## 4. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

### 4.1. Solución de una ecuación diferencial lineal con condiciones iniciales por medio de la trasformada de Laplace

Como $\mathscr{L}\{y^{(n)}(t)\}$, $n > 1$, depende de $y(t)$ y de sus $n - 1$ derivadas, evaluadas en $t = 0$, la transformada de **Laplace** es lo ideal en problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este tipo de ecuación diferencial se puede reducir a una *ecuación algebraica* en la función transformada, Y(s). Para comprenderlo, veamos el problema de valor inicial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

**en donde** $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes. De acuerdo con la propiedad de linealidad de la transformada de **Laplace** podemos escribir

$$a_n \mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1} \mathscr{L}\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0 \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \qquad \textbf{(1)}$$

Según el teorema 7.8, la ecuación (1) equivale a

$$a_n[s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)]$$
$$+ a_{n-1}[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \ldots - y^{(n-2)}(0)] + \ldots + a_0 Y(s) = G(s)$$

0 sea

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0] Y(s) = a_n[s^{n-1} y_0 + \cdots + y_{n-1}]$$
$$+ a_{n-1}[s^{n-2} y_0 + \ldots + y_{n-2}] + \ldots + G(s), \qquad \textbf{(2)}$$

en donde $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$ y $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$. Despejamos Y(s) de (2) y llegamos a y(t) determinando la transformada inversa

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

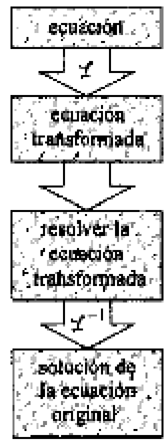


FIGURA 7.36

El procedimiento se describe en la figura 7.36. Obsérvese que este método incorpora las condiciones iniciales dadas directamente en la solución; en consecuencia, no hay necesidad de las operaciones separadas para **hallar** las constantes en la solución general de la **ecuación** diferencial.

## EJEMPLO 1 Ecuación diferencial transformada en ecuación algebraica

Resuelva $\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, y(0) = 1.$

**SOLUCIÓN** **Primero** sacamos la transformada de ca& lado de la ecuación diferencial dada:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} - 3\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{2t}\}.$$

A continuación desarrollamos $\mathscr{L}\{dy/dt\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$, y $\mathscr{L}\{e^{2t}\} = 1/(s-2)$. Entonces

$$sY(s) - 1 - 3Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

despejamos $Y(s)$ y descomponemos en fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3},$$

asi que

$$y(t) = -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}.$$

De acuerdo con la parte c) del teorema 7.3,

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

■

## EJEMPLO 2 Un problema de valor inicial

Resuelva $y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

SOLUCIÓN
$$\mathscr{L}\{y''\} - 6\mathscr{L}\{y'\} + 9\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$$

$$\underbrace{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)}_{\mathscr{L}\{y''\}} - 6\underbrace{[sY(s) - y(0)]}_{\mathscr{L}\{y'\}} + 9\underbrace{Y(s)}_{\mathscr{L}\{y\}} = \underbrace{\frac{2}{(s-3)^3}}_{\mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}}.$$

Aplicamos las condiciones iniciales y simplificamos:

$$(s^2 - 6s + 9)Y(s) = 2s - 6 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2Y(s) = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}.$$

Así,
$$y(t) = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{2}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}.$$

De acuerdo con el primer teorema de traslación,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\bigg|_{s \to s-3}\right\} = t^4e^{3t}.$$

Por consiguiente, llegamos a
$$y(t) = 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}.$$
■

## EJEMPLO 3 Aplicación del primer teorema de traslación

Resuelva $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

SOLUCIÓN
$$\mathscr{L}\{y''\} + 4\mathscr{L}\{y'\} + 6\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{1\} + \mathscr{L}\{e^{-t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$(s^2 + 4s + 6)Y(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s(s-1)(s^2+4s+6)}.$$

La **descomposición** de $Y(s)$ en fracciones parciales es

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} + \frac{-s/2 - 5/3}{s^2 + 4s + 6}.$$

