3.1 0 .Teorema de la convolución

Convolución Si las funcionesfy g son continuas parte por parte en $[0, \infty)$, la **convolución** de f y g se representa por $f * g$ y se define con la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Por ejemplo, la convolución de $f(t) = e^t$ y $g(t) = \operatorname{sen} t$ es

$$e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} t - \cos t + e^t). \qquad \textbf{(4)}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau;$$

Esto es, que $$f * g = g * f.$$

Véase el problema 29 de los ejercicios 7.4. Esto significa que la convolución de dos funciones es conmutativa.

Es posible determinar la transfomada de **Laplace** de la convolución de dos funciones sin tener que evaluar la integral como lo hicimos para la **ecuación** (4). El resultado que veremos se conoce como teorema de la **convolución.**

TEOREMA 7.9 **Teorema de la convolución**

Si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial,

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\, \mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

DEMOSTRACIÓN **Sean** $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau$

Y $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\beta} g(\beta)\, d\beta.$

Al proceder formalmente obtenemos

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-s\beta}g(\beta)\,d\beta\right)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}f(\tau)g(\beta)\,d\tau\,d\beta$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-s(\tau+\beta)}g(\beta)\,d\beta.$$

Mantenemos fija τ y escribimos $t = \tau + \beta$, $dt = d\beta$, de modo que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_\tau^\infty e^{-st}g(t-\tau)\,dt.$$

Estamos integrando en el plano $t\tau$ sobre la parte sombreada de la figura 7.28. Puesto que f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial, es posible intercambiar el orden de integración:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right\}dt = \mathscr{L}\{f*g\}. \blacksquare$$

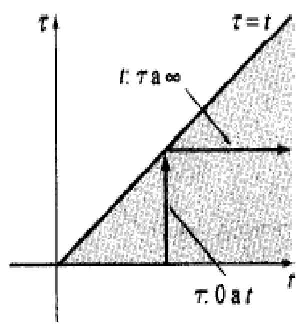


FIGURA 7.28

EJEMPLO 2 Transformada de una convolución

Evalúe $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau\right\}$.

SOLUCIÓN Si $f(t) = e^t$ y $g(t) = \operatorname{sen} t$, el teorema de la convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de f y g es el producto de sus transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau\right\} = \mathscr{L}\{e^t\}\cdot\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.$$

3.11. Trasformada de Laplace de una función periódica

Transformada de una función periódica Si el periodo de una función periódica es $T > 0$, entonces $f(t + T) = f(t)$. Se puede determinar la transformada de Laplace de una función periódica por una integración sobre un periodo.

TEOREMA 7.10 **Transformada de una función periódica**

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt. \tag{9}$$

DEMOSTRACIÓN Expresamos la transformada de Laplace como dos integrales:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{10}$$

Escribiendo $t = u + T$, la última de las integrales de (9) se transforma en

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-s(u+T)} f(u + T)\, du = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du = e^{-sT} \mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Por consiguiente, la ecuación (10) es $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sT} \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Al despejar $\mathscr{L}\{f(t)\}$ se llega al resultado de la ecuación (9). ■

EJEMPLO 5 **Transformada de Laplace de una función periódica**

Determine la transformada de Laplace de la función periódica que muestra la figura 7.29.

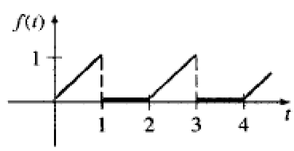


FIGURA 7.29

SOLUCIÓN La función se puede definir en el intervalo $0 \le t < 2$ como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

y fuera del intervalo mediante $f(t + 2) = f(t)$. Con $T = 2$ aplicamos la ecuación (9) y la integración por partes:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} t\, dt + \int_1^2 e^{-st} 0\, dt \right] \\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1-e^{-s}}{s^2} \right| \\ &= \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-2s})}. \end{aligned} \tag{11}$$

■

El resultado en la ecuación (ll) del ejemplo anterior se puede obtener sin necesidad de integrar, aplicando el segundo teorema de traslación. Si definimos

$$g(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1, \end{cases}$$

entonces $f(t) = g(t)$ en el intervalo $[0, T]$, donde $T = 2$. Pero podemos expresar g en términos de una función escalón unitario, en fonna $g(t) = t - t\,\mathscr{U}(t-1)$. **Así,**

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\mathscr{L}\{g(t)\}$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\mathscr{L}\{t - t\,\mathscr{U}(t-1)\}$$

