua por tramos en el intervalo $[0, \infty)$, pero sí existe su transformada de **Laplace.** Véase el problema 40 de los ejercicios 7.1.

EJEMPLO 2 Aplicación de la definición 7.1

Evalúe $\mathscr{L}\{t\}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición 7.1, $\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}t\,dt$. Al integrar por partes y con $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0$, $s > 0$ y el resultado del ejemplo 1, llegamos a

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{-te^{-st}}{s}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$
$$= \frac{1}{s}\mathscr{L}\{1\}$$
$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2}.$$ ■

EJEMPLO 3 Aplicación de la definición 7.1

Evalúe $\mathscr{L}\{e^{-3t}\}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con esa definición,

$$\mathscr{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt$$

$$= \left.\frac{-e^{-(s+3)t}}{s+3}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s+3}, \quad s > -3.$$

El resultado se desprende del hecho de que $\lim_{t \to \infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s + 3 > 0$ o bien $s > -3$. ■

EJEMPLO 4 **Aplicación de la definición 7.1**

Evalúe $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición 7.1 e integrando por partes, tenemos

$$\mathscr{L}\{\text{sen}2t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen}2t\,dt = \left.\frac{-e^{-st}\text{sen }2t}{s}\right|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

$$= \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt, \quad s > 0$$

$$\underset{t\to\infty}{\text{lím}}\ e^{-st}\cos 2t = 0,\ s > 0 \qquad \text{Transformada de Laplace de sen } 2t$$

$$= \frac{2}{s}\left[\left.\frac{-e^{-st}\cos 2t}{s}\right|_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,\text{sen }2t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}\mathscr{L}\{\text{sen}2t\}.$$

Hemos llegado a una ecuación con $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$ en ambos lados del signo igual. Despejamos esa cantidad y llegamos al resultado

$$\mathscr{L}\{\text{sen}2t\} = \frac{2}{s^2+4}, \quad s > 0.$$ ■

EJEMPLO 5 **Empleo de la linealidad**

Evalúe $\mathscr{L}\{3t - 5 \text{ sen } 2t\}$.

SOLUCIÓN De acuerdo con los ejemplos 2 y 4, y la propiedad de linealidad de la transformada de **Laplace,** podemos escribir

$$\mathscr{L}\{3t - 5\text{ sen}2t\} = 3\mathscr{L}\{t\} - 5\mathscr{L}\{\text{sen}2t\}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{s^2} - 5 \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$= \frac{-7s^2 + 12}{s^2(s^2+4)}, \quad s > 0$$

■

3.3. Trasformada de Laplace de funciones básicas

TEOREMA 7.2 **Transformadas de algunas funciones básicas**

a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s - a}$

d) $\mathscr{L}\{\text{sen } kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$

e) $\mathscr{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$

f) $\mathscr{L}\{\text{senh } kt\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$

g) $\mathscr{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

La parte b) del teorema anterior se puede justificar como sigue: al integrar por partes se obtiene

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} t^n \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} \, dt$$

0 sea

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathscr{L}\{t^{n-1}\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Pero $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$, así que, por iteración,

$$\mathscr{L}\{t\} = \frac{1}{s} \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s^2}, \qquad \mathscr{L}\{t^2\} = \frac{2}{s} \mathscr{L}\{t\} = \frac{2!}{s^3}, \qquad \mathscr{L}\{t^3\} = \frac{3}{s} \mathscr{L}\{t^2\} = \frac{3 \cdot 2}{s^4} = \frac{3!}{s^4}.$$

Aunque para una demostración rigurosa se requiere la inducción matemática, de los resultados anteriores parece razonable concluir que, en general

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n}{s} \mathscr{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s} \left[\frac{(n-1)!}{s^n} \right] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Dejamos al lector la demostración de las partes f) y g) del teorema 7.2. **Véanse** los problemas 33 y 34, en los ejercicios 7.1.

EJEMPLO 8 **Identidad trigonométrica y linealidad**

Evalúe $\mathscr{L}\{\text{sen}^2 t\}$.