Dispondremos lo necesario para sacar la transformada inversa: para ello arreglamos como sigue a Y(s):

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} + \frac{(-1/2)(s+2) - 2/3}{(s+2)^2+2}$$

$$= \frac{1/6}{s} + \frac{1/3}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s+2}{(s+2)^2-2} - \frac{2}{3}\frac{1}{(s+2)^2+2}.$$

Por ultimo, de acuerdo con las partes a) y c) del teorema 7.3 y el primer teorema de traslación, llegamos a

$$y(t) = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2}\right\} - \frac{2}{3\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-2t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t.$$ ■

**EJEMPLO 4** **Aplicación de los teoremas 7.3 y 7.7**

Resuelva $x'' + 16x = \cos 4t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

**SOLUCIÓN** Recuérdese que este problema de valor inicial podría describir el movimiento forzado, no amortiguado y resonante de una masa en un resorte. La masa comienza con una velocidad inicial de 1 ft/s, en dirección hacia abajo, desde la posición de equilibrio.

Transformamos la ecuación y obtenemos

$$(s^2 + 16)X(s) = 1 + \frac{s}{s^2+16}$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2}.$$

Con ayuda de la parte d) del teorema 7.3, y de acuerdo con el teorema 7.7,

$$x(t) = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8}t\operatorname{sen} 4t.$$ ■

**EJEMPLO 5** **Empleo de una función escalón unitario**

Resuelva $x'' + 16x = f(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,

en donde $$f(t) = \begin{cases} \cos 4t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi. \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Se puede interpretar que la función $f(t)$ representa una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico sólo durante un corto intervalo de tiempo, y después

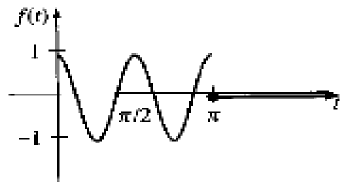


FIGURA 7.37

desaparece (Fig. 7.37). Aunque este problema se podría resolver con métodos convencionales, el procedimiento no conviene de ninguna manera, cuando se define a $f(t)$ por tramos. Con ayuda de las ecuaciones (2) y (3) de la sección 7.3 y la periodicidad del coseno, podremos reformularfen términos de la función escalón unitario como sigue:

$$f(t) \quad \cos 4t - \cos 4t\, \mathcal{U}(t - \pi).$$

Para transformarfaplicamos la ecuación (8) de la sección 7.3, y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{x''\} + 16\mathscr{L}\{x\} &\quad \mathscr{L}\{f(t)\} \\ s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 16X(s) &\quad \frac{s}{s^2+16} - \frac{s}{s^2+16}e^{-\pi s} \\ (s^2+16)X(s) &\quad 1 + \frac{s}{s^2+16} - \frac{s}{s^2+16}e^{-\pi s} \\ X(s) &\quad \frac{1}{s^2+16} + \frac{s}{(s^2+16)^2} - \frac{s}{(s^2+16)^2}e^{-\pi s}, \end{aligned}$$

Empleamos la parte b) del ejemplo 12, sección 7.3 (con $k$ 4), junto con la ecuación (8) de esa sección:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} + \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}\right\} - \frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8s}{(s^2+16)^2}e^{-\pi s}\right\} \\ &\quad \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{8}t\operatorname{sen} 4t - \frac{1}{8}(t - \pi)\operatorname{sen} 4(t-\pi)\,\mathcal{U}(t - a). \end{aligned}$$

La solución anterior es lo mismo que

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4t + \dfrac{1}{8}t\operatorname{sen} 4t, & 0 \le t < \pi \\ \dfrac{2+\pi}{8}\operatorname{sen} 4t, & t \ge \pi. \end{cases}$$

En la gráfica de x(t) de la figura 7.38 se puede ver que las amplitudes de oscilación se estabilizan tan pronto como la fuerza externa se "apaga".

