4. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

INDICE 4

4. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

4.1. Definición de una función de dos variables

La primera parte de esta asignatura se ha centrado en el estudio de las funciones de una variable,

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Lo que sigue ahora, es el estudio de las funciones de dos variables.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Estas funciones se representan a menudo mediante el símbolo z = f(x,y).

Una función de dos variables tiene como dominio parejas de números (así que se le asignará un número nuevo a cada una de estas parejas). En general, el dominio de una función con *n* variables (*n* ≥ 1) está formado por puntos con *n* coordenadas, y la función asocia a cada punto un número real determinado.

Una función con n variables es una regla *f* que asocia a cada punto ($x1$, $x2$, . . . , xn) dentro de un determinado conjunto *D* un número real $f(x1, x2, \ldots, xn)$. El dominio *D* es un subconjunto de R*n*, es decir, está formado por puntos con *n* coordenadas. Representaremos esta función escribiendo:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{o bien} \quad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

Cuando queramos indicar la acción de la función sobre un punto, entonces escribiremos:

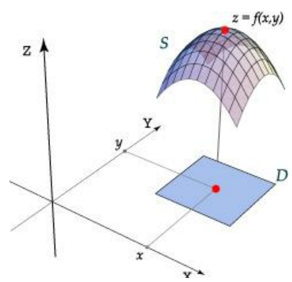
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{f}{\longmapsto} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

4.2. Gráfica de una función de dos variables

La grafica de una función de dos variables es el conjunto de puntos (x,y,z) tales que $z = f(x, y)\ \ y\ \ x \in D$. Es decir,

$$Graf(f) = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$$

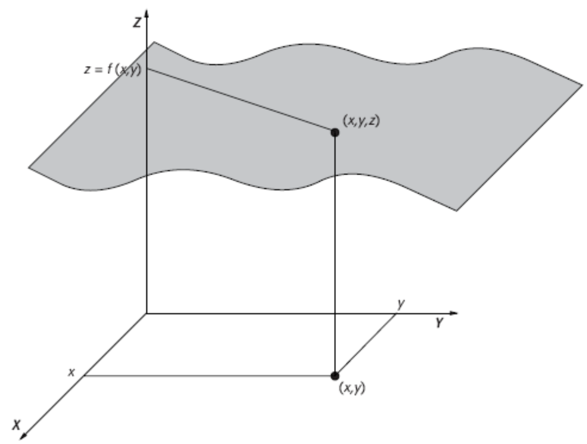
La grafica de una función de dos variables z = f(x, y) puede interpretarse geométricamente como una superficie S en el espacio de tal forma que su proyección sobre el plano xy es D, el dominio de f. En consecuencia, a cada punto (x,y) en D le corresponde un punto (x,y,z) en la superficie y, a la inversa, a cada punto (x,y,z) en la superficie le corresponde un punto (x,y) en D.



4.3. Curvas y superficies de nivel

MAPAS DE ALTURAS Y CURVAS DE NIVEL

La grafica de una función *h* de una sola variable es la representación de un conjunto de puntos de la forma (*x, y*) tales que *y* = *h*(*x*). Cuando tenemos una función *f* de dos variables, la grafica tiene que representar conjuntos de puntos de la forma (*x, y, z*) tales que *z* = *f*(*x, y*). Por este motivo, para representar la grafica de una función de dos variables necesitamos tres dimensiones. En el caso de la grafica tridimensional, partimos de tres ejes perpendiculares entre sí: en los dos ejes horizontales representamos las variables *x* e *y*, y en el eje vertical representamos los valores *z* que toma la función.



Función de dos variables

Hemos denominado los ejes con las letras *X, Y* y *Z*, respectivamente. A cada valor de las variables *x* e *y* le corresponde un punto (*x, y*) del plano que se encuentra en la base. Por ´ ultimo, la función *f* asocia un valor *z* = *f*(*x, y*) al punto (*x, y*).