SOLUCIÓN Con ayuda de una identidad **trigonométrica,** de la linealidad y de las partes a) y e) del teorema 7.2, llegamos a

$$\mathscr{L}\{\text{sen}\, t\} = \mathscr{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2} \mathscr{L}\{1\} - \frac{1}{2} \mathscr{L}\{\cos 2t\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{2}{s(s^2 + 4)}.$$

∎

EJEMPLO 6 **Aplicación de la definición 7.1**

Evalúe **a)** $\mathscr{L}\{te^{-2t}\}$ **b)** $\mathscr{L}\{t^2e^{-2t}\}$

SOLUCIÓN **a)** Según la definición 7.1, e integrando por partes,

$$\mathscr{L}\{te^{-2t}\} = \int_0^\infty e^{-st}(te^{-2t})\,dt = \int_0^\infty te^{-(s+2)t}\,dt$$
$$= \left.\frac{-te^{-(s+2)t}}{s+2}\right|_0^\infty + \frac{1}{s+2}\int_0^\infty e^{-(s+2)t}\,dt$$
$$= \left.\frac{-e^{-(s+2)t}}{(s+2)^2}\right|_0^\infty, \quad s > -2$$
$$= \frac{1}{(s+2)^2}, \quad s > -2.$$

b) De nuevo, integrando por partes llegamos al resultado

$$\mathscr{L}\{t^2e^{-2t}\} = \left.\frac{-t^2e^{-(s+2)t}}{s+2}\right|_0^\infty + \frac{2}{s+2}\int_0^\infty te^{-(s+2)t}\,dt$$
$$= \frac{2}{s+2}\int_0^\infty e^{-st}(te^{-2t})\,dt, \quad s > -2$$
$$= \frac{2}{s+2}\mathscr{L}\{te^{-2t}\} = \frac{2}{s+2}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] \qquad \leftarrow \text{según la parte a)}$$
$$= \frac{2}{(s+2)^3}, \quad s > -2.$$

■

3.4. Trasformada de Laplace de funciones definidas por tramos

EJEMPLO 7 **Transformada de una función definida por tramos**

Evalúe $\mathscr{L}\{f(t)\}$ cuando $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3 \\ 2, & t \ge 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN En la figura 7.6 se ilustra esta función continua por tramos. Puesto que f está definida en dos partes, expresamos $\mathscr{L}\{f(t)\}$ como la suma de dos integrales:

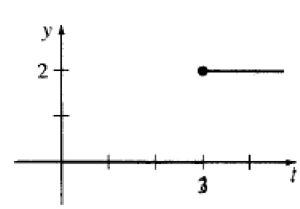


FIGURA 7.6

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^{3} e^{-st}(0)\,dt+\int_3^{\infty} e^{-st}(2)\,dt$$

$$=-\frac{2e^{-st}}{s}\Bigg|_3^{\infty}$$ ■

$$=\frac{2e^{-3s}}{s},\quad s>0$$

Presentaremos la generalización de algunos de los ejemplos anteriores en forma del teorema siguiente. De aquí en adelante no citaremos las restricciones en s; se sobreentiende que s tiene las restricciones suficientes para garantizar la convergencia de la transformada de Laplace correspondiente.

3.5. Función escalón unitario

Función escalón unitario En ingeniería se presentan con mucha frecuencia funciones que pueden estar "encendidas" o "apagadas". Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o un voltaje aplicado a un circuito se pueden apartar después de cierto tiempo. Por ello, conviene definir una función especial, llamada **función escalón unitario.**

DEFINICIÓN 7.3 **Función escalón unitario**

La función $\mathscr{U}(t-a)$ se define como sigue:

$$\mathscr{U}(t-a)=\begin{cases}0, & 0\le t<a\\ 1, & t\ge a.\end{cases}$$

Obsérvese que definimos a $\mathscr{U}(t-a)$ sólo en la parte no negativa del eje t porque es todo lo que interesa al estudiar la transformada de Laplace. En sentido más amplio, $\mathscr{U}(t-a)=0$ cuando $t<a$.