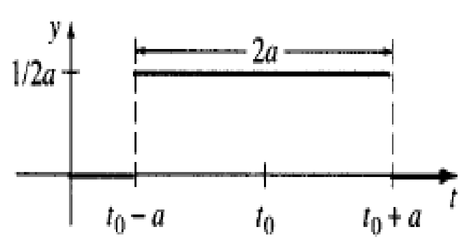
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}e^{-s} - 6\frac{1}{s}e^{-s}\right] \qquad \leftarrow \text{según (8), sección 7.3}$$

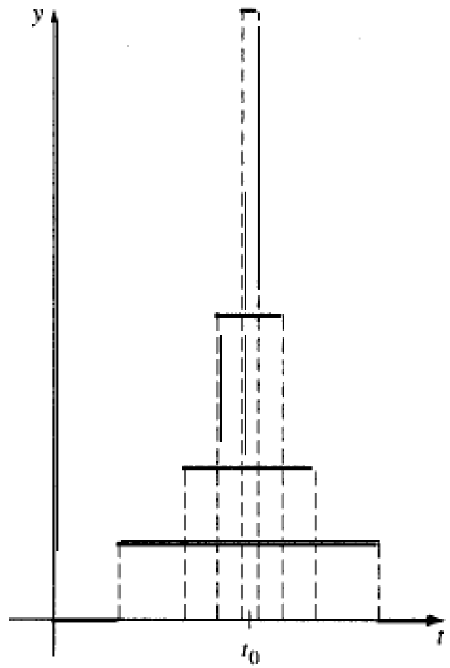
Al examinar la expresión dentro de los paréntesis rectangulares vemos que es idéntica a (ll).

3.12. Función Delta Dirac

Impulso unitario Con frecuencia, sobre los sistemas mecánicos actúan fuerzas externas (o fem sobre los circuitos eléctricos) de gran magnitud **sólo** durante un lapso muy breve; por ejemplo, en un ala de aeroplano que se encuentre oscilando, puede caer **un** rayo, se puede dar un golpe brusco a **una** masa en un resorte con **un** martillo de bola, o una bola de béisbol (golf o tenis), podría mandarse volando golpeándola violentamente con algún tipo de garrote, como **un** bate, un palo de golfo una raqueta. La función

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_0 - a \\ \dfrac{1}{2a}, & t_0 - a \le t < t_0 + a \\ 0, & t \ge t_0 + a, \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$





(b) Comportamiento de δ_a cuando $a \to 0$

cuando $a > 0$, $t_0 > 0$ se ven en la figura **7.51a)**, y podrían servir como modelo matemático de este tipo de fuerzas. Para valores pequeños de a, $\delta_a(t - t_0)$ es, esencialmente, una **función** constante de gran magnitud que se encuentra "encendida" **sólo** durante un lapso muy pequeño, alrededor de t_0. El comportamiento de $\delta_a(t - t_0)$ cuando $a \to 0$ se muestra en la figura **7.51b)**. **Esta función**, $\delta_a(t - t_0)$, se llama **impulso unitario** porque tiene la propiedad de integración, $\int_0^\infty \delta_a(t - t_0)\, dt = 1$.

Función delta de Dirac En la **práctica** conviene trabajar con otro tipo de impulso unitario, con una **"función"** que aproxima $\delta_a(t - t_0)$, definida con el límite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t - t_0). \qquad \textbf{(2)}$$

Esta última expresión, que por ningún motivo es una función, se puede caracterizar mediante las dos propiedades siguientes:

$$(i)\ \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (ii)\ \int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 1.$$

Impulso unitario $\delta(t - t_0)$, se denomina **función delta de Dirac.**

3.13. Trasformada de Laplace de la función Delta Dirac

Es posible obtener la transformada de **Laplace** de la función delta de Dirac con la hipótesis **formal de** que $\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = \text{lím}_{a\to 0}\, \mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\}$.