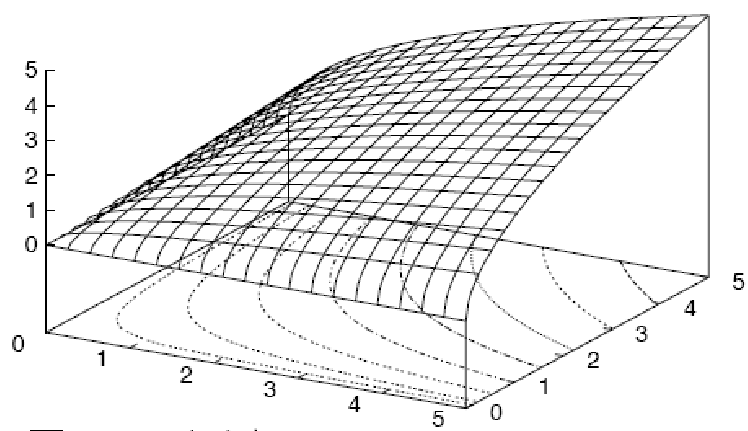
Con la grafica nos podemos imaginar el grafo de una función de dos variables como una sábana por encima (o por debajo, si la función toma valores negativos) del plano donde están los puntos (*x, y*). También podemos establecer un símil con una montaña, de forma que para describir el comportamiento de la función nos interesará saber si la pendiente es muy fuerte o no en una determinada dirección, junto con donde se encuentran las cumbres y los valles. Una última manera, que nos resultará intuitiva para otros propósitos como veremos más adelante, es considerar la grafica de la función como si se tratase de la superficie de un pastel que hemos colocado sobre el plano donde están las variables *x* e *y* (de ahora en adelante lo llamaremos plano XY).

Es probable que los aficionados al excursionismo estén familiarizados con los mapas topográficos, donde se indican las alturas de los puntos mediante una serie de curvas que conectan puntos de una misma altitud. Estas curvas se conocen como curvas de nivel, porque como su propio nombre indica, si seguimos una de ellas nos mantenemos en el mismo nivel. Una de las formas posibles de imaginarnos la grafica de una función de dos variables es como si fuese una montaña (o, mejor dicho, como una región con accidentes geográficos: montañas y valles). No tenemos que extrañarnos, pues, de que el recurso de las curvas de nivel utilizado en los mapas topográficos también nos sirva a nosotros para simplificar la representación de funciones de dos variables.

Podemos ver que las curvas de nivel no se representan en tres dimensiones, si no en dos. Las curvas de nivel son precisamente una forma de tener información sobre la tercera dimensión (la altitud), sin necesidad de dibujarla.

Si queremos determinar una curva de nivel, tenemos que fijar una cierta altitud, es decir, un cierto valor de la *z*, y entonces unir todos los puntos (*x, y*) que tienen la propiedad de que *f*(*x, y*) = *z*.

Ejemplo:
Sea $g(x, y) = \sqrt{(xy)}$ la media geométrica de los números *x* e *y*. La curva de nivel 4 está formada por todos los pares ordenados (*x, y*), la media geométrica de los cuales es 4. Por ejemplo, (4, 4), (2, 8) y (8, 2) están todos sobre esta curva de nivel. A continuación mostramos la grafica de $\sqrt{(xy)}$ y sus curvas de nivel en el plano *xy*.



$\sqrt{xy}$ con curvas de nivel

Ahora entonces, podemos resumir:

Dada una función f con dominio en $\mathbb{R}^2$ y un número cualquiera c, la **curva de nivel** c **de la función** f está formada por el conjunto de puntos que satisfacen $f(x_1, x_2) = c$.

El concepto de curva de nivel, se generaliza al caso de tres variables independientes, en las denominadas superficies de nivel.

Dibujar graficas de las funciones de dos variables es en general una cosa fácil. Dibujar las graficas de las funciones de tres variables es imposible. Para dibujar tales objetos necesitaríamos un espacio con cuatro dimensiones; el propio dominio ha de ser una porción del espacio tridimensional.