EJEMPLO 4 Gráficas de funciones escalón unitario

Grafique a) $\mathscr{U}(t)$ b) $\mathscr{U}(t-2)$

SOLUCIÓN **a)** $\mathscr{U}(t)=1,\ t\ge 0$ **b)** $\mathscr{U}(t-2)=\begin{cases}0, & 0\le t<2\\ 1, & t\ge 2\end{cases}$

Las gráficas respectivas están en la figura 7.12. ■

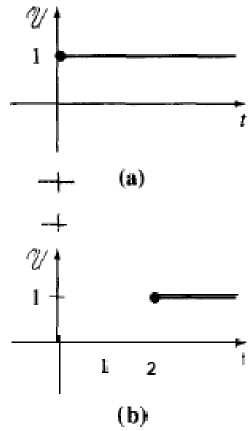


FIGURA 7.12

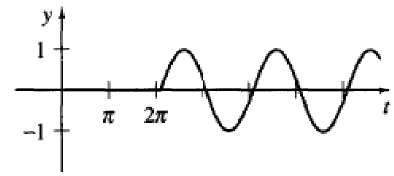


FIGURA 7.13

Cuando se multiplica por otra función definida para $t \geq 0$, la función escalón unitario "apaga" una parte de la gráfica de esa función; por ejemplo, en la figura 7.13 vemos la gráfica de sen t, $t \geq 0$, multiplicada por $\mathcal{U}(t - 2\pi)$:

$$f(t) = \operatorname{sen} t\, \mathcal{U}(t - 2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

La función escalón unitario también se puede usar para expresar funciones definidas por tramos en forma compacta; por ejemplo, la función

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases} = g(t) + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ -g(t) + h(t), & t \geq a \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

equivale a

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t - a) + h(t)\mathcal{U}(t - a). \qquad \textbf{(3)}$$

De igual forma, una función del tipo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

se puede escribir en la forma $f(t) = g(t)[\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)].$ (5)

EJEMPLO 5 **Función expresada en términos de una función escalón unitario**

El voltaje de un circuito está definido por $E(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$. Grafique $E(t)$. Exprese $E(t)$ en términos de funciones escalón unitario.

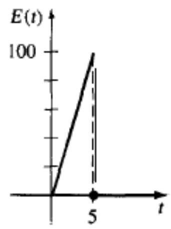


FIGURA 7.14

SOLUCIÓN La gráfica de esta función definida parte por parte aparece en la figura 7.14. De acuerdo con (2) y **(3),** y con g(t) = 20t y h(t) = 0, llegamos a

$$E(t) = 20t - 20t\,\mathcal{U}(t-5).$$

EJEMPLO 6 **Comparación de funciones**

Para la **función** $y = f(t)$, definida por $f(t) = t^3$, compare las gráficas de

(a) $f(t)$, $-\infty < t < \infty$ (b) $f(t)$, $t \geq 0$
(c) $f(t-2)$, $t \geq 0$ (d) $f(t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$, $t \geq 0$

SOLUCIÓN En la figura 7.15 se muestran las gráficas respectivas.

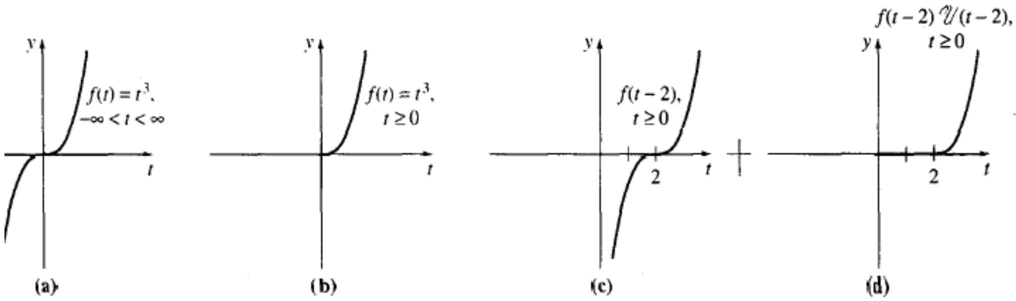


FIGURA 7.15

En general, si $a > 0$, la gráfica de $y = f(t-a)$ es la de $y = f(t)$, $t \geq 0$ desplazada a unidades hacia la derecha, sobre el eje t; sin embargo, cuando se multiplica $y = f(t-a)$ por la función escalón unitario $\mathcal{U}(t-a)$ como en la parte d) del ejemplo 6, la gráfica de la función

