

5. FRICCIÓN

Siempre que un objeto se mueve sobre una superficie o en un medio viscoso, hay una resistencia al movimiento debido a la interacción del objeto con sus alrededores. Dicha resistencia recibe el nombre de fuerza de fricción.

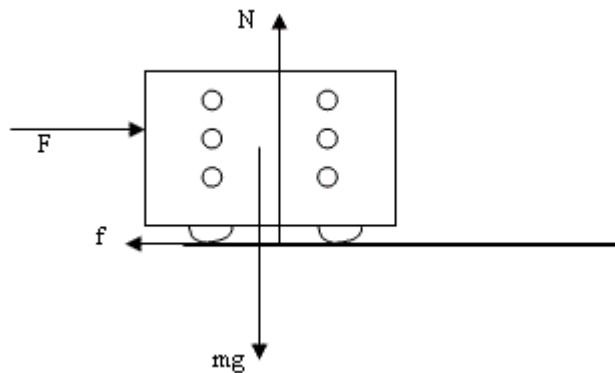
Las fuerzas de fricción son importantes en la vida cotidiana. Nos permiten caminar y correr. Toda fuerza de fricción se opone a la dirección del movimiento relativo.

Empíricamente se ha establecido que la fuerza de fricción cinética es proporcional a la fuerza normal N , siendo k la constante de proporcionalidad, esto es, $f = \mu_k N$.

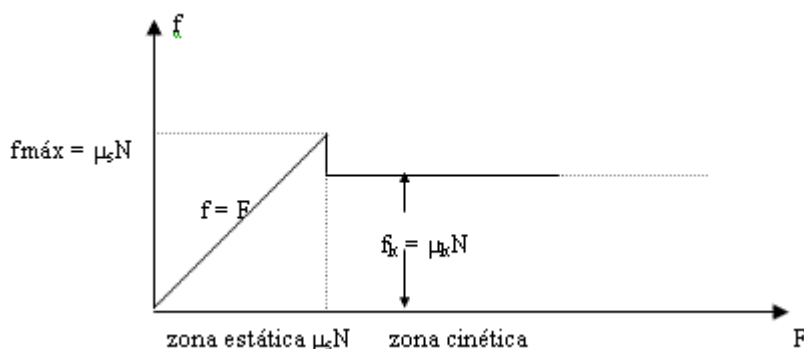
5.1. Fricción seca

Para ilustrar las fuerzas de fricción, suponga que intenta mover un pesado mueble sobre el piso. Ud. empuja cada vez con más fuerza hasta que el mueble parece "liberarse" para en seguida moverse con relativa facilidad.

Llamemos f a la fuerza de fricción, F a la fuerza que se aplica al mueble, mg a su peso y N a la fuerza normal (que el piso ejerce sobre el mueble).



La relación entre la fuerza F que se aplica y la fuerza de fricción puede representarse mediante el siguiente grafico:



Aumentemos desde cero la fuerza F aplicada. Mientras ésta se mantenga menor que cierto valor $\mu_s N$, cuyo significado se explica más abajo, el pesado mueble no se mueve y la fuerza de roce entre las patas del mueble y el piso es exactamente igual a la fuerza F aplicada. Estamos en la denominada "zona estática", en que $f = F$. Si continuamos aumentando la fuerza F alcanzaremos la situación en que $f = \mu_s N$, la máxima fuerza de fricción estática y el mueble parecerá "liberarse" empezando a moverse, pero esta vez con una fuerza de fricción llamada cinética y cuya relación con la fuerza normal es

$$f_k = \mu_k N \text{ (zona cinética)}$$

Donde μ_k es el coeficiente de roce cinético, que debe distinguirse del coeficiente de roce estático μ_s , mencionado mas arriba. μ_s se obtiene encontrando el cociente entre la máxima fuerza de roce (condición a punto de resbalar) y la fuerza normal. De ahí que $\mu_s N$ nos entrega el valor máximo de la fuerza de roce estático.

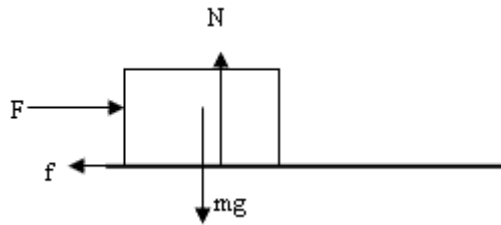
El coeficiente de roce estático es siempre mayor que el coeficiente de roce cinético. Los coeficientes de fricción estático y cinético para madera sobre madera, hielo sobre hielo, metal sobre metal (lubricado), hule sobre concreto seco, y las articulaciones humanas, están aquí descritos para esas determinadas superficies:

Superficie	Coeficiente fricción estático μ_s	Coeficiente fricción cinético μ_k
Madera sobre madera	0.4	0.2
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.07
Hule sobre concreto seco	1.0	0.5
Articulaciones en humanos	0.01	0.01

Ejemplo. Una caja de 10 kg descansa sobre un piso horizontal. El coeficiente de fricción estático es $\mu_s = 0.4$, y el de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$. Calcule la fuerza de fricción f que obra sobre la caja si se ejerce una fuerza horizontal externa F cuya magnitud es a) 10 N, b) 38N, c) 40 N.

SOLUCION:

El diagrama de cuerpo libre o de cuerpo aislado es:



Como $N - mg = 0 \rightarrow N = mg = 98 \text{ N}$

1. La fuerza de fricción estática se opone a cualquier fuerza aplicada, hasta llegar a un máximo $\mu_s N = (0.4)(98\text{N}) = 39.2 \text{ N}$. Como la fuerza aplicada es $F = 10 \text{ N}$, la caja no se moverá y $f = F = 10 \text{ N}$.
2. Todavía la fuerza de 38 N no supera los 39.2 N , la fuerza de fricción habrá aumentado a 38 N , $f = 38 \text{ N}$.
3. Una fuerza de 40 N hará que la caja comience a moverse, porque es mayor que la fuerza máxima de fricción estática, 39.2 N . En adelante se tiene fricción cinética, en lugar de fricción estática y la magnitud de la fricción cinética es $\mu_k N = 0.3(98\text{N}) = 29 \text{ N}$. Si la fuerza aplicada continúa siendo $F = 40 \text{ N}$, la aceleración que experimentará la caja será **$(40\text{N} - 29\text{N})/10\text{kg} = 1.1 \text{ m/s}^2$**

5.1.1. Leyes de la fricción seca

Las leyes de fricción seca se pueden ejemplificar por medio del siguiente experimento. Un bloque de peso W se coloca sobre una superficie horizontal plana (figura 2.6^a). Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso W y la reacción de la superficie tampoco tiene una componente horizontal; por lo tanto, la reacción es normal a la superficie y esta representada por N en la figura 2.6^a. Ahora, supóngase que se aplica sobre el bloque una fuerza horizontal P (figura 2.6b). Si P es pequeña, el bloque no se moverá; por lo tanto, debe existir alguna otra fuerza horizontal, la cual equilibra a P . Esta otra fuerza es la fuerza de fricción estática F , la es en realidad resultante de un gran numero de fuerzas que actúan sobre toda la superficie de contacto entre el bloque y el plano. No se conoce con exactitud la naturaleza de estas fuerzas, pero generalmente se supone que las mismas se deben a irregularidades de las superficies en contacto y, en cierta medida, a la atracción molecular.