Podemos intentar representar el comportamiento de una función de tres variables, W = f(x,y,z), examinando las superficies de nivel de f. Estas son los subconjuntos del dominio con ecuaciones de la forma f(x,y,z) = c, donde c es un valor en la imagen de f.

Las superficies de nivel suelen ser difíciles de dibujar. Sin embargo, es útil saber algo acerca de ellas. Ahora veremos unos ejemplos:

Ejemplo Para la función $f(x, y, z) = Ax + By + Cz$ las superficies de nivel son los planos paralelos

$$Ax + By + Cz = c.$$

Ejemplo Para la función $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ las superficies de nivel son esferas concéntricas

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

Ejemplo Como ejemplo final consideramos la función

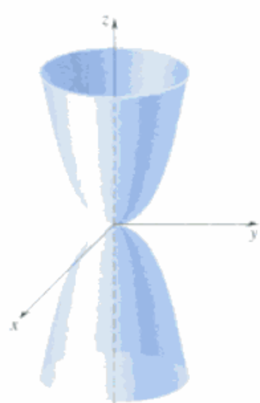
$$f(x, y, z) = \frac{|z|}{x^2 + y^2}.$$

La extendemos al origen dándole el valor 0 en ese punto. En los demás puntos del eje z dejamos que f no esté definida.

Primero, observemos que f sólo toma valores no negativos. Dado que f se anula sólo cuando $z = 0$, la superficie de nivel 0 es el plano xy. Para hallar otra superficie de nivel, consideremos $c > 0$ y hagamos $f(x, y, z) = c$. Esto da

$$\frac{|z|}{x^2 + y^2} = c, \quad \text{luego} \quad |z| = c(x^2 + y^2).$$

(Figura .) Cada una de estas superficies es un paraboloide doble de revolución.[1]



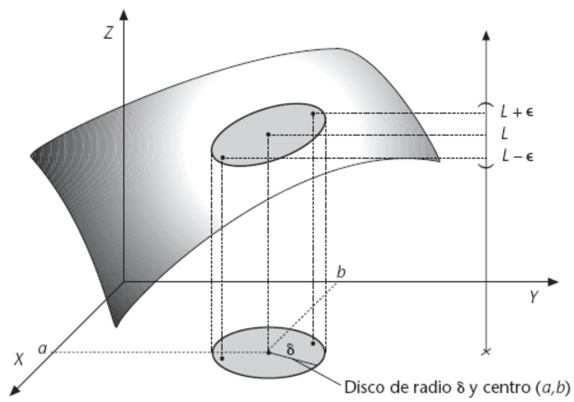
superficie de nivel:
$|z| = c(x^2 + y^2), (c>0)$

4.4. Límites y continuidad

LIMITE

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}$, una función definida en D, y sea a en un punto de acumulación de D. Decimos que el **límite** de una función f cuando x se acerca a a es $L \in \mathbb{R}$, y lo escribiremos $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ si $x \in D$ y $0 < d(x, a) < \delta$.

Por ejemplo, si la función es de dos variables, esto significa que para un entorno de L, $(L - \epsilon , L + \epsilon)$, encontramos un disco de centro a tal que la imagen de todos los puntos del disco donde la función esté definida, diferentes del mismo a, está comprendida dentro de $(L - \epsilon , L + \epsilon)$.



Si $f : D \to \mathbb{R}$ se define en $x = a$ y existe $\lim_{x\to a} f(x)$, se dice que f es **continua** en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

CONTINUIDAD

Intuitivamente, la definición de continuidad significa que la función no tiene saltos repentinos.

Cuando tratamos con subconjuntos de R, solo contamos con dos direcciones mediante las cuales un punto puede ser aproximado: desde la izquierda o desde la derecha. Sin embargo, cuando hay más variables la situación cambia, ya que tenemos muchas trayectorias posibles de aproximación.

Esto, por un lado, marca una diferencia no trivial con respecto al caso de una variable y, por el otro, hace que la definición de límite sea más restrictiva, puesto que el límite se encuentra bien definido si, y solo si, existe para todas y cada una de las trayectorias posibles de aproximación.