$$y = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a) \tag{6}$$

coincide con la de $y = f(t-a)$ cuando $t \geq a$, pero es idéntica a cero cuando $0 \leq t < a$ (Fig. 7.16).

En el teorema 7.5 dijimos que un múltiplo exponencial **de** $f(t)$ origina una traslación, o desplazamiento, de la transformada $F(s)$ sobre el eje s. En el teorema que sigue veremos que

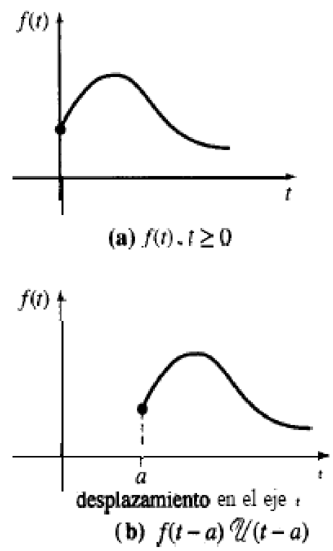


FIGURA 7.16

siempre que F(s) se multiplica por una función exponencial adecuada, la transformada inversa de este producto es la función desplazada de la ecuación (6). Este resultado se llama **segundo teorema de traslación.**

3.5.1. Trasformada de Laplace de la función escalón unitario

TEOREMA 7.6 **Segundo teorema de traslación**

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

DEMOSTRACIÓN Expresamos a $\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)\,dt$ como la suma de dos integrales:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^a e^{-st} f(t-a)\underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\substack{\text{cero cuando}\\ 0 \leq t < a}}\,dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\underbrace{\mathcal{U}(t-a)}_{\substack{\text{uno cuando}\\ t \geq a}}\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt.$$

Ahora igualamos $v = t - a$, $dv = dt$ y entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)\,dv$$

$$= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\,dv = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 **Segundo teorema de traslación**

Evalúe $\mathscr{L}\{(t-2)^3\mathscr{U}(t-2)\}$.

SOLUCIÓN Si identificamos $a = 2$, entonces, según el teorema 7.6,

$$\mathscr{L}\{(t-2)^3\mathscr{U}(t-2)\} = e^{-2s}\mathscr{L}\{t^3\} = e^{-2s}\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}e^{-2s}.$$

Con frecuencia se desea hallar la transformada de Laplace sólo de la función escalón unitario. Esto se puede hacer partiendo de la definición 7.1, o bien del teorema 7.6. Si identificamos $f(t) = 1$ en el teorema 7.6, entonces $f(t-a) = 1$, $F(s) = \mathscr{L}\{1\} = 1/s$ y así

$$\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}. \tag{7}$$

EJEMPLO 8 **Función expresada en términos de funciones escalón unitario**

Determine la transformada de Laplace de la función de la figura 7.17.

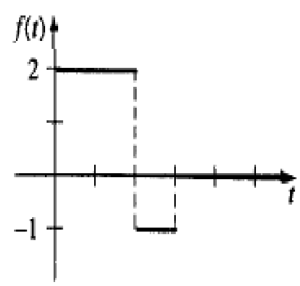


FIGURA 7.17

SOLUCIÓN Con ayuda de la función escalón unitario se puede escribir

$$f(t) = 2 - 3\mathscr{U}(t-2) + \mathscr{U}(t-3).$$

Aplicamos la linealidad y el resultado en la ecuación (7),

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{2\} - 3\mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-2)\} + \mathscr{L}\{\mathscr{U}(t-3)\}$$
$$= \frac{2}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