Si se incrementa la fuerza P , también se incrementa la fuerza de fricción F , la cual continua oponiéndose a P , hasta que su magnitud alcanza un cierto valor máximo

F_m (figura 2.6c). Si P se incrementa aun mas, la fuerza de fricción ya no la puede equilibrar y el bloque comienza a deslizarse. Tan pronto comience a moverse el bloque, la magnitud de F disminuye a F_k a un valor menor de F_m . Lo anterior debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se mueven una con respecto de la otra. A partir del momento en el que el bloque comienza a moverse, esta continúa deslizándose con una velocidad que va aumentando mientras que la fuerza de fricción cinética, permanece aproximadamente constante.

La evidencia experimental muestra que el máximo valor F_m de la fuerza de fricción estática es proporcional a la componente normal N de la reacción de la superficie. Así, se tiene que

$$F_m = \mu_s * N$$

Donde μ_s es una constante denominada el coeficiente de fricción estática. Similarmente la magnitud F_k de la fuerza de fricción cinética puede expresarse en la forma

$$F_k = \mu_k * N$$

Donde μ_k es una constante denominada el coeficiente de fricción cinética. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k no dependen del área de las superficies en contacto. Sin embargo, ambos coeficientes dependen notoriamente de la naturaleza de las superficies en contacto. Como dichos coeficientes también dependen de la condición exacta de las superficies, sus valores raras veces se conocen con una presión superior al 5 por ciento. En la tabla 8.1 se proporcionan valores aproximados de coeficientes de fricción estática para distintas superficies secas. Los valores correspondientes del coeficiente de fricción cinética serian alrededor de un 25 por ciento menores. Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto con las unidades de SI o con las unidades del sistema de uso común en los Estados Unidos.

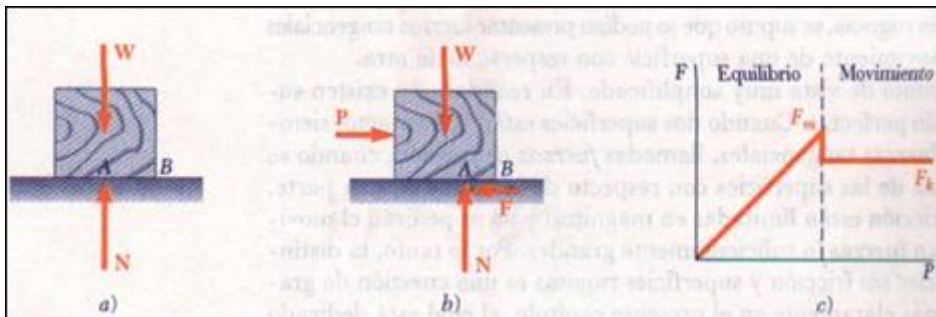


Figura 2.6

Tabla 8.1 Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas

Metal sobre metal
0.15 – 0.60

Metal sobre madera
0.20 – 0.60

Metal sobre piedra
0.30 – 0.70

Metal sobre cuero
0.30 – 0.60

Madera sobre madera
0.25 – 0.50

Madera sobre cuero
0.25 – 0.50

Piedra sobre piedra
0.40 – 0.70

Tierra sobre tierra
0.20 – 1.00

Hule sobre concreto
0.60 – 0.90

A partir de la descripción que se proporciono en los párrafos anteriores, resulta evidente que pueden ocurrir cuatro situaciones diferentes cuando un cuerpo rígido esta en contacto con una superficie horizontal.

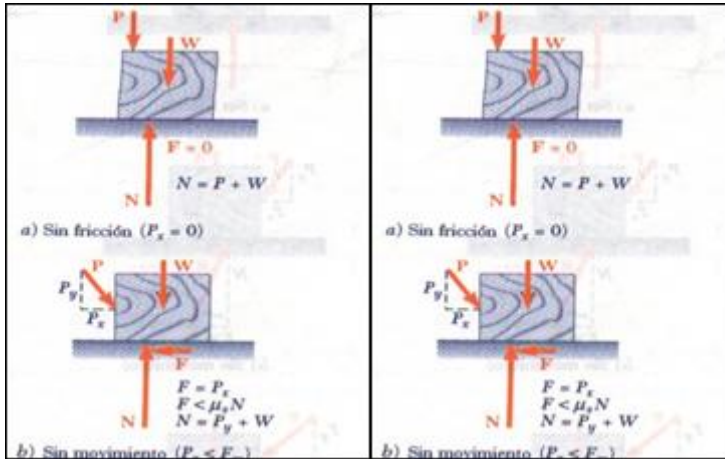
Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tratan de hacer que este se mueva a lo largo de la superficie de contacto; por lo tanto, no hay fuerzas de fricción (figura 2.7^a).

Las fuerzas aplicadas tienden a mover al cuerpo a lo largo de la superficie de contacto pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción F que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que F ha alcanzado su máximo valor, no se puede utilizar la ecuación $F_m = \mu_s \cdot N$ para determinar las fuerzas de fricción (figura 2.7b)

Las fuerzas aplicadas son tales que el cuerpo esta a punto de comenzar a deslizarse. Se dice que el movimiento es inminente. La fuerza de fricción F ha alcanzado su máximo valor F_m y, junto con la fuerza normal N , equilibra las fuerzas aplicadas. Se pueden utilizar tanto las ecuaciones de equilibrio como la

ecuación $F_m = \mu_s \cdot N$. También se debe señalar que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 2.7c).

El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora F es igual a F_k y se puede utilizar la ecuación $F_k = \mu_k \cdot N$. El sentido de F_k es opuesto al sentido del movimiento (figura 2.7d).