Ejemplo:

Consideramos la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\,y^2}{x^2+y^4} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Queremos comprobar que f no es continua en el punto $(0,0)$. Para conseguirlo veremos que si nos acercamos a $(0,0)$ siguiendo trayectorias diferentes, obtenemos resultados también diferentes. Empezamos por las trayectorias más sencillas: las rectas. Una recta que pase por $(0,0)$ tiene la ecuación:

$$a\,x+b\,y=0,$$

donde a y b son números fijos. A continuación estudiaremos dos casos diferentes:

a) Si $b=0$, entonces la recta es $x=0$, es decir, estamos observando la función a lo largo del eje Y. En este caso, tenemos que $f(0,y)=0$ para todo y, que es una función continua (al ser constante).

b) Si $b\neq 0$, tenemos que $y=-\frac{a}{b}\,x$. Definimos $c=-\frac{a}{b}$ tal que $y=cx$. El valor que toma la función en este punto es:

$$f(x,c\,x)=\begin{cases}\frac{c^2\,x^3}{x^2+c^4x^4} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Esta función de una variable es continua para todo c fijado, puesto que:

$$\lim_{x\to 0} f(x,cx)=c^2\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+c^4x^2}=0.$$

Hemos visto que si nos acercamos a $(0,0)$ siguiendo trayectorias rectas, $f(x,y)$ es continua.

Por otro lado, para comprobar que f no es continua en $(0,0)$, consideramos la trayectoria (parabólica) establecida por $x=y^2$. En este caso, la función de una variable que resulta es:

$$f(y^2,y)=\begin{cases}\frac{y^4}{y^4+y^4} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

es decir:

$$f(y^2,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

que corresponde claramente a una función discontinua cuando $y=0$, lo cual implica, en particular, que la función $f(x,y)$ no puede ser continua en el punto $(0,0)$.

4.5. Definición de derivadas parciales de funciones de dos variables, así como su interpretación geométrica.

Sea f una función de x e y; por ejemplo:

$$f(x,y) = 3x^2y - 5xcos\pi y$$

La derivada parcial de f con respecto a x es la función f_x obtenida diferenciando f con respecto a x, considerando a y como una constante, en este caso

$$f_x(x,y) = 6xy - 5cos\pi y$$

Las derivadas parciales se definen formalmente como limites:

$$\textit{Sea } f \textit{ una función de dos variables. Las derivadas parciales de } x \textit{ e } y \textit{ son las funciones } f_x \textit{ y } f_y \textit{, definidas por}$$

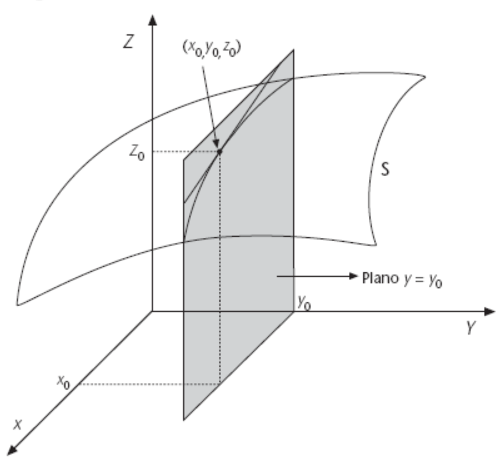
$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

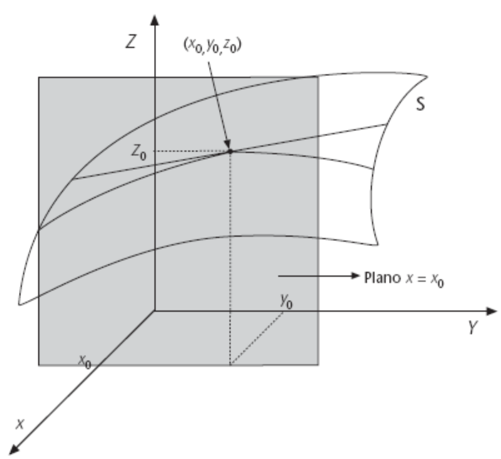
Interpretación geométrica

Coloquialmente, para una función de dos variables $f(x,y)$ decimos que los valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (x_0, y_0) denotan la **pendiente de la superficie** $z = g(x,y)$ **en las direcciones de** x **e** y, respectivamente.