3.6. Propiedades de la trasformada de Laplace (linealidad, teoremas de traslación)

Propiedad de linealidad En el curso elemental de cálculo aprendimos que la diferenciación y la integración transforman una función en otra función; por ejemplo, la **función** f(x) = x^2 se transforma, respectivamente, en una función lineal, una familia de funciones polinomiales cúbicas y en **una** constante, mediante las operaciones de diferenciación, integración indefinida e integración definida:

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c, \qquad \int_0^3 x^2\,dx = 9.$$

Además, esas tres operaciones poseen la **propiedad de linealidad.** Esto quiere decir que para cualesquier constantes α y β,

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha\frac{d}{dx}f(x) + \beta\frac{d}{dx}g(x)$$
$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx \qquad \textbf{(1)}$$
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

siempre y cuando exista cada derivada e integral.

Si $f(x, y)$ es una función de dos variables, una integral definida defcon respecto a una de las variables produce una función de la otra variable; por ejemplo, al mantener y constante, $\int_1^2 2xy^2\,dx = 3y^2$. De igual forma, una integral definida como $\int_a^b K(s,t)\,f(t)$ transforma una **función** $f(t)$ en una función de la variables. Nos interesan mucho las **transformadas integrales** de este último tipo, cuando el intervalo de integración es $[0, \infty)$ no acotado.

TEOREMAS DE TRASLACIÓN

No conviene aplicar la definición 7.1 cada vez que se desea hallar la transformada de **Laplace** de una función $f(t)$; por ejemplo, la integración por partes que se usa para evaluar, digamos $\mathscr{L}\{e^t t^2 \text{ sen } 3t\}$ es imponente, y el calificativo es modesto. En la descripción siguiente presentaremos varios teoremas que ahorran trabajo, sin necesidad de recurrir a la definición de la transformada de **Laplace.** En realidad, es relativamente fácil evaluar transformadas como $\mathscr{L}\{e^{4t}\cos 6t\}$, $\mathscr{L}\{t^3 \text{ sen } 2t\}$ y $\mathscr{L}\{t^{10}e^{-t}\}$, siempre y cuando conozcamos $\mathscr{L}\{\cos 6t\}$, $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\}$ y $\mathscr{L}\{t^{10}\}$, respectivamente. Si bien se pueden formar tablas extensas (y en el **apéndice** III aparece una tabla) se aconseja conocer las transformadas de **Laplace** de las funciones básicas como t^n, e^{at}, sen kt, cos kt, senh kt y cosh kt.

Si conocemos $\mathscr{L}\{f(t)\}$ = F(s), podemos hallar la transformada de **Laplace** $\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}$ *sin* más que *trasladar, o desplazar,* F(s) a $F(s - u)$. Este resultado se llama **primer teorema de traslación.**

TEOREMA 7.5 **Primer teorema de traslación**

Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y a es cualquier número real,

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).$$

DEMOSTRACIÓN La demostración es inmediata porque, según la definición 7.1,

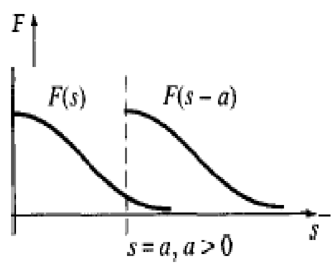
$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt = F(s-a). \qquad \blacksquare$$

Si s es una variable real, la **gráfica** de $F(s-a)$ es la gráfica de $F(s)$ desplazada $|a|$ unidades sobre el eje s. Si $a > 0$, el desplazamiento de F(s) es a unidades hacia la derecha, mientras que si $a < 0$, es hacia la izquierda (Fig. 7. **11**).