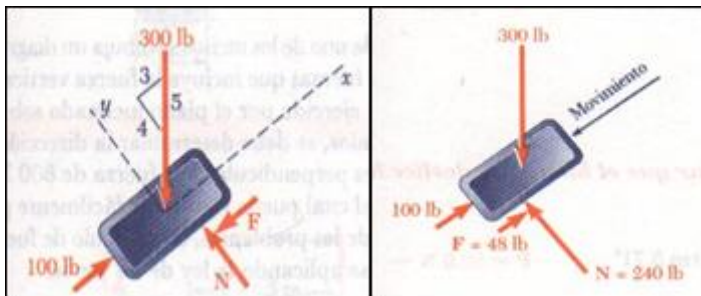


Figuras 2.7

Problema resuelto 2.6



Como se muestra en la figura, una fuerza de 100 lb actúa sobre un bloque de 300 lb que está colocado sobre un plano inclinado. Los coeficientes de fricción entre el bloque y el plano son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Determine si el bloque está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción.



Solución:

Fuerza requerida para mantener el equilibrio. Primero se determina el valor de la fuerza de fricción requerida para mantener el equilibrio. Suponiendo que F esta dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque y se escribe

$$+ \sum F_x = 0 \quad 100 \text{ lb} - (3/5)(300 \text{ lb}) - F = 0$$

$$F = -80 \text{ lb} \quad F = 80 \text{ lb}$$

$$+ \sum F_y = 0 \quad N - (3/5)(300 \text{ lb}) = 0$$

$$N = +240 \text{ lb} \quad N = 240 \text{ lb}$$

La fuerza F requerida para mantener el equilibrio es una fuerza de 80 lb dirigida hacia arriba y hacia la derecha; por lo tanto, el bloque tiende a moverse hacia abajo a lo largo del plano.

Máxima fuerza de fricción. La magnitud de la fuerza de fricción que puede desarrollarse es

$$F_m = \mu_s N \quad F_m = 0.25(240 \text{ lb}) = 60 \text{ lb}$$

Como el valor de la fuerza requerida para mantener el equilibrio (80 lb) es mayor que el valor máximo que se puede obtener (60 lb), no se mantendrá el equilibrio y el bloque se deslizará hacia abajo a lo largo del plano.

Valor real de la fuerza de fricción. La magnitud de la máxima fuerza de fricción que se tiene realmente se determina de la siguiente forma:

$$F_{\text{actual}} = F_k = \mu_k N$$

$$= 0.20(240 \text{ lb}) = 48 \text{ lb}$$

El sentido de esta fuerza es opuesto al sentido del movimiento; por lo tanto, la fuerza esta dirigida hacia arriba y hacia la derecha:

$F_{\text{actual}} = 48 \text{ lb}$

Se debe señalar que las fuerzas que actúan sobre el bloque no están en equilibrio; la resultante de dichas fuerzas es

$$(3/5)(300 \text{ lb}) - 100 \text{ lb} - 48 \text{ lb} = 32 \text{ lb}$$

5.1.2. Coeficiente de fricción

En esta exposición se hablara de algunos conceptos básicos previos al tema de coeficientes de fricción. En esta primera parte se hablara de los siguientes conceptos:

Cinemática: (del griego kinema, movimiento) que estudia el movimiento en si mismo sin preocuparse para la causa que lo produce.

Pero en cambio hay unos conceptos o una parte de la cinemática que ayuda a estudiar el movimiento o inmovilidad en los cuerpos.

Dinámica: (del griego dinamis, fuerza) la cual se ocupa de las causas que originan el movimiento, es decir de que lo mas tarde llamaremos las fuerzas de la naturaleza.

Estática: (del griego, statos, inmóvil) es la que se ocupa de estudiar el estado de equilibrio o reposo de los cuerpos.

Otro punto importante que nos ayudara en el estudio es la segunda ley de newton que dice:

“la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza exterior resultante que actúa sobre el cuerpo, y tiene la misma dirección y sentido que dicha fuerza.”

Ya que afirma que cuando la fuerza resultante no es nula, el cuerpo se mueve con movimiento acelerado. La aceleración, para una fuerza dada, depende de una propiedad del cuerpo llamada masa.

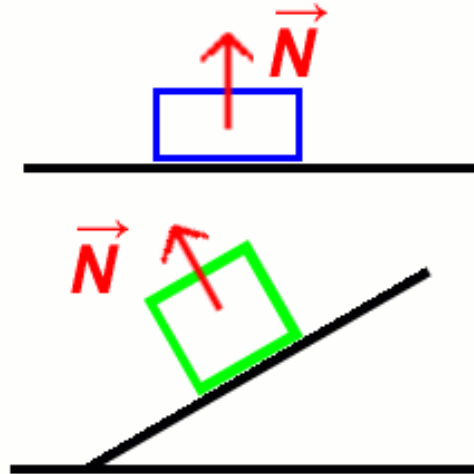
Para continuar ahora se estudiaran los conceptos de fricción y las leyes

Como sabemos dentro de los cuerpos existen una serie de fuerzas que actúan sobre el, la física se a encargado del estudio de las misma y como consecuencia de ello, existió un científico de nombre Isaac Newton quien postulo las tres que nos permiten estudiar el movimiento de los cuerpos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos. Es necesario que conozcamos cuáles son las fuerzas que actúan sobre los cuerpos. Vamos a comentar brevemente las principales fuerzas que podemos encontrarnos al estudiar el movimiento de un cuerpo.

1.- **El peso:** es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre los cuerpos que hay sobre ella. En la mayoría de los casos se puede suponer que tiene un valor constante e igual al producto de la masa, m , del cuerpo por la

aceleración de la gravedad, g , cuyo valor es 9.8 m/s^2 y está dirigida siempre hacia el suelo.

2.- Cuando un cuerpo está apoyado sobre una superficie ejerce una fuerza sobre ella cuya dirección es perpendicular a la de la superficie. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la superficie debe ejercer sobre el cuerpo una fuerza de la misma magnitud y de sentido contrario. Esta que denominamos **Normal** representamos con N .



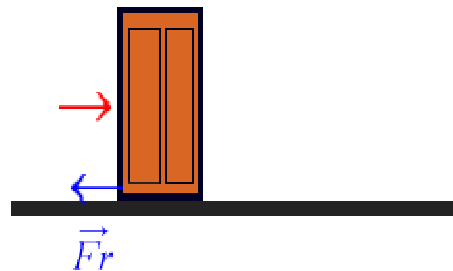
Dentro de nuestro estudio, una fuerza extra llama fricción o rozamiento y

tema de nuestro estudio la abordaremos de una manera más amplia:

esta también fuerza de como esta es el

FUERZA DE FRICCIÓN O ROZAMIENTO

Se define a la fricción como una fuerza resistente que actúa sobre un cuerpo, que impide o retarda el deslizamiento de este respecto a otro o en la superficie que este en contacto. Esta fuerza es siempre tangencial a la superficie en los puntos de contacto con el cuerpo, y tiene un sentido tal que se opone al movimiento posible o existente del cuerpo respecto a esos puntos. Por otra parte estas fuerzas de fricción están limitadas en magnitud y no impedirán el movimiento si se aplican fuerzas lo suficientemente grandes.