Geométricamente, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene de intersecar el plano $y = y_0$ y la superficie $z = f(x,y)$. Dicho de otro modo, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x, y_0)\,|_{x=x_0}$, donde f' es la derivada de f respecto de x. Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'(x_0, y)\,|_{y=y_0}$, donde ahora f' es la derivada de f respecto de y.



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$: pendiente en la dirección x



$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$: pendiente en la dirección y

Independientemente de la cantidad de variables que intervienen, las derivadas parciales de funciones de varias variables se pueden interpretar físicamente como razones de cambio, variaciones instantáneas o coeficientes de variación, igual que cuando se tiene una sola variable. El ejemplo que vemos a continuación muestra este aspecto.

4.6. Derivadas parciales de orden superior

Si tenemos $z = f(x,y)$, sabemos que las derivadas parciales de la función respecto de las dos variables independientes son, en general, funciones a su vez de las mismas variables.
Siendo las derivadas parciales funciones de las mismas variables, estas funciones pueden derivarse nuevamente respecto de y de *x e y* les llamamos derivadas parciales de segundo orden. Hay que hacer notar que ahora tendremos que la primera derivada parcial respecto de x puede ser derivada parcialmente respecto de x y también respecto de *y*. De igual manera, la primera derivada parcial respecto de *y*, puede ser derivada parcialmente respecto a esa misma variable y también respecto de *x*. De manera que las segundas derivadas, o derivadas de segundo orden, pueden ser estas cuatro derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

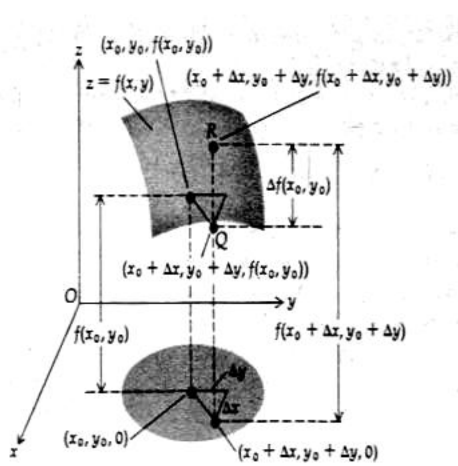
Puesto que estas cuatro derivadas parciales segundas pueden ser funciones de x y de *y*, es claro que pueden derivarse nuevamente para obtener las derivadas de tercer orden y así sucesivamente hasta el orden n.

4.7. Incrementos, diferenciales y regla de la cadena

INCREMENTOS

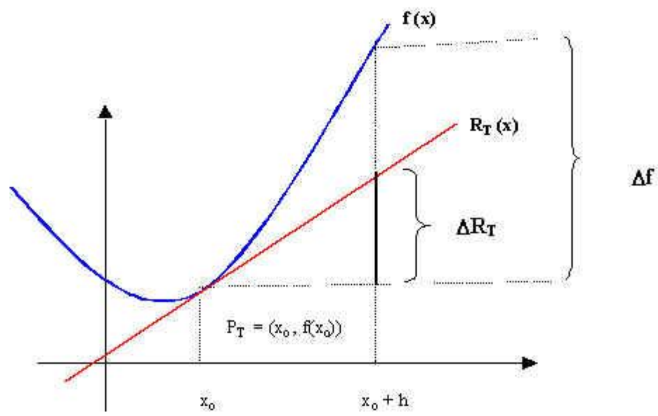
Para funciones *z = f (x, y)* de dos variables, Δx y Δy son los incrementos de *x* e *y*, y el incremento de *z* en el punto (x,y) viene dado por:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$



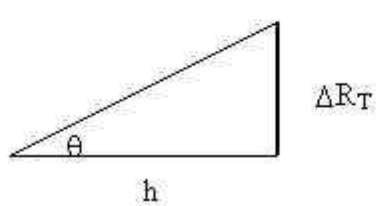
DIFERENCIAL
Existen muchas situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar una diferencia, como por ejemplo en las aproximaciones de valores de funciones, en el cálculo de errores al efectuar mediciones o simplemente al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente varía "un poco", etc. Utilizando a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia, aproximaremos esta diferencia con la diferencia sobre la recta tangente, a la que llamaremos EL DIFERENCIAL de la función en el punto.