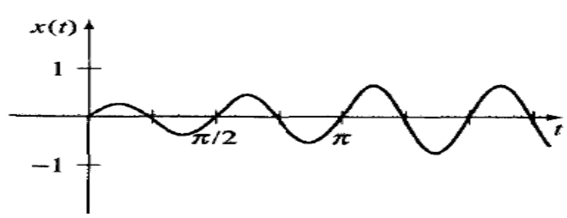


FIGURA 7.38

## 4.2. Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales por medio de la trasformada de Laplace

Cuando se especifican las condiciones iniciales, la transformada de **Laplace** reduce **un** sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas para las funciones transformadas.

**EJEMPLO 1** **Sistema de ecuaciones diferenciales que se transforma en un sistema algebraico**

Resuelva

$$\begin{aligned} 2x' + y' - y &= t \\ x' + y' &= t^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

sujetas **a** $x(0) = 1, y(0) = 0$.

**SOLUCIÓN** Si $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, entonces, después de transformar c: ecuación, llegamos a

$$\begin{aligned} 2[sX(s) - x(0)] + sY(s) - y(0) - Y(s) &= \frac{1}{s^2} \\ sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

0 sea

$$\begin{aligned} 2sX(s) + (s-1)Y(s) &= 2 + \frac{1}{s^2} \\ sX(s) + \quad sY(s) &= 1 + \frac{2}{s^3}. \end{aligned}$$

Al multiplicar por 2 la segunda de estas ecuaciones y restar se obtiene

$$(-s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3} \quad 0 \text{ sea} \quad Y(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)},$$

Desarrollamos en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1},$$

y así

$$\begin{aligned} y(r) &= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}. \end{aligned}$$

De acuerdo con la segunda ecuación de **(2),**

$$X(s) = -Y(s) + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4}.$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} \\ &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t}. \end{aligned}$$

**Aplicaciones** Pasemos a describir algunas aplicaciones elementales donde intervienen sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Las soluciones de los problemas que veremos se pueden obtener tanto por el **método** de la sección 4.8 como con la transformada de **Laplace.**

**Resortes acoplados** Dos masas, $m_1$ y $m_2$, están unidas a dos resortes, $A$ y $B$, de masa insignificante cuyas constantes de resorte son $k_1$ y $k_2$, respectivamente, y los resortes se fijan como se ve en la figura 7.55. Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ los desplazamientos verticales de las masas respecto a sus posiciones de equilibrio. Cuando el sistema está en movimiento, el resorte $B$ que& sometido a alargamiento y a compresión, a la vez; por lo tanto, su alargamiento neto es $x_2 - x_1$. Entonces, según la ley de Hooke, vemos que los resortes $A$ y $B$ ejercen las fuerzas $-k_1x_1$ Y $k_2(x_2 - x_1)$, respectivamente, sobre $m_1$. Si no se aplican fuerzas externas al sistema, y en ausencia de fuerza de amortiguamiento, la fuerza neta sobre $m_1$ *es* $-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$. De acuerdo con la segunda ley de Newton podemos escribir

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1).$$

De igual forma, la fuerza neta ejercida sobre la masa $m_2$ sólo se debe al alargamiento neto de $B$; esto es, $-k_2(x_2 - x_1)$. En consecuencia,

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1).$$

En otras palabras, el movimiento del sistema acoplado se representa con el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de segundo orden

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1). \end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

En el próximo ejemplo resolveremos ese sistema suponiendo que $k_1 = 6$, $k_2 = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, y que las masas parten de sus posiciones de equilibrio con velocidades unitarias opuestas.

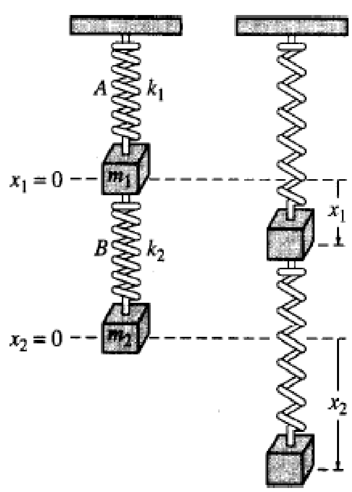


FIGURA 7.55

**EJEMPLO 2** Resortes acoplados

Resuelva
$$\begin{aligned} x_1'' + 10x_1 \quad - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 + x_2'' + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

sujetas a $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = -1$.