Esta fuerza es la causante, por ejemplo, de que podamos andar (cuesta mucho más andar sobre una superficie con poco rozamiento, hielo, por ejemplo, que por una superficie con rozamiento como, por ejemplo, un suelo rugoso).

La experiencia nos muestra que:

- la fuerza de rozamiento entre dos cuerpos **no depende** del **tamaño de la superficie de contacto entre los dos cuerpos**, pero **sí depende** de cual sea la **naturaleza de esa superficie de contacto**, es decir, de que materiales la formen y si es más o menos rugosa.
- la magnitud de la fuerza de rozamiento entre dos cuerpos en contacto es **proporcional** a la **normal** entre los dos cuerpos, es decir:

$$F_r = m \cdot N$$

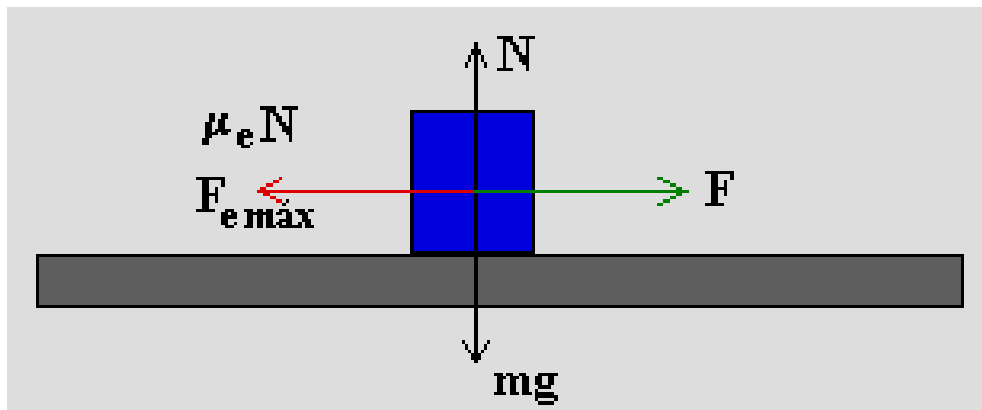
Donde m es lo que conocemos como **coeficiente de FRICION**

Existe rozamiento incluso cuando no hay movimiento relativo entre los dos cuerpos que están en contacto. Hablamos entonces de **Fuerza de FRICCIÓN estática**. Por ejemplo, si queremos empujar un armario muy grande y hacemos una fuerza pequeña, el armario no se moverá. Esto es debido a la fuerza de rozamiento estática que se opone al movimiento. Si aumentamos la fuerza con la que empujamos, llegará un momento en que superemos esta fuerza de rozamiento y será entonces cuando el armario se pueda mover. Una vez que el cuerpo empieza a moverse, hablamos de **fuerza de rozamiento dinámica**. Esta fuerza de rozamiento dinámica es **menor** que la fuerza de rozamiento estática., podemos así establecer que hay dos coeficientes de rozamiento: el **estático**, m_e , y el **cinético**, m_c , siendo el primero mayor que el segundo:

$$\mu_e > \mu_c$$

Fuerza de fricción estática.

Existe una fuerza de fricción entre dos objetos que no están en movimiento relativo. Tal fuerza se llama fuerza de fricción estática. En la siguiente figura aplicamos una fuerza F que aumenta gradualmente, pero el bloque permanece en reposo. Como en todos estos casos la aceleración es cero, la fuerza F aplicada es igual y opuesta a la fuerza de fricción estática F_e , ejercida por la superficie.



La máxima fuerza de fricción estática $F_{e\text{ máx}}$, corresponde al instante en que el bloque está a punto de deslizar. Los experimentos demuestran que:

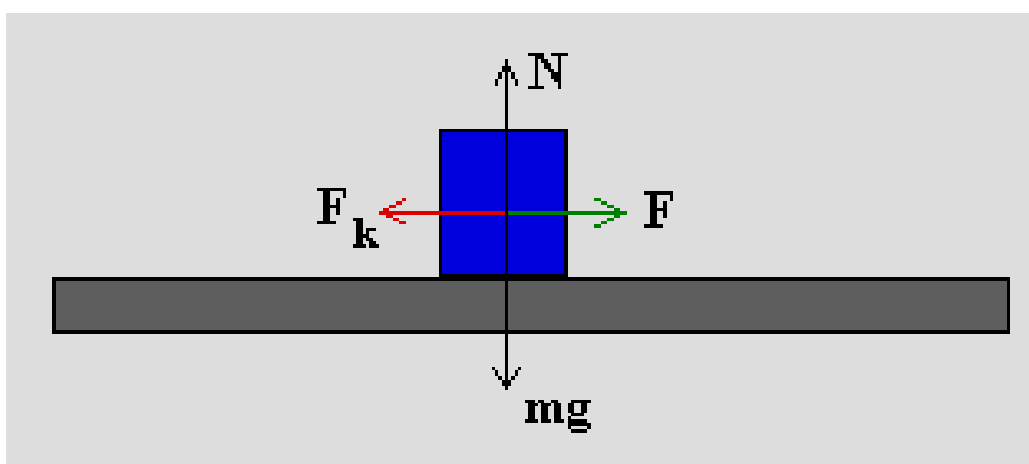
$$F_{e\text{ máx}} = m_e N$$

Donde la constante de proporcionalidad se denomina coeficiente de fricción estática. Por tanto, la fuerza de fricción estática varía, hasta un cierto límite para impedir que una superficie se deslice sobre otra:

$$F_{e\text{ máx}} \leq m_e N$$

Fuerza de fricción cinética

En la siguiente figura mostramos un bloque de masa m que se desliza por una superficie horizontal con velocidad constante. Sobre el bloque actúan tres fuerzas: el peso mg , la fuerza normal N , y la fuerza de fricción F_k entre el bloque y la superficie. Si el bloque se desliza con velocidad constante, la fuerza aplicada F será igual a la fuerza de fricción F_k .



Podemos ver que si duplicamos la masa m , se duplica la fuerza normal N , la fuerza F con que tiramos del bloque se duplica y por tanto F_k se duplica. Por tanto la fuerza de fricción cinética F_k es proporcional a la fuerza normal N .

$$F_k = m_k N$$

La constante de proporcionalidad m_k es un número sin dimensiones que se denomina coeficiente de fricción cinético.