TEOREMA 7.11 **Transformada de la función delta de Dirac**

Para $t_0 < 0$, $\qquad \mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}$. **(3)**

DEMOSTRACIÓN Comenzaremos expresando a $\delta_a(t-t_0)$ en términos de la **función** escalón unitario, de acuerdo con las ecuaciones (4) y (5) de la sección 7.3:

$$\delta_a(t-t_0) = \frac{1}{2a}[\mathscr{U}(t-(t_0-a)) - \mathscr{U}(t-(t_0+a))].$$

Según la linealidad y la ecuación (7) de la sección 7.3, la transformada de **Laplace** de esta expresión es

$$\mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{-s(t_0-a)}}{s} - \frac{e^{-s(t_0+a)}}{s}\right] = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right). \tag{4}$$

Como esta **ecuación** tiene la forma indeterminada **0/0** cuando $a \to 0$, aplicamos la regla de **L'Hôpital:**

$$\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{a\to 0} \mathscr{L}\{\delta_a(t-t_0)\} = e^{-st_0}\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2sa}\right) = e^{-st_0}. \qquad \blacksquare$$

Cuando $t_0 = 0$, parece lógico suponer, de acuerdo con la ecuación **(3),** que

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Este resultado subraya el hecho de que $\delta(t)$ no es el tipo normal de **función** que hemos manejado porque, de acuerdo con el teorema 7.4, **esperaríamos** que $\mathscr{L}\{f(t)\} \to 0$ cuando $s \to \infty$.

EJEMPLO 1 **Dos problemas de valor inicial**

Resuelva $y'' + y = 4\delta(t-2\pi)$, sujeta a

a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; b) $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Estos dos problemas de valor inicial podrían servir de modelos para describir el movimiento de una masa en un resorte en un medio en que el amortiguamiento sea insignificante. Cuando $t = 2\pi$, se imparte un fuerte golpe a la masa. En a), la masa parte del reposo a una **unidad** abajo de la posición de equilibrio. En b), la masa se encuentra en reposo en la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN a) Según **(3),** la transformada de **Laplace** de la ecuación diferencial es

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = 4e^{-2\pi s} \quad \text{o sea} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2+1}.$$

Aplicamos la forma inversa del segundo teorema de traslación para obtener

$$y(t) = \cos t + 4\,\mathrm{sen}(t - 2\pi)\,\mathscr{U}(t - 2\pi).$$

Como $\mathrm{sen}(t - 2\pi) = \mathrm{sen}\ t$, la solución anterior se puede expresar

$$y(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \le t < 2\pi \\ \cos t + 4\,\mathrm{sen}\,t, & t \ge 2\pi. \end{cases} \tag{5}$$

En la figura 7.52 -la gráfica de (5)-vemos que la masa tenía movimiento armónico simple hasta que fue golpeada cuando $t = 2\pi$. La influencia del impulso unitario es aumentar la amplitud de oscilación hasta $\sqrt{17}$, cuando $t > 2\pi$.

b) En este caso, la transformada de la ecuación es, sencillamente,

$$Y(s) = \frac{4e^{-2\pi s}}{s^2 + 1},$$

y así

$$y(t) = 4\,\mathrm{sen}(t - 2\pi)\,\mathscr{U}(t - 27r)$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2\pi \\ 4\,\mathrm{sen}\,t, & t \ge 2\pi. \end{cases} \tag{6}$$

La gráfica de esta ecuación (Fig. 7.53) muestra que, como era de esperarse por las condiciones iniciales, la masa no se mueve sino hasta que se le golpea cuando $t = 2\pi$. ∎

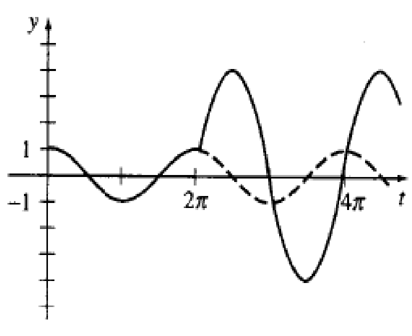


FIGURA 7.52

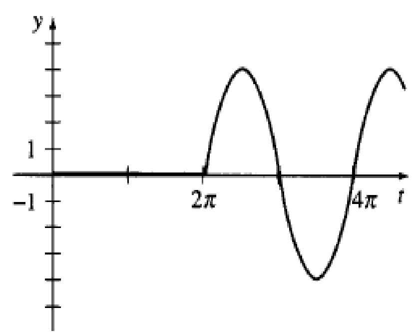


FIGURA 7.53

3.14. Trasformada inversa

En la sección anterior nos ocupamos del problema de transformar una función f(t) en otra función $F(s)$ mediante la integral $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$. La representamos simbólicamente de la siguiente manera: $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$. Ahora invertiremos el problema; es decir, da& $F(s)$, hallar la función $f(t)$ que corresponde a esa transformación. Se dice que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ y se expresa:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

3.15. Algunas trasformadas inversas

El análogo del teorema 7.2 para la transformada inversa es el teorema 7.3, que presentamos en seguida.