Consideremos la siguiente ilustración en donde aproximamos a la función f por su recta tangente.



Considerando que la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia $P_{T,}$ si le llamamos $\Delta f = f(x_o + h) - f(x_o)$ a la variación de f cuando x varía de x_o a x_o + h y ΔR_T a la variación de la recta tangente en el mismo rango de variación en x, podemos afirmar que para valores de h "cercanos" a 0, estas dos variaciones son muy parecidas, es decir, que Df se aproxima a DR_T .

Podemos expresar a DR_T en términos de h y el ángulo q que forma la recta tangente con el eje de las abscisas. En el triángulo de la figura, que extraemos a continuación, se observa lo siguiente:



$$\tan\theta = \frac{\Delta R_T}{h} \quad \Rightarrow \quad \Delta R_T = (\tan\theta)h \quad \Rightarrow \quad \Delta R_T = f'(x_o)h$$

En virtud de que D R_T es un aproximado de la diferencia Df, lo definiremos como el diferencial de f en el punto x_o, con respecto al incremento h y lo denotaremos por df, es decir,

$$df = f'(x_o)h$$

Diferencial total

Si f es una función de dos variables (x,y). Siendo f diferenciable en (x,y), entonces la diferencial total de f es la función df dada por:

$$df(x, y, \Delta x, \Delta y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \cdot \Delta x - \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \cdot \Delta y$$

O bien

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

REGLA DE LA CADENA

Teorema. Sea $w = f(x, y)$ una función diferenciable de x e y. Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$ son funciones derivables de t, entonces w es función derivable de t, con

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

La regla de la cadena facilita mucho el trabajo con funciones: para encontrar las derivadas de funciones compuestas es suficiente con conocer las derivadas de las funciones elementales.

En el caso del cálculo de una variable, la regla de la cadena nos indica que:

$$\left(g(h(x))\right)' = g'[h(x)]\, h'(x),$$

es decir, que lo que tenemos que hacer es ir multiplicando las sucesivas derivadas de las funciones componentes.

Supongamos que tenemos una determinada función de dos variables $z = f(x, y)$. Un tipo de composición muy frecuente es aplicar ahora una función de una variable h a z. La función compuesta resultante es $h(z) = h[f(x, y)]$, como se ve, una nueva función de dos variables.

Si $f(x, y) = x^2 + y^2$ y $h(z) = \sqrt{z}$, entonces la función compuesta es la siguiente: $h[f(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Regla de la cadena I

Supongamos que tenemos una función compuesta:
$g(x,\, y) = = h[f(x, y)]$. La regla de la cadena determina que sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = h'[f(x, y)]\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = h'[f(x, y)]\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Esquemáticamente, si $z = f(x, y)$, podemos escribir:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = h'(z)\,\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = h'(z)\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Otro caso típico en ingeniería es que cuando partimos de una función de dos variables $f(x, y)$, donde tanto x como y dependen de otra variable p. Si suponemos que hay dos funciones de una variable u y v, en que $x = u(p)$ e $y = v(p)$, entonces la función compuesta es $g(p) = f[u(p), v(p)]$.