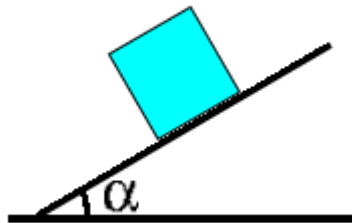
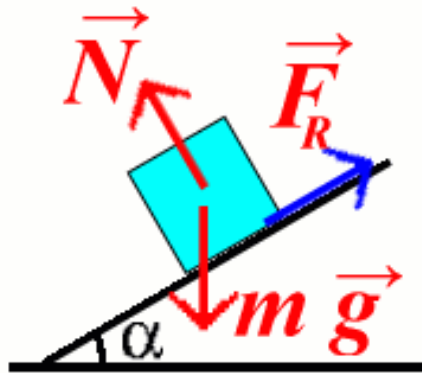
MATERIAL	μ_s	μ_k
Madera sobre madera	0.7	0.4
Acero sobre acero	0.15	0.09
Metal sobre cuero	0.6	0.5
Madera sobre cuero	0.5	0.4
Caucho sobre concreto, seco	0.9	0.7
húmedo	0.7	0.57

MOVIMIENTO CON FRICCIÓN

Vamos a considerar un cuerpo de masa m que está sobre un plano inclinado tal como se muestra en el dibujo. Supondremos que existe rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado y vamos a tratar de calcular la aceleración con la que

se mueve el cuerpo. Sobre el cuerpo no aplicamos ninguna fuerza por lo que, en principio, el cuerpo caerá hacia abajo por el plano inclinado.

Lo primero que tenemos que hacer es dibujar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y que son:



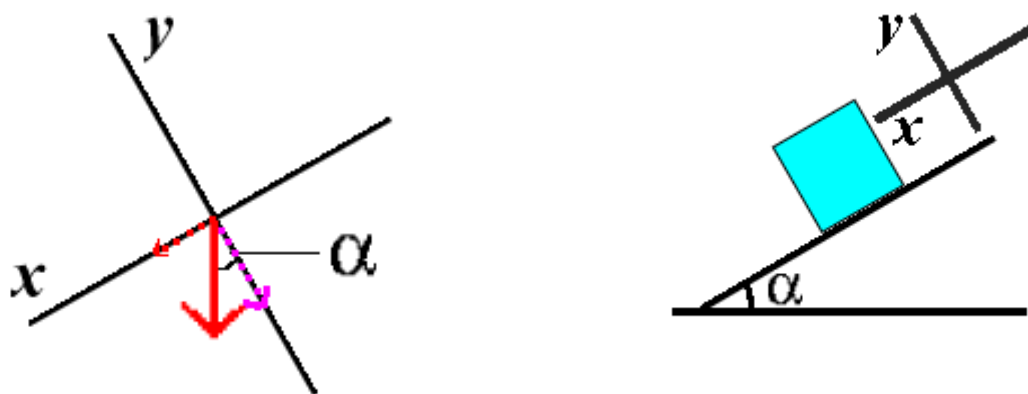
- Fuerza PESO, dirigida hacia el suelo, tal como se muestra en la figura. La fuerza peso siempre está dirigida hacia el suelo.
- Fuerza NORMAL, en dirección perpendicular al plano inclinado, que es la superficie de apoyo del cuerpo, tal como se puede ver en el dibujo.
- [FUERZA DE FRICION](#), paralela al plano inclinado (la superficie de contacto) y dirigida hacia arriba del plano ya que estamos suponiendo que el cuerpo se mueve hacia abajo.

Una vez que tenemos todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, el siguiente paso consiste en dibujar el Diagrama de cuerpo libre, aunque en este caso, al haber sólo un cuerpo, podemos usar como diagrama el dibujo anterior en el que hemos dibujado todas las fuerzas.

Pasamos ahora a elegir el sistema de referencia. Para facilitar el cálculo conviene **elegir unos ejes de coordenadas de manera que uno de ellos tenga la dirección del movimiento**. En este caso vamos a tomar el eje x paralelo al plano

inclinado y el eje y perpendicular al plano inclinado tal como se muestra en el dibujo. Como sentido positivo del eje x tomaremos el sentido hacia abajo del plano inclinado (normalmente se toma el sentido del movimiento del cuerpo) y para el eje y hacia arriba de la superficie del plano inclinado.

Una vez elegido los ejes de coordenadas que vamos a utilizar, vamos a escribir la [SEGUNDA LEY DE NEWTON](#) para cada uno de los ejes. En este caso, tal como podemos ver en los dibujos, la fuerza peso tiene componentes, tanto en el eje x como en el eje y. En el dibujo vemos como determinar las componentes del peso. El ángulo que forma el peso con el eje y es el ángulo del plano inclinado. De esta manera, la componente y del peso se obtiene multiplicando el módulo del vector por el coseno del ángulo y la componente x se obtiene multiplicando por el seno del ángulo.



Veamos ahora la Segunda ley de Newton para cada uno de los ejes. Comenzaremos por el eje y. Las fuerzas que actúan en esta dirección son la Normal y la componente y del peso. La primera tiene sentido positivo y la segunda sentido negativo de acuerdo con el criterio de signos que estamos usando. Tenemos entonces:

$$N - m \cdot g \cdot \cos \alpha = m \cdot a_y = 0$$

Igual que en el ejemplo anterior, la aceleración en la dirección y es cero puesto que el cuerpo no se va a separar del plano inclinado. Podemos despejar el valor de la Normal, obteniendo que es igual a la componente y del peso:

$$N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

En el eje x las fuerzas que actúan son la componente x del peso y la fuerza de rozamiento. La primera tiene sentido positivo y la segunda tendrá sentido negativo. De esta manera, aplicando la Segunda ley de Newton obtenemos la siguiente ecuación:

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_r = m \cdot a$$

donde hemos llamado a a la aceleración en el eje x ya que hemos visto que no hay aceleración en la dirección y. Como vimos al hablar de la [fuerza de rozamiento](#), esta es igual al producto del coeficiente de rozamiento, μ , por la normal. Escribiendo esto en la ecuación anterior obtenemos:

$$m \cdot g \cdot \text{sena} - m \cdot N = m \cdot a$$

Como ya hemos obtenido anteriormente que la normal es igual a la componente y del peso, sustituyendo en la ecuación nos queda:

$$m \cdot g \cdot \text{sena} - m \cdot m \cdot g \cdot \text{cosa} = m \cdot a$$

De aquí podemos despejar la aceleración con la que se moverá el cuerpo y que es:

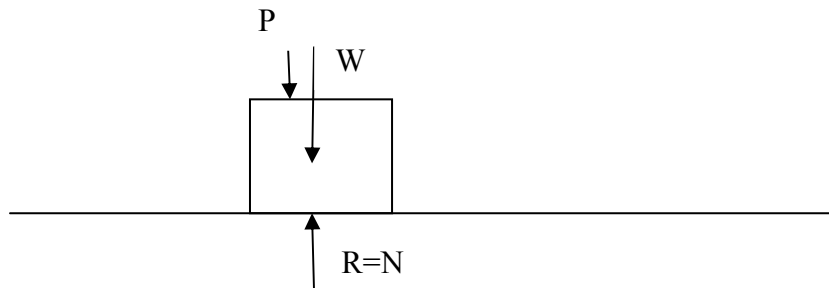
$$a = g \cdot (\text{sena} - n \text{ cosa})$$

Con lo que hemos obtenido la aceleración con la que se mueve el cuerpo tal como pretendíamos al principio.