TEOREMA 7.3 **Algunas transformadas inversas**

a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ **c)** $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$

d) $\text{sen}\, kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$ **e)** $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$

f) $\text{senh}\, kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$ **g)** $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$

3.16. Propiedades de la trasformada inversa (linealidad, traslación)

$\mathscr{L}^{-1}$ es una transformación lineal Suponemos que la transformada inversa de **Laplace** es, en sí, una transformación lineal; esto es, si α y β son constantes,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + @\{G(s)\},$$

en donde F y G son las transformadas de las funciones f y g.

La transformada inversa de **Laplace** de una función F(s) puede no ser única. Es posible que $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ y, sin embargo, $f_1 \neq f_2$. Pero para nuestros fines no nos ocuparemos de este caso. **Si** f_1 **y** f_2 son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial cuando $t > 0$, y si $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$, las funciones f_1 y f_2 son *esencialmente* iguales. Véase el problema 35, ejercicios 7.2. Sin embargo, **si** f_1 **y** f_2 son continuas en $[0, \infty)$ y $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$, entonces $f_1 = f_2$ en dicho intervalo.

EJEMPLO 1 **Aplicación del teorema 7.3**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$

SOLUCIÓN Para coincidir con la forma que aparece en la parte b) del teorema 7.3, vemos que n = 4, y después multiplicamos y dividimos entre **4!.** En consecuencia,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 **Aplicación del teorema 7.3**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\}$.

SOLUCIÓN Como $k^2 = 64$, arreglamos la expresión **multiplicándola** y dividiéndola entre 8. **Según** la parte d) del teorema 7.3,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+64}\right\} = \frac{1}{8}\,\text{sen}\, 8t. \quad \blacksquare$$

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}$.

SOLUCIÓN La función dada de s se puede expresar en dos partes, con un común denominador:

$$\frac{3s+5}{s^2+7}=\frac{3s}{s^2+7}+\frac{5}{s^2+7}.$$

De acuerdo con la propiedad de linealidad de la transformada inversa y las partes e) y d) del teorema 7.3, tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}=3\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\}+\frac{5}{\sqrt{7}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+7}\right\}$$

$$=3\cos\sqrt{7}t+\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\sqrt{7}t. \qquad \blacksquare$$

Forma inversa del primer teorema de traslación Si $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del teorema 7.5 es

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\}=e^{at}f(t). \qquad (1)$$

EJEMPLO 2 **Completar el cuadrado para determinar $\mathscr{L}^{-1}$**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}$.

SOLUCIÓN Si $s^2+6s+11$ tuviera factores reales, emplearíamos fracciones parciales; pero como este término cuadrático no se factoriza, completamos su cuadrado.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+2}\right\} \quad \leftarrow \text{completar el cuadrado}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+2}\right\} \quad \leftarrow \text{sumar cero en el numerador}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}-\frac{3}{(s+3)^2+2}\right\} \quad \leftarrow \text{división término a término}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right\}-3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+2}\right\} \quad \leftarrow \text{linealidad de } \mathscr{L}^{-1}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+3}\right\} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\bigg|_{s\to s+3}\right\}$$

$$= e^{3t}\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t. \quad \leftarrow \text{de acuerdo con (1) y el teorema 1.3}$$

■

EJEMPLO 3 **Completar el cuadrado y linealidad**

Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2+2s-8}\right\}$.

SOLUCIÓN Completamos el cuadrado en el segundo denominador y aplicamos la **linea-lidad** como sigue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2+2s-8}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{(s+1)^2-9}\right\}$$

$$= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{(s-1)^3}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2-9}\right\}$$

$$= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\bigg|_{s\to s-1}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-9}\bigg|_{s\to s+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{t}t^2 + \frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{senh} 3t.$$

■

Forma inversa del segundo teorema de traslación Si $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del teorema 7.6, cuando $a>0$, es

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,\mathcal{U}(t-a). \tag{9}$$

EJEMPLO 11 **la inversa según la fórmula (9)**

Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\}$.

SOLUCIÓN $a=\frac{\pi}{2}$ y $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$; de esta manera según (9),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}_{t\to t-\pi/2}\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

identidad trigonométrica $\rightarrow$

$$= \frac{1}{3}\cos 3t\,\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right).$$

■

Si $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ y si suponemos que es posible intercambiar diferenciación e integración, entonces

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st}f(t)]\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\};$$

esto es,

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

De igual manera,

$$\mathcal{L}\{t^2f(t)\} = \mathcal{L}\{t\cdot tf(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

$$= -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Los dos casos anteriores sugieren el resultado general para $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$.