Regla de la cadena II

Supongamos que tenemos una función compuesta de la forma siguiente:

$$g(p) = f(x, y) = f[u(p), v(p)].$$

La regla de la cadena indica que su derivada es:

$$g'(p) = \frac{\partial f}{\partial x}\,u'(p) + \frac{\partial f}{\partial y}\,v'(p).$$

4.8. Derivación parcial implícita

Recordaremos el concepto de derivada implícita antes de continuar con la derivación parcial implícita.
En los cursos de cálculo y secundaria la mayor parte de las funciones con que trabajamos están expresadas en forma explícita, como en la ecuación:

$$y = 4x^2 + 3$$

dónde la variable **y** está escrita explícitamente como función de **x**. Sin embargo, muchas funciones están implícitas en una ecuación. La función $y = \frac{1}{x}$, viene definida **implícitamente** por la ecuación

$$x \cdot y = 1$$

Si queremos hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ para esta última ecuación lo hacemos despejando **y**, así: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, obteniendo su derivada fácilmente:

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

El método sirve siempre y cuando seamos capaces de despejar **y** en la ecuación. El problema es que sino se logra despejar la variable **y** es inútil este método.

Para realizar una derivada implícita con derivadas parciales se usa la siguiente fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Si tenemos que $F(z, x_1, x_2, \cdots, x_n) = c$ define implícitamente una función $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, diferenciando totalmente como hicimos antes, veremos que las derivadas parciales de la función implícita son:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_z}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_z}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{F_{x_n}}{F_z}$$

Ejemplo:

La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = c$, define implícitamente una función $z = f(x, y)$ y queremos encontrar las derivadas parciales.

Hacemos: $F(x^2 + y^2 + z^2) = c$ y aplicando las reglas (3) y (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{F_u}{F_z} \qquad (4)$$

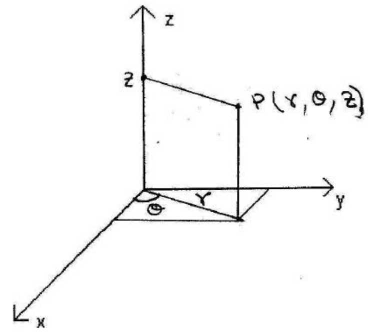
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

4.9. Coordenadas cilíndricas y esféricas

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Sea P un punto en el espacio con coordenadas cartesianas (x, y, z). Las coordenadas cilíndricas correspondientes son (r, θ, z), donde (r, θ) son las coordenadas polares del punto (x, y) en el plano xy, y z es la misma coordenada z en coordenadas cartesianas.



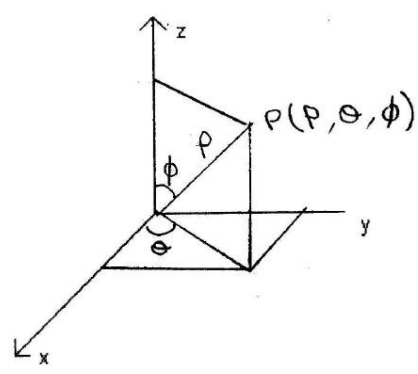
Luego, las ecuaciones de transformación son:

$$x = r cos\theta \qquad y = r sen\theta \qquad z = z$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Sea P un punto en el espacio con coordenadas cartesianas (x, y, z). Las coordenadas esféricas correspondientes son (ρ, θ, φ), donde ρ es la distancia del punto P al origen, θ es el mismo que en coordenadas cilíndricas y φ es el ángulo que determina la recta OP con la dirección positiva del eje z, luego $0 \leq \varphi \leq \pi$.



Luego, las ecuaciones de transformación son:

$$x = \rho sen\varphi cos\theta \qquad y = \rho sen\varphi sen\theta \qquad z = \rho cos\varphi$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad tan\theta = \frac{y}{x} \qquad cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4.10. Derivada direccional, gradiente, divergencia y rotacional

DERIVADA DIRECCIONAL

En el caso de las funciones de varias variables, podemos considerar la variación de la función en un punto en función de la dirección que tomemos.

Sea v un vector unitario de $\mathbb{R}^n$, es decir, $||v|| = 1$, y sea f una función definida en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Si existe el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv)-f(a)}{h},$$

su valor es la derivada de la función f en el punto a en la dirección v, y se escribe $D_v f(a)$.

Observa que la existencia de estas derivadas direccionales significa simplemente que la función de una variable real $t \longmapsto f