A veces es útil, para enfatizar, emplear el simbolismo

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\}_{s\to s-a},$$

en donde $s \to s-a$ indica que reemplazamos s en $F(s)$ con $s-a$.



desplazamiento en el ejes

FIGURA 7.11

EJEMPLO 1 **Primer teorema de traslación**

Evalúe **a)** $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ **b)** $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

SOLUCIÓN Los resultados son consecuencia del teorema 7.5.

$$\text{(a) } \mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathscr{L}\{t^3\}_{s\to s-5} = \left.\frac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}.$$

$$\text{(b) } \mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathscr{L}\{\cos 4t\}_{s\to s+2} \qquad \leftarrow a = -2 \text{ so } s - a = s - (-2) = s + 2$$

$$= \left.\frac{s}{s^2+16}\right|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}, \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 1 **Primer teorema de traslación**

Evalúe a) $\mathscr{L}\{e^{5t}t^3\}$ b) $\mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\}$.

SOLUCIÓN Los resultados son consecuencia del teorema 7.5.

$$\text{(a) } \mathscr{L}\{e^{5t}t^3\} = \mathscr{L}\{t^3\}_{s\to s-5} = \frac{3!}{s^4}\bigg|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}.$$

$$\text{(b) } \mathscr{L}\{e^{-2t}\cos 4t\} = \mathscr{L}\{\cos 4t\}_{s\to s+2} \qquad \leftarrow a=-2 \text{ so } s-a=s-(-2)=s+2$$

$$= \frac{s}{s^2+16}\bigg|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}$$ ■

3.7. Transformada de funciones multiplicadas por tn, y divididas entre t

3.8. Trasformada de derivadas (teorema)

Nuestra meta es aplicar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales. Para ello necesitamos evaluar cantidades como $\mathscr{L}\{dy/dt\}$ y $\mathscr{L}\{d^2y/dt^2\}$; por ejemplo, sif' es continua para $t \geq 0$, al integrar por partes obtenemos

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-st}f(t)\bigg|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$
$$= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}$$

0 sea
$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{1}$$

Para ello hemos supuesto que $e^{-st}f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De igual forma, la transformada de la segunda derivada es

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f''(t)\,dt = e^{-st}f'(t)\bigg|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$$
$$= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\}$$
$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

0 sea
$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

De manera análoga se puede demostrar que

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{3}$$

Por los resultados en (1), (2) y (3), se ve que la transformada de Laplace de las derivadas de una función f es de naturaleza recursiva. El siguiente teorema determina la transformada de Laplace de la enésima derivada de f. Omitiremos su demostración.

TEOREMA 7.8 **Transformada de una derivada**

Si $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas en $[0, \infty)$, son de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua parte por parte en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

en donde $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

EJEMPLO 1 Aplicación del teorema 7.8

Obsérvese que la suma $kt \cos kt + \operatorname{sen} kt$ es la derivada de $t \operatorname{sen} kt$. *En consecuencia,*

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{kt \cos kt + \operatorname{sen} kt\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}(t \operatorname{sen} kt)\right\} \\
&= s\mathscr{L}\{t \operatorname{sen} kt\} && \leftarrow \text{de acuerdo con (1)} \\
&= s\left(-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\}\right) && \leftarrow \text{según el teorema 7.7} \\
&= s\left(\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}.
\end{aligned}$$

■

3.9. Trasformada de integrales (teorema)

Transformada de una integral Cuando $g(t) = 1$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = 1/s$, el teorema de la convolución implica que la transformada de Laplace de la integral defes

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{7}$$

La forma inversa de esta ecuación,

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}, \tag{8}$$

se puede usar en algunas ocasiones en lugar de las fracciones parciales cuando s^n es un factor del denominador y $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ sea fácil de integrar; por ejemplo, sabemos que cuando $f(t) = \operatorname{sen} t$, entonces $F(s) = 1/(s^2+1)$, así que, según (8),

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t \operatorname{sen} \tau\, d\tau = 1 - \cos t \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t (1 - \cos \tau)\, d\tau = t - \operatorname{sen} t \\
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t (\tau - \operatorname{sen} \tau)\, d\tau = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t
\end{aligned}$$

etcétera. También emplearemos la ecuación (7) en la próxima sección sobre aplicaciones.