3.16.1. Determinación de la trasformada inversa mediante el uso de las fracciones parciales

Fracciones parciales Las fracciones parciales **desempeñan** un papel importante para determinar las transformadas inversas de **Laplace.** Como dijimos en la sección 2.1, esta descomposición en fracciones se puede efectuar con rapidez **sólo** con un comando en algunos sistemas algebraicos computacionales. En realidad, algunos paquetes cuentan con dotados con comandos para la transformada de **Laplace** y la transformada inversa de **Laplace.** Para los lectores que no tienen acceso a estos programas, en los tres ejemplos siguientes repasaremos las operaciones algebraicas básicas para los tres casos de descomposición en fracciones parciales; por ejemplo, los denominadores de

$$(i)\ F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\quad (ii)\ F(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\quad (iii)\ F(s)=\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}$$

contienen, respectivamente, factores lineales distintos, factores lineales repetidos y una expresión **cuadrática** sin factores reales. Consúltese la descripción **más** completa de esta teoría en un libro de **cálculo** infinitesimal.

EJEMPLO 4 **Fracciones parciales y linealidad**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$.

SOLUCIÓN Existen constantes A, B y C únicas, **tales** que

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}$$
$$=\frac{A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}$$

Dado que los denominadores son idénticos, los numeradores deben ser idénticos:

$$1=A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2).$$

Comparamos los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la igualdad y tenemos que esta ecuación equivale a un sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas A, B y C; sin embargo, debemos recordar el método siguiente para determinarlas. Si hacemos $s = 1$, $s = -2$ y $s = -4$, que son los ceros del común denominador $(s-1)(s+2)(s+4)$, obtenemos, a su vez,

$$1 = A(3)(5), \qquad 1 = B(-3)(2), \qquad 1 = C(-5)(-2)$$

o sea que $A = \frac{1}{15}$, $B = -\frac{1}{6}$ y $C = \frac{1}{10}$; por consiguiente, podremos escribir

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{1/15}{s-1} - \frac{1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4}$$

y así, según la parte c) del teorema 7.3,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \frac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$
$$= \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 **Fracciones parciales y linealidad**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}$.

SOLUCIÓN Suponemos que

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}$$

de modo que

$$s + 1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2.$$

Con $s = 0$ y $s = -2$ se obtienen $B = \frac{1}{8}$ y $E = -\frac{1}{4}$, respectivamente. Igualamos los coeficientes de s^4, s^3 y s llegamos a

$$0 = A + C, \qquad 0 = 6A + B + 4C + D, \qquad 1 = 8A + 12B,$$

de donde se sigue que $A = -\frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{16}$ y $D = 0$; por consiguiente, de acuerdo con las partes a), b) y c) del teorema 7.3,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1/16}{s} + \frac{1/8}{s^2} + \frac{1/16}{s+2} - \frac{1/4}{(s+2)^3}\right\}$$
$$= -\frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\}$$
$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}.$$

En lo anterior también aplicamos $\mathscr{L}^{-1}\{2/(s+2)^3\} = t^2e^{-2t}$ del ejemplo 6, sección 7.1. $\blacksquare$

EJEMPLO 6 **Fracciones parciales y linealidad**

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$.

SOLUCIÓN Suponemos que

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+4}$$

de modo que

$$3s-2=As^2(s^2+4)+Bs(s^2+4)+C(s^2+4)+(Ds+E)s^3.$$

Con $s=0$ se obtiene de inmediato $C=-\frac{1}{2}$. Ahora bien, los coeficientes de s^4, s^3, s^2 y s son, respectivamente,

$$0=A+D,\qquad 0=B+E,\qquad 0=4A+C,\qquad 3=4B,$$

de donde obtenemos $B=\frac{3}{4}$, $E=-\frac{3}{4}$, $A=\frac{1}{8}$ y $D=-\frac{1}{8}$; así pues de acuerdo con las partes a), b), e) y d) del teorema 7.3,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/8}{s}+\frac{3/4}{s^2}-\frac{1/2}{s^3}+\frac{-s/8-3/4}{s^2+4}\right\}\\&=\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}\\&\quad-\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}\\&=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{3}{8}\operatorname{sen} 2t.\end{aligned}$$

■

Según señala el teorema siguiente, no toda función arbitraria de s es una transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

TEOREMA 7.4 **Comportamiento de $F(s)$ cuando $s\to\infty$**

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$ y de orden exponencial para $t>T$, entonces $\lim_{s\to\infty}\mathscr{L}\{f(t)\}=0$.

DEMOSTRACIÓN Dado que $f(t)$ es continua parte por parte en $0\le t\le T$, necesariamente es acotada en el intervalo; o sea, $|f(t)|\le M_1\le M_1e^{0t}$. También, $|f(t)|\le M_2e^{\gamma t}$ cuando $t>T$. Si M representa el máximo de $\{M_1, M_2\}$ y c indica el máximo de $\{0,\gamma\}$, entonces

$$|\mathscr{L}\{f(t)\}|\le\int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt\le M\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{ct}\,dt=-M\left.\frac{e^{-(s-c)t}}{s-c}\right|_0^\infty=\frac{M}{s-c}$$

para $s>c$. Cuando $s\to\infty$, se tiene que $|\mathscr{L}\{f(t)\}|\to 0$, de modo que $\mathscr{L}\{f(t)\}\to 0$. ■

De acuerdo con el teorema 7.4 podemos decir que $F_1(s)=1$ y $F_2(s)=s/(s+1)$ no son transformadas de Laplace de funciones continuas por tramos de orden exponencial en virtud de que $F_1(s)\not\to 0$ y $F_2(s)\not\to 0$ cuando $s\to\infty$. El lector no debe sacar como conclusión, por ejemplo, que no existe $\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}$. Hay otros tipos de funciones.

3.16.2. Determinación de la trasformada inversa usando los teoremas de Heaviside

De acuerdo con el teorema 7.4 podemos decir que $F_1(s) = 1$ y $F_2(s) = s/(s+1)$ no son transformadas de **Laplace** de funciones continuas por tramos de orden exponencial en virtud de que $F_1(s) \not\to 0$ y $F_2(s) \not\to 0$ cuando $s \to \infty$. El lector no debe sacar como conclusión, por ejemplo, que no existe $\mathcal{L}^{-1}$ {F,(s)}. Hay otros tipos de funciones.

Observación

Esta observación va dirigida a quienes se les pidan descomposiciones en fracciones parciales a mano. Hay otra forma de determinar los coeficientes en esas descomposiciones, en el caso especial cuando $\mathcal{L}\{f(t)\} = P(s)/Q(s)$, donde P y Q son polinomios, y Q es un producto de factores distintos:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-r_1)(s-r_2)\ .\ (s-r_n)}.$$

Veamos un ejemplo específico. De acuerdo con la teoría de las fracciones parciales, sabemos que existen constantes A, B y C únicas **tales** que

$$\frac{s^2+4s-1}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}. \qquad \textbf{(1)}$$

Supongamos que multiplicamos ambos lados de esta ecuación por, digamos, s $-$ 1, simplificamos e igualamos $s = 1$. Como los coeficientes de B y C son cero, obtenemos

$$\left.\frac{s^2+4s-1}{(s-2)(s+3)}\right|_{s=1} = A \qquad \text{0 sea} \qquad A=-1.$$

Expresado de otro modo,

$$\left.\frac{s^2 + 4s - 1}{(s-1)\ (s-2)(s+3)}\right|_{s=1} = A,$$

en donde hemos sombreado, o cubierto, el factor que se anuló cuando el lado izquierdo de **(1)** fue multiplicado por $s-1$. No evaluamos este factor cubierto en $s = 1$. Para obtener B y C, tan sólo evaluamos el lado izquierdo de (1) cubriendo, en Su turno, a $s - 2$ y a $s + 3$:

$$\left.\frac{s^2 + 4s - 1}{(s-1)\ (s-2)\ (S+3)}\right|_{s=2} = B \qquad \text{o sea } B = \frac{11}{5}$$

$$\left.\frac{s^2 + 4s - 1}{(s-1)(s-2)\ (s+3)}\right|_{s=-3} = C \qquad \text{o sea } C = -\frac{1}{5}.$$

Obsérvese con cuidado que en el cálculo de C evaluamos en $s = -3$. Si reconstruye los detalles de la llegada a esta última expresión, el lector descubrirá por qué es así. También debe comprobar con otros métodos que

$$\frac{s^2 + 4s - 1}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{-1}{s-1} + \frac{11/5}{s-2} + \frac{-1/5}{s+3}.$$

Este **método de cubierta** es una versión simplificada de algo que **se conoce como teorema de desarrollo de Heaviside.**