Vemos que, como era de esperar, la aceleración con la que cae el cuerpo depende del coeficiente de rozamiento. Hay un valor de dicho coeficiente de rozamiento para el cual el cuerpo no caerá y se quedará quieto en el plano inclinado. Dejamos para el lector el cálculo de ese valor. ¿Qué pasa si el coeficiente de rozamiento es mayor que el valor calculado antes? ¿Se moverá el cuerpo hacia arriba? De nuevo, dejamos que sea el lector quién obtenga la respuesta. (Ayuda: Repasar el apartado fuerza de rozamiento)

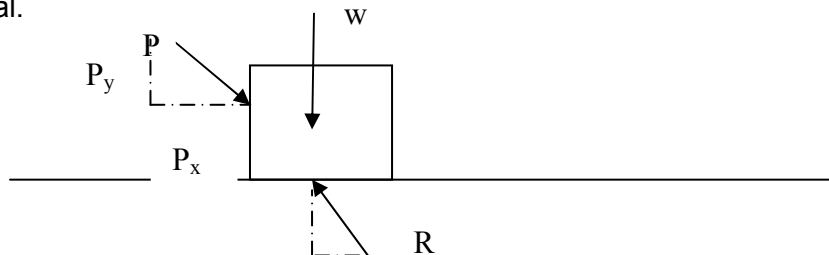
5.1.3. Ángulo de fricción

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal N y la fuerza de rozamiento F por una resultante R . Consideraremos nuevamente un bloque de peso W que descansa sobre una superficie horizontal. Sin o se aplica fuerza en el bloque, la resultante R se reduce a una fuerza normal N



Sin fricción

Sin embargo la fuerza aplicada P tiene una componente horizontal P_x que tiende a mover el bloque, la fuerza R tendrá una componente horizontal F , y así formará cierto ángulo vertical.



Si se aumenta P hasta que el movimiento sea inminente, el ángulo de entre R y la vertical se incrementa y alcanza un valor máximo. Este valor se llama

ángulo de rozamiento estático y se denota por ϕ_s . De la geometría tenemos que:

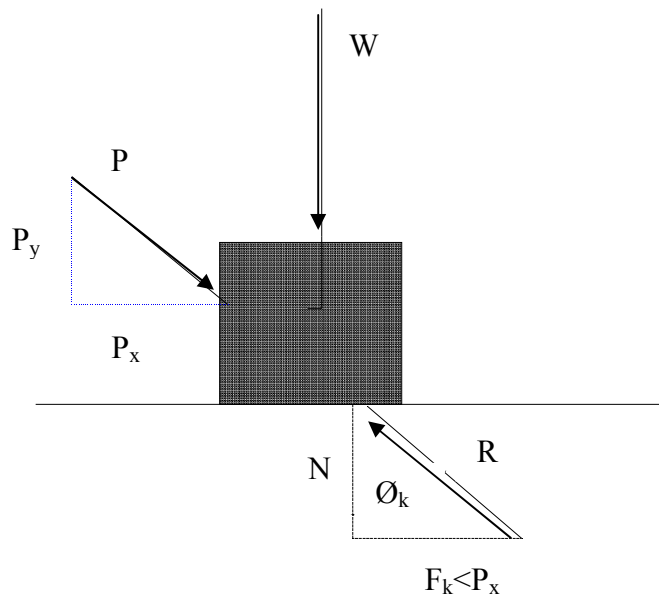
$$\tan \Phi_s = \frac{F_n}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$

$$\tan \Phi_s = \mu_s$$

Si en efecto el movimiento se realiza, la magnitud de la fuerza de rozamiento disminuye F_k ; análogamente el ángulo entre R y N disminuye a un valor menor ϕ_k llamado ángulo de rozamiento cinético: por lo tanto podemos escribir

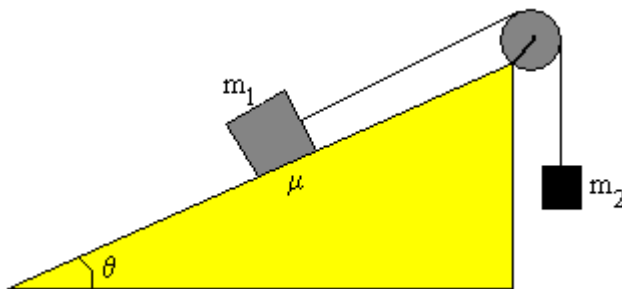
$$\tan \Phi_k = \frac{F_n}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$

$$\tan \Phi_k = \mu_k$$



5.2. Análisis del plano inclinado

Un bloque de masa m_1 se sitúa sobre un plano inclinado de ángulo θ . El bloque está conectado a otro bloque de masa m_2 que cuelga de su otro extremo mediante una cuerda inextensible que pasa por una polea ideal (de rozamiento y momento de inercia despreciables). Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque de masa m_1 y el plano inclinado es μ , estudiar el movimiento del sistema.



Por razón de simplicidad, supondremos que los coeficiente estático y cinético tienen el mismo valor μ .

Descripción

Tenemos analizar dos posibles situaciones

1. Cuando el bloque de masa m_1 está en movimiento
2. Cuando el bloque de masa m_1 está en reposo sobre el plano inclinado

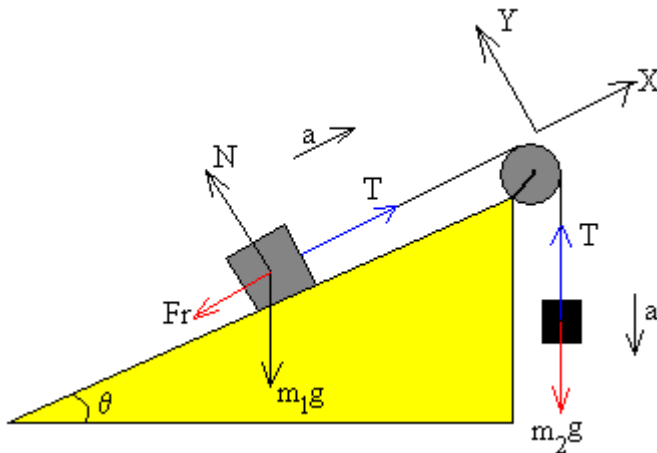
Para dibujar de forma correcta el sentido de la fuerza de rozamiento, se ha de tener en cuenta que:

- Cuando el bloque desliza, la fuerza de rozamiento es siempre de sentido contrario al vector velocidad.

- Si el bloque de masa m_1 está en reposo, la fuerza de rozamiento es de sentido contrario a la resultante de las otras fuerzas que actúan sobre el bloque.

1. El bloque de masa m_1 desliza sobre el plano inclinado

- Movimiento del bloque a lo largo del plano, hacia arriba



La ecuación del movimiento del bloque que cuelga de masa m_2 es
 $m_2g - T = m_2a$

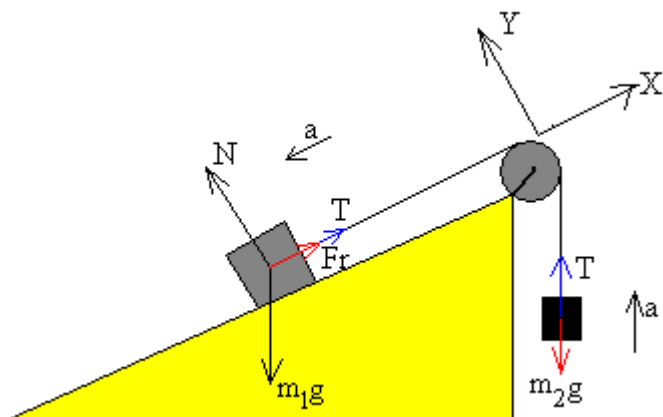
La ecuación del movimiento del bloque de masa m_1 que desliza hacia arriba es
 $T - m_1g \cdot \sin\theta - Fr = m_1a$

La reacción del plano vale $N - m_1g \cdot \cos\theta = 0$
 y la fuerza de rozamiento $Fr = \mu \cdot N$

Despejamos la aceleración a

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin\theta - \mu m_1 \cos\theta}{m_2 + m_1}$$

- Movimiento del bloque a lo largo del plano, hacia abajo



La fuerza de rozamiento cambia de sentido. Cambiamos el signo la fuerza de rozamiento en la fórmula de la aceleración

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \theta + \mu m_1 \cos \theta}{m_2 + m_1}$$

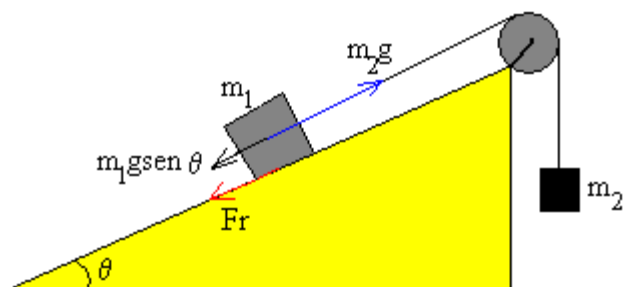
Alternativamente, podemos volver a plantear las ecuaciones del movimiento a partir del esquema de la figura.

2. El bloque de masa m_1 está en reposo sobre el plano inclinado

En este caso la tensión de la cuerda es igual al peso $T = m_2 g$

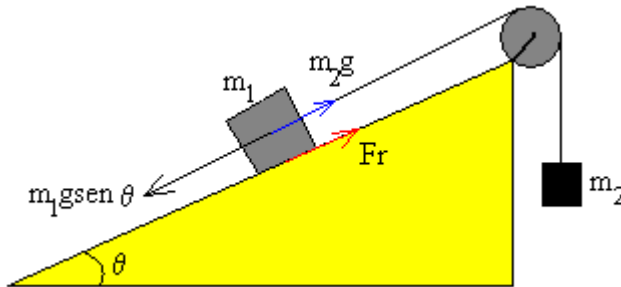
La fuerza de rozamiento se opone a la resultante de las otras dos fuerzas opuestas:

- la tensión de la cuerda $m_2 g$
- la componente del peso $m_1 g \sin \theta$



La componente del peso es menor que la tensión de la cuerda, la fuerza de rozamiento se opone a que el cuerpo se mueva a lo largo del plano inclinado hacia arriba.

Si $m_2 g > m_1 g \sin \theta$ entonces $m_2 g - m_1 g \sin \theta - F_r = 0$ (1)



La componente del peso es mayor que la tensión de la cuerda, la fuerza de rozamiento se opone a que el cuerpo se mueva hacia abajo.

Si $m_2g < m_1g\text{sen}\theta$ entonces $m_2g - m_1g\text{sen}\theta + F_r = 0$ (2)

La fuerza de rozamiento es nula para el ángulo θ que cumple que $m_2g = m_1g\text{sen}\theta$.

3. Cuando el bloque de masa m_1 empieza a deslizarse a lo largo del plano

Variando el ángulo de inclinación θ del plano inclinado llega un momento en el que el bloque empieza a deslizarse, en ese momento la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo

$$F_r = \mu N = \mu m_1 g \cos\theta$$

Vamos a determinar el o los ángulos de plano inclinado para los cuales el bloque de masa m_1 va a empezar a deslizarse a lo largo de dicho plano

Llamando $m = m_2/m_1$, la ecuación de equilibrio de fuerzas (1) se escribe

$$m - \text{sen}\theta - \mu \cos\theta = 0$$

Teniendo en cuenta que $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$. Despejando $\cos\theta$ y elevando al cuadrado, nos queda la ecuación de segundo grado en $\text{sen}\theta$.

$$(1 + \mu^2)\text{sen}^2\theta - 2m\text{sen}\theta + (m^2 - \mu^2) = 0$$

La misma ecuación de segundo grado se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio de fuerzas (2)

$$\text{sen}\theta = \frac{m \pm \mu \sqrt{1 - m^2 + \mu^2}}{1 + \mu^2}$$

La ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales siempre que el discriminante sea positivo

$$1 - m^2 + \mu^2 \geq 0.$$

Para que las dos raíces reales sean positivas se tiene que cumplir que la raíz más pequeña sea positiva, esto es

$$m \geq \mu \sqrt{1 - m^2 + \mu^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos la desigualdad equivalente $m \geq \mu$

- El discriminante es siempre positivo para $m < 1$ es decir, para $m_2 < m_1$
- En cambio, si $m > 1$, es decir, si $m_2 > m_1$ las raíces reales existen si $\mu^2 \geq m^2 - 1$

