2. CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

INDICE

2. CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES

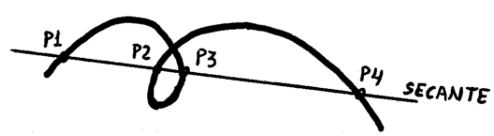
2.1. Curvas planas y ecuaciones paramétricas.

Una curva geométricamente hablando diremos que intuitivamente, es el conjunto de puntos que representan las distintas posiciones ocupadas por un punto que se mueve; si se usa el término curva por oposición a recta o línea poligonal, habría que excluir de esta noción los casos de, aquellas líneas que cambian continuamente de dirección, pero de forma suave, es decir, sin formar ángulos. Esto las distingue de las líneas rectas y de las quebradas. Estarían fuera de esta noción los casos de movimiento rectilíneo. Sin embargo, utilizando la definición matemática, una línea recta es un caso particular de curva.

Curva: Es el caso límite de poligonal en que los saltos discretos de los segmentos son infinitesimales. También en este caso se dice curva plana, también llamada de simple curvatura por el ángulo de contingencia, si tiene todos sus puntos en un mismo plano; y curva alabeada, llamada de doble curvatura por los dos ángulos el de contingencia y el de torsión, en caso que todos sus puntos no estén en un mismo plano.

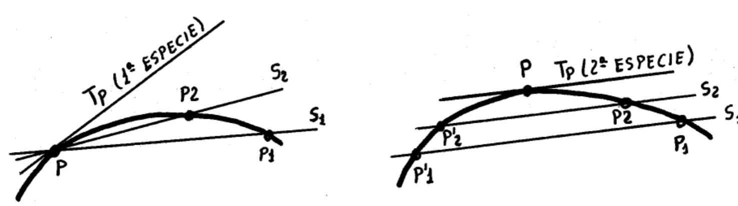
A continuación se van a definir las principales características de las curvas planas.

La recta secante de una curva es la que une dos puntos de la curva separados una distancia finita. El orden de una curva es el número máximo de puntos de corte con una secante. En la figura se muestra una curva de 4° orden.



La recta tangente a una curva en un punto es el límite a que tiende la secante cuando los dos puntos de corte tienden a confundirse.

De esta forma la tangente puede ser de primera especie cuando el punto de tangencia está quieto y el otro se aproxima al primero, de segunda especie cuando los dos puntos se aproximan simultáneamente hacia el de tangencia.



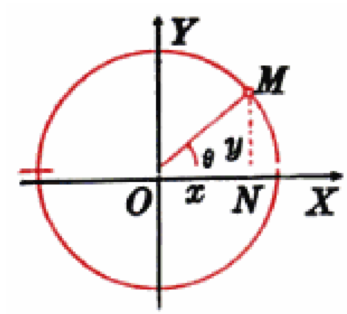
La clase de una curva es el número máximo de tangentes que se pueden trazar desde un punto exterior. Por ejemplo, la circunferencia es una curva de clase dos.

La recta normal a una curva es la perpendicular a la tangente por el punto de tangencia. Según esta definición por un punto de la curva existirán infinitas normales. Para las curvas planas la más importante de estas normales es la coplanaria con la curva, que es la normal principal.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS
Reciben este nombre aquellas ecuaciones en que las variables x y y, cada una separadamente, están expresadas en función de la misma tercera variable. Según esto, designando por la letra z la tercera variable, comúnmente llamada variable paramétrica, estas ecuaciones se representan en la siguiente forma general:
x = F (z)
y = F (z)
Es muy importante aclarar que cada dos ecuaciones paramétricas representan una sola curva perfectamente referida a un sistema de ejes cartesianos.

Trazado de una curva dadas sus ecuaciones paramétricas.
En forma directa se le asignan valores ordenados al parámetro con lo cual las ecuaciones paramétricas determinan los valores correspondientes a x, y, que representan las coordenadas de un punto de la curva. Uniendo los puntos así determinados resulta una curva, que es la representación gráfica de las ecuaciones paramétricas.

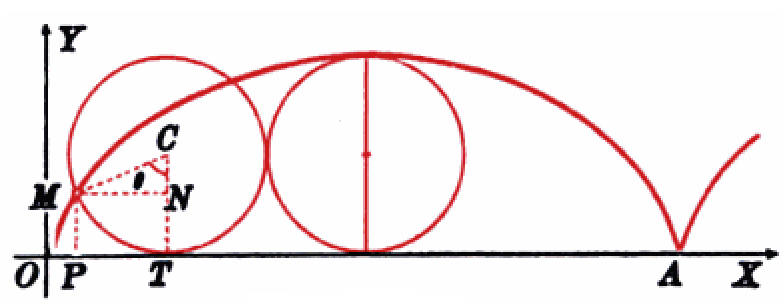
2.2. Ecuaciones paramétricas de algunas curvas y su representación grafica.
CIRCUNFERENCIA
Sea la circunferencia de centro en *O* y radio *a*. sean además *M(x,y)* un punto de la curva y *Θ=ángXOM.*



Se tiene, como ecuaciones paramétricas de la circunferencia:

$$x = a\cos\theta$$
$$y = a\sin\theta$$

CICLOIDE
Es la curvatura descrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, a lo largo de una recta fija.
Tomese al eje x como la recta fija *OX* sobre la cual se hace rodar la circunferencia de centro *C* y radio *r*, y sea *M* el punto fijo que describe la curva.



En el momento en que comienza a rodar la circunferencia, el punto M coincide en el origen con T, punto de contacto de la circunferencia con OX. Cuando M y T lleguen a A, cada punto habrá hecho un recorrido igual a 2πr, es decir, en todo instante genérico, la distancia OT es igual al arco TM. Teniendo presente que cuando la medida del ángulo se da en radianes, el arco es igual al radio multiplicado por el número que mide el ángulo, se puede escribir:

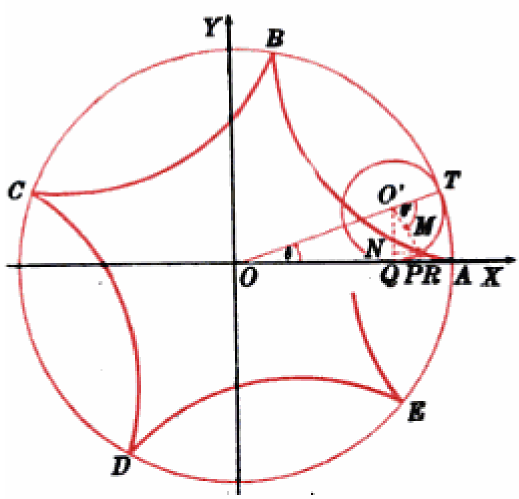
$$x = OP = OT - MN = \mathrm{r}\,\theta - r \sin\theta\,;$$
$$y = PM = TC - NC = r - r\cos\theta\,;$$

$$de\ donde:$$
$$x = r\,(\,\theta - r\sin\theta);$$
$$y = r(1-\cos\theta);$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

HIPOCICLOIDE

Es la curvatura que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, permaneciendo siempre tangente interiormente a otra circunferencia fija.



Sean a el radio de la circunferencia fija de centro O, b el radio de la circunferencia menor, de centro O´, que rueda, permaneciendo siempre tangente a la circunferencia mayor, M el punto fijo de la circunferencia menor que describe la hipocicloide, y T el punto de tangencia.
En A coinciden M y T. cuando M haya descrito la arcada AB; habrá girado 360°, y el punto T habrá recorrido el arco AB;
o sea: arco AB=2πb.

Por la figura se tiene, designando por φ el ángulo $O'MN$:

$$x = OP = OQ + NM = OO'\cos\theta + O'M\cos\varphi\,; \qquad (1)$$
$$y = PM = QO' - NO' = OO'\,\mathrm{sen}\,\theta - O'M\,\mathrm{sen}\,\varphi. \qquad (2)$$

Conviene expresar el ángulo φ en función de Θ para que figure un parámetro solamente.

El ángulo θ' es exterior al triángulo $OO'R$; por tanto:

$$\theta' = \text{áng}\ O'OR + \text{áng}\ O'RO = \varphi + \theta\,;$$

o sea:

$$\varphi = \theta' - \theta. \qquad (3)$$

Además, por la manera de ser generada la curva, el arco AT es igual al arco MT; de donde:

$$a\theta = b\theta', \quad \text{es decir:} \quad \theta' = \frac{a}{b}\theta\,;$$

valor que, sustituído en (3) da:

$$\varphi = \frac{a}{b}\theta - \theta = \frac{a-b}{b}\theta.$$

Sustitúyanse φ por este valor, OO' por $a-b$, $O'M$ por b, en (1) y (2); se obtiene:

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta;$$
$$y = (a-b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta;$$

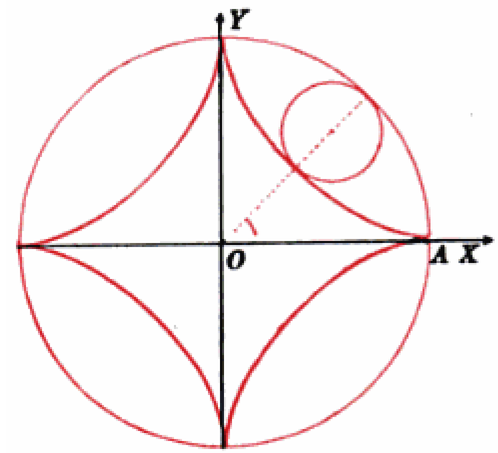
que son las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide.

ASTROIDE

Si los radios de las circunferencias que intervienen en la generación de la hipocicloide son inconmensurables, la curva no vuelve a pasar por el punto inicial A. Pero, si los radios a y b son conmensurables, resulta una curva cerrada.

En el caso particular de b=(1/4)a, se obtiene una curva llamada astroide.

Las ecuaciones paramétricas de esta curva se deducen de las de la hipocicloide, sustituyendo b por (1/4)a y después reduciendo queda:



$$x = a\cos^3\theta\,;$$
$$y = a\,\operatorname{sen}^3\theta$$

Que son las ecuaciones paramétricas de la astroide.

2.3. Derivada de una función dada paramétricamente

Si una curva suave C está dada por la ecuaciones x=f(t) y y=g(t), entonces la pendiente de C en (x,y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Esto se da ya que cumple con el teorema que proporciona las condiciones necesarias para obtener la derivada de una función dada en forma paramétrica:

$$\textit{Sean } f \textit{ y } g \textit{ funciones derivables en un intervalo }]t_1, t_2[.\ \textit{Supongamos que } f \textit{ tiene una inversa derivable en ese intervalo. Entonces en cada punto donde } f'(t) \neq 0, \textit{ las ecuaciones } x = f(t),\ \ y = g(t) \textit{ implican que existe una función derivable } F \textit{ tal que } \ y = f(x),\ \ y \textit{ además } D_x y = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{D_t y}{D_t x}$$

- Derivadas de orden superior para una función dad en forma parametrica

$Si\ x\ y\ y\ están\ dadas\ en\ forma\ paramétrica\ entonces\ D_x^2 y\ puede\ expresarse\ como\ sigue:$

.

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) = \frac{D_t(D_x y)}{D_t x}$$

En general, para obtener la enésima derivada, cuando las ecuaciones están dadas en forma paramétrica, se aplica la siguiente igualdad:

$$D_x^n y = \frac{D_t(D_x^{n-1} y)}{D_t x}$$

A continuación veremos unos ejemplos de derivadas de funciones dadas en forma parametrica.

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuaciones $x = Bt$, $y = Ct - dt^2$ cuando $t = 0$

Solución:

La ecuación de la recta tangente está dada por $y = mx + b$, donde $m = D_x y$.

Se tiene que $D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x} = \dfrac{C - 2dt}{B}$

Cuando $t = 0$ entonces $D_x y = \dfrac{C}{B}$, por lo que $y = \dfrac{C}{B}x + b$ $(*)$

Cuando $t = 0$ se obtiene $x = 0$, $y = 0$, y al sustituir en $(*)$ se obtiene: $b = 0$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y = \dfrac{C}{B}x$

Ejemplo 2:

Si $x = 2t^3 + \operatorname{sen} t$, $y = t^2 - \cos t$ entonces $D_x y = \dfrac{2t + \operatorname{sen} t}{6t^2 + \cos t}$ y $D_x^2 y = \dfrac{D_t(D_x y)}{D_t x} = \dfrac{D_t\left(\frac{2t+\operatorname{sen} t}{6t^2+\cos t}\right)}{D_t(2t^3 + \operatorname{sen} t)}$

$$= \frac{(6t^2+2)\cos t + 1 - 12t^2 - 10\ \operatorname{sen} t}{(6t^2+\cos t)^2(6t^2+\cos t)}$$

2.4. Longitud de arco en forma paramétrica

Si una curva suave C está dada por *x = f(t)* y *y = g(t)* y C no se interseca a sí misma en el intervalo $a \le t \le b$, entonces la longitud de arco de C en este intervalo está dada por:

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad = \quad \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Ejemplo:

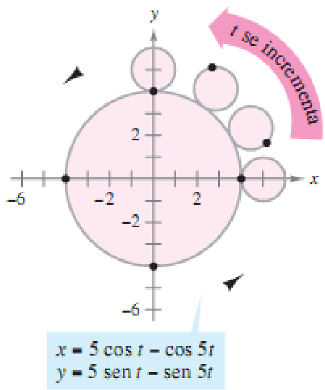
Un círculo de radio 1, rueda sobre otro círculo mayor de radio 4, como se muestra en la figura 10.33. La epicicloide trazada por un punto en el círculo más pequeño está dada por

$$x = 5\cos t - \cos 5t$$

y

$$y = 5\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t.$$

Hallar la distancia recorrida por el punto al dar una vuelta completa alrededor del círculo mayor.



Solución Antes de aplicar el teorema 10.8, hay que observar en la figura 10.33 que la curva tiene puntos angulosos en $t = 0$ y $t = \pi/2$. Entre estos dos puntos, dx/dt y dy/dt no son simultáneamente 0. Por tanto, la porción de la curva que se genera de $t = 0$ a $t = \pi/2$ es suave. Para hallar la distancia total recorrida por el punto, calcular la longitud de arco que se encuentra en el primer cuadrante y multiplicar por 4.

$$s = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad \text{Forma paramétrica de la longitud de arco.}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\,\text{sen}\, t + 5\,\text{sen}\, 5t)^2 + (5\cos t - 5\cos 5t)^2}\, dt$$

$$= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\,\text{sen}\, t\,\text{sen}\, 5t - 2\cos t\cos 5t}\, dt$$

$$= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2\cos 4t}\, dt$$

$$= 20\int_0^{\pi/2} \sqrt{4\,\text{sen}^2\, 2t}\, dt \qquad \text{Identidad trigonométrica.}$$

$$= 40\int_0^{\pi/2} \text{sen} 2t\, dt$$

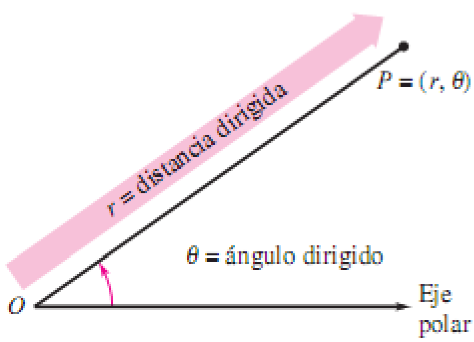
$$= -20\Big[\cos 2t\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 40$$

2.5. Coordenadas polares.

Hasta ahora las gráficas se han venido representando como colecciones de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas han estado en forma rectangular o en forma paramétrica. En esta sección se estudiará un sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas polares.

Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, se fija un punto *O*, llamado polo (u origen), y a partir de *O*, se traza un rayo inicial llamado eje polar, como se muestra en la figura.



A continuación, a cada punto *P* en el plano se le asignan coordenadas polares (r, θ), como sigue.

r = *distancia dirigida* de O a P

θ = *ángulo dirigido*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje polar hasta el segmento $\overline{OP}$

En coordenadas rectangulares, cada punto (x,y) tiene una representación única. Esto no sucede con las coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r,θ) y (r,$2\pi + \theta$) representan el mismo. También, como r es una distancia dirigida, las coordenadas pueden representar el mismo punto. En general, el punto puede expresarse como:

$$(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$$
$$o$$
$$(r, \theta) = (-r, \theta + (2n+1)\pi)$$

Donde n es cualquier entero. Además, el polo está representado por (0,θ), donde θ es cualquier ángulo.

2.6. Gráficas de ecuaciones polares

Una manera de trazar la grafica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas rectangulares.

TEOREMA Transformación (o cambio) de coordenadas

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) de ese punto como sigue.

1. $x = r\cos\theta$ **2.** $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$ $r^2 = x^2 + y^2$

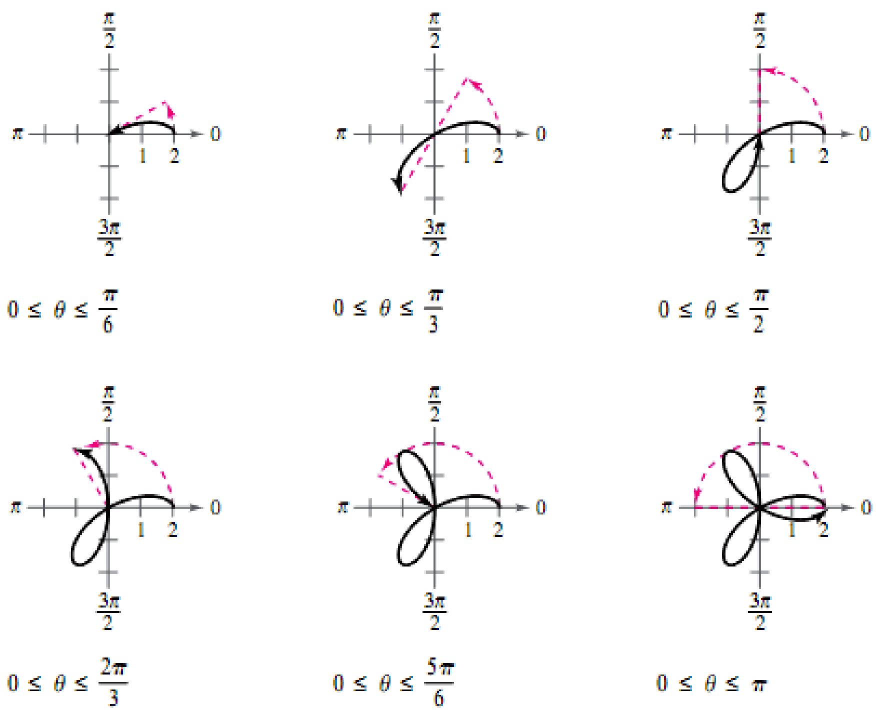
EJEMPLO Trazado de una gráfica polar

Dibujar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$.

Solución Para empezar se expresa la ecuación polar en forma paramétrica.

$$x = 2\cos 3\theta\cos\theta \quad \text{y} \quad y = 2\cos 3\theta\,\text{sen}\,\theta$$

Tras experimentar un poco, se encuentra que la curva completa, la cual se llama **curva rosa**, puede dibujarse haciendo variar a θ desde 0 hasta π, como se muestra en la figura. Si se traza la gráfica, se verá que haciendo variar a θ desde 0 hasta 2π, se traza la curva entera *dos veces*.



Otra forma de realizar las graficas polares, es elaborar una tabla de valores, así al representar los puntos se obtendrá la grafica.