6. INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

6.1. Definiciones (ecuación diferencial parcial, orden y linealidad)

Son ecuaciones que involucran derivadas parciales de una función desconocida con dos o más variables independientes:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1 \qquad (2)\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y$$

$$(3)\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^3 + 6\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = x \qquad (4)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Una ED es **lineal** si es **lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas**, con coeficientes que dependen de las variables independientes. Las ecuaciones (1) y (2) son lineales, mientras las ecuaciones (3) y (4) no lo son.

6.2. Forma general de una ecuación diferencial parcial de segundo orden

Ecuaciones lineales La forma general de una **ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP)** con dos variables independientes, x y y, es

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G,$$

en que $A, B, C, \ldots,$ G son funciones de x y y. Cuando $G(x, y)$ 0, la ecuación se llama **homogénea;** en cualquier **otro** caso **es no homogénea.**

6.3. Clasificación de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden (elípticas, parabólicas e hiperbólicas)

Clasificación de las ecuaciones Una ecuación en derivadas parciales, lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes, puede pertenecer a uno de tres tipos generales. Esta clasificación sólo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Naturalmente, suponemos que al menos uno de los coeficientes A, B y C no es cero.

DEFINICIÓN 11.1 **Clasificación de las ecuaciones**

La ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

en donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, es

hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,

parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,

elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

EJEMPLO 3 **Clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden**

Clasifique las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a)}\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}\quad \text{(b)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\quad \text{(c)}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

SOLUCIÓN a) Escribimos esta ecuación como

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

e identificamos de esta forma los coeficientes: $A = 3$, $B = 0$ y $C = 0$. En vista de que $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica.

b) Rearreglamos la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

y vemos que $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ y $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$. La ecuación es hiperbólica.

c) Con $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, entonces $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$. La ecuación es elíptica. ■

La explicación detallada de por qué se **clasifican** las ecuaciones de segundo orden sale del propósito de este libro, pero la respuesta está en el hecho de que se desea resolver ecuaciones sujetas a ciertas **condiciones** que pueden ser de frontera o iniciales. El tipo de condiciones adecuadas para cierta ecuación depende de si es hiperbólica, parabólica o elíptica.

6.4. Método de solución de las ecuaciones diferenciales parciales (directos, equiparables con las ordinarias, separación de variables).

EJEMPLO 1 **EDP lineal homogénea**

La ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$ es homogénea, mientras que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$ es no homogénea. ■

Una **solución** de una ecuación en derivadas parciales con dos variables independientes x y y es una función $u(x, y)$ que posee todas las derivadas parciales que indica la ecuación y que la satisface en **alguna** región del plano xy.

Como dice la introducción a este capítulo, no pretendemos concentrarnos en los procedimientos de determinación de las soluciones generales de las ecuaciones en derivadas parciales. Desafortunadamente, para la mayor parte de las ecuaciones lineales de segundo orden -aun con las que tienen coeficientes **constantes**— no es **fácil** llegar a una solución. Sin embargo, las cosas no están tan mal como parecen porque casi siempre es posible, y bastante sencillo, hallar **soluciones particulares** de las ecuaciones lineales importantes que se originan en muchas aplicaciones.

Separación de variables Aunque hay varios métodos que pueden ensayarse para encontrar soluciones particulares (véase los problemas 28 y 29 de los ejercicios 11. 1), **sólo** nos interesara **uno: el método de Separación de variables.** Cuando se busca una solución particular en forma de un producto de una función de x por una función de y, como

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

a veces es posible convertir una ecuación en derivadas parciales, lineal con dos variables en dos ecuaciones diferenciales *ordinarias*. Para hacerlo notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = XY'$$

y que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

donde la "prima" denota derivación ordinaria.

EJEMPLO 2 **Separación de variables**

Determine las soluciones producto de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y}$. **(1)**

SOLUCIÓN Si $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la ecuación se transforma en

$$X''Y = 4XY'.$$

Dividimos ambos lados entre $4XY$, con lo cual separamos las variables:

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}.$$

Puesto que el lado izquierdo de esta ecuación es **independiente** de y e igual al **lado** derecho, que es independiente de x, llegamos a la **conclusión** que ambos lados son independientes ***tanto*** de x *como* de y. En otras palabras, cada lado de la ecuación debe ser una constante. En la práctica se acostumbra escribir esta constante *de separación* real como λ^2 o $-\lambda^2$. Distinguimos los tres casos siguientes.

CASO I Si $\lambda^2 > 0$, las dos igualdades

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda^2$$

dan $$X'' - 4\lambda^2 X = 0 \quad \text{y} \quad Y' - \lambda^2 Y = 0.$$

Estas ecuaciones tienen las soluciones siguientes:

$$X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \operatorname{senh} 2\lambda x \text{ y } Y = c_3 e^{\lambda^2 y},$$

respectivamente. Así, una solución particular de la ecuación es

$$\begin{aligned} u &= XY \\ &= (c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \operatorname{senh} 2\lambda x)(c_3 e^{\lambda^2 y}) \\ &= A_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + B_1 e^{\lambda^2 y} \operatorname{senh} 2\lambda x, \end{aligned} \quad \textbf{(2)}$$

en que $A_1 = c_1 c_3$ y $B_1 = c_2 c_3$

CASO II Si $-\lambda^2 < 0$, las dos igualdades

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda^2$$

equivalen a $$X'' + 4\lambda^2 X = 0 \quad \text{y} \quad Y' + \lambda^2 Y = 0$$

En vista de que las soluciones de estas ecuaciones son

$$X = c_4 \cos 2\lambda x + c_5 \operatorname{sen} 2\lambda x \quad \text{y} \quad Y = c_6 e^{-\lambda^2 y},$$

respectivamente, otra solución particular es

$$u = A_2 e^{-\lambda^2 y}\cos 2\lambda x + B_2 e^{-\lambda^2 y}\operatorname{sen} 2\lambda x, \tag{3}$$

en donde $A_2 = c_4c_6$ y $B_2 = c_5c_6$.

CASO III Si $\lambda^2 = 0$, entonces

$$X'' = 0 \qquad \text{y} \qquad Y' = 0.$$

En este caso $\qquad X = c_7x + c_8 \qquad \text{y} \qquad Y = c_9$

y entonces

$$u = A_3x + B_3, \tag{4}$$

en donde $A_3 = c_7c_9$ y $B_3 = c_8c_9$. ∎

Se deja como ejercicio comprobar que las ecuaciones **(2)**, (3) y (4) satisfacen la ecuación del ejemplo. (Véase el problema 30, en los ejercicios 11.1.)

La separación de variables no es un método general para hallar soluciones particulares; algunas ecuaciones diferenciales simplemente no son separables. El lector debe comprobar que la hipótesis $u = XY$ no conduce a una solución de $\partial^2u/\partial x^2 - \partial u/\partial y = x$.

Principio de superposición El teorema siguiente es análogo al teorema 4.2 y se denomina **principio de superposición.**

TEOREMA 11.1 Principio de superposición

Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son soluciones de una ecuación en derivadas parciales lineal homogénea, la combinación lineal

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k,$$

en que las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes, también es una solución.

En lo que resta del capítulo supondremos que siempre que haya un conjunto infinito

$$u_1, u_2, u_3, \ldots$$

de soluciones de una ecuación lineal homogénea, se puede construir otra solución, u, formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

en que las c_i, $i = 1, 2, \ldots$, son constantes.