5.3. Aplicaciones

5.3.1. Cuñas

LA CUÑA

Definición Una cuña es un elemento de máquina que se coloca en la interfase entre el eje y la maza de una pieza que transmite potencia con el fin de transmitir torque. La cuña es desmontable para facilitar el ensamble y desarmado del sistema de eje. Se instala dentro de una ranura axial que se maquina en el eje, la cual se denomina cuñero. A una ranura similar en la maza de la pieza que transmite potencia se le da el nombre de asiento de la cuña, si bien, propiamente, es también un cuñero. Tipos de Cuñas • Cuñas Paralelas Cuadradas y Rectangulares El tipo más común de cuñas para ejes de hasta 6 ½" de diámetro es la cuña cuadrada. La cuña rectangular se sugiere para ejes largos y se utiliza en ejes cortos donde puede tolerarse una menor altura. Tanto la cuña cuadrada como la rectangular se denominan cuñas paralelas porque la parte superior, la inferior y los lados de la cuña son todos paralelos. Los cuñeros y la maza en el eje se diseñan de tal manera que exactamente la mitad de la altura de la cuña se apoye en el lado del cuñero del eje y la otra mitad en el lado del cuñero de la maza. • Cuñas ahusadas y cuñas o chavetas de cabeza Las cuñas ahusadas están diseñadas para insertarse desde el extremo del eje después que la maza esta en su sitio en lugar de instalar la cuña primero y después deslizar la maza sobre la cuña como sucede con las cuñas paralelas. El ahusado se extiende, cuando menos, a lo largo de la longitud de la maza y la altura medida desde el extremo de la maza es la misma que para la cuña paralela. Por lo general el ahusado es de 1/8" por pie. La cuña o chaveta de cabeza tiene una geometría ahusada dentro de la maza que es la misma que la cuña ahusada simple. Pero la cabeza alargada permite extraer la cuña desde el mismo extremo en que instaló. Esto es muy deseable si el extremo expuesto no está accesible para extraer la cuña. • Cuñas Woodruff Donde se desean ensamble y desarmado relativamente sencillos así como una carga ligera debe considerarse una cuña Woodruff. La ranura circular en el eje mantiene la cuña en su sitio en tanto la pieza que embona se desliza sobre la cuña. Selección e instalación de cuñas y cuñeros La cuña y el cuñero para una aplicación específica casi siempre se diseñan después que se ha especificado el diámetro de eje. Por lo general la longitud de la cuña se especifica como una parte sustancial de la longitud de la maza de la pieza que se instala para dar margen a una alineación satisfactoria y una operación estable. Pero si el cuñero en el eje debe

estar cerca de otros cambios geométricos como chaflanes de los hombros y ranuras para anillos de sujeción, es importante prever cierto espaciamiento axial entre ellos de manera que los efectos de las concentraciones de tensión no se multipliquen. La cuña puede cortarse a escuadras en los extremos, o bien, se le asigna un radio en cada extremo cuando se instala en un cuñero de perfil para mejorar su ubicación. Las cuñas que se cortan a escuadra se utilizan, por lo general, con el tipo de cuñero de corredera deslizante. En ocasiones la cuña se mantiene en su sitio mediante un tornillo de ajuste en la maza sobre la cuña. Sin embargo, la confiabilidad de este método es cuestionable debido a la posibilidad de que el tornillo de ajuste presente retroceso con la consecuente vibración del ensamble. Es necesario prever la ubicación axial del ensamble por medios más positivos como hombros, anillos de sujeción o separador.

Cuñas paralelas cuadradas y rectangulares. El tipo más común de las cuñas para ejes de hasta 6 1/2" de diámetro es la cuña cuadrada. La cuña rectangular se sugiere para ejes largos y se utiliza en ejes cortos donde puede tolerarse una menor altura. Tanto la cuña cuadrada como la rectangular se denominan cuñas paralelas porque la parte superior, la inferior y los lados de la cuña son todos paralelos. Los cuñeros y la maza en el eje se diseñan de tal manera que exactamente la mitad de la altura de la cuña se apoye en el lado del cuñero del eje, y la otra mitad en el lado del cuñero de la maza. El ancho de la cuña cuadrada es o plana es generalmente una cuarta parte del diámetro del eje. Estas cuñas pueden ser rectas o ahusadas aproximadamente 1/8" por pie. Cuando es necesario tener movimiento axial relativo entre el eje y la parte acoplada se usan cuñas y ranuras. Existen normas ASME y ASA para los dimensionamientos de la cuña y de la ranura.

Cuñas de Woodruff Una cuña Woodruff es un segmento de disco plano con un fondo que puede ser plano o redondeado. Se le especifica siempre mediante un número, cuyo dos últimos dígitos indican el diámetro nominal en octavos de pulgadas, mientras que los dígitos que preceden a los últimos dan el ancho nominal en treintidosavos de pulgada. Figura 1. Corte transversal de eje con cuña Woodruff

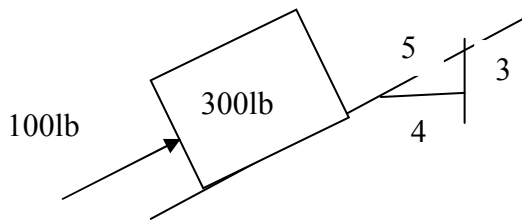
Figura 2. Ensamble de un eje con pasador y una chaveta Woodruff

Cuñas ahusadas y cuñas de cabeza Las cuñas ahusadas están diseñadas para insertarse desde el extremo del eje después que la maza está en su sitio en lugar de instalar la cuña primero y después deslizar la maza sobre la cuña, como sucede en las cuñas paralelas. El ahusado se extiende, cuando menos, a lo largo de la longitud de la maza y la altura medida

Bibliografía

1. Autor : Beer F. – Johnston E. Titulo : Mecánica Vectorial para Ingenieros
2. Editorial : Mc Graw Hill - México ; Año : 1994
3. Autor : Huang T. C .Titulo : Mecánica para Ingenieros Tomo I : Estatica
4. Editorial : Fondo Educativo Interamericano ; Año :1984
5. Autor : Obando P. Titulo : Estática I Editorial : P. U. C. P. - Perú ; Año : 1980
6. Autor : Nara H. R. Titulo : Mecánica Vectorial para Ingenieros. Estática
7. Editorial : Limusa – Willey S.A. ; Año : 1974

Actividades Complementarias



Una fuerza de 100 lb actúa como se indica sobre un bloque de 300 lb colocado sobre un plano inclinado. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y el plano son $\mu_s=0.25$ y $k_s=0.20$. Determinar si el bloque y el plano están en equilibrio y hallar el valor de la fuerza de rozamiento.