**SOLUCIÓN** La transformada de Laplace de cada ecuación es

$$\begin{aligned} s^2X_1(s) - sx_1(0) - x_1'(0) + 10X_1(s) - 4X_2(s) &= 0 \\ -4X_1(s) + s^2X_2(s) - sx_2(0) - x_2'(0) + 4X_2(s) &= 0, \end{aligned}$$

en donde $X_1(s) = \mathscr{L}\{x_1(t)\}$ y $X_2(s) = \mathscr{L}\{x_2(t)\}$. El sistema anterior equivale a

$$\begin{aligned} (s^2 + 10)X_1(s) - \quad 4X_2(s) &= 1 \\ -4X_1(s) + (s^2 + 4)X_2(s) &= -1. \end{aligned} \tag{7}$$

Despejamos $X_1$ de las ecuaciones (7) y descomponemos el resultado en Cacciones parciales:

$$X_1(s) = \frac{s^2}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{1/5}{s^2+2} + \frac{6/5}{s^2+12},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} + \frac{6}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Sustituimos la expresión de $X_1(s)$ en la primera de las ecuaciones (7) y obtenemos

$$X_2(s) = -\frac{s^2+6}{(s^2+2)(s^2+12)} = -\frac{2/5}{s^2+2} - \frac{3/5}{s^2+12}$$

y

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{2}{5\sqrt{2}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} - \frac{3}{5\sqrt{12}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{12}}{s^2+12}\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Por último, la solución del sistema dado (6) es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{10}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t \\ x_2(t) &= -\frac{\sqrt{2}}{5}\operatorname{sen}\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{3}}{10}\operatorname{sen}2\sqrt{3}t. \end{aligned} \tag{8}$$ ■

**Redes eléctricas** En la ecuación (18) de la sección 3.3, dijimos que las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en la red que contiene un inductor, un resistor y un capacitor (Fig. 7.56) están definidas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

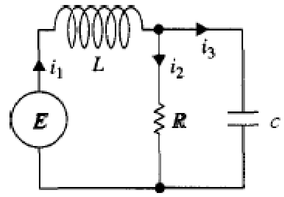


FIGURA 7.56

$$
\begin{aligned}
L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\
RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

En el **próximo** ejemplo resolveremos este sistema aplicando la transformada de **Laplace.**

**EJEMPLO 3** **Una red eléctrica**

Resuelva el sistema de ecuaciones (9) con las condiciones $E(t) = 60$ V, $L = 1$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f y las corrientes $i_1$ e $i_2$ iguales a cero en el momento inicial.

**SOLUCIÓN** Debemos resolver

$$
\begin{aligned}
\frac{di_1}{dt} + 50i_2 &= 60 \\
50(10^{-4})\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0
\end{aligned}
$$

sujetas a $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$.

Aplicamos la transformación de **Laplace** a cada ecuación del sistema y simplificamos,

$$
\begin{aligned}
sI_1(s) + \quad 50I_2(s) &= \frac{60}{s} \\
-200I_1(s) + (s + 200)I_2(s) &= 0,
\end{aligned}
$$

en donde $I_1(s) = \mathscr{L}\{i_1(t)\}$ e $I_2(s) = \mathscr{L}\{i_2(t)\}$. Despejamos $I_1$ e $I_2$ del sistema y descomponemos los resultados en fracciones parciales para obtener

$$
\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{60s + 12{,}000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2} \\
I_2(s) &= \frac{12{,}000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}.
\end{aligned}
$$

Sacamos la transformada inversa de **Laplace** y las corrientes son

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t} \\
i_2(t) &= \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}.
\end{aligned}
$$

Obsdrvese que $i_1(t)$ e $i_2(t)$ en el ejemplo anterior tienden al valor $E/R = \frac{6}{5}$ cuando $t \to \infty$. Además, como la corriente que pasa por el **capacitor** es $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = 60te^{-100t}$, observamos que $i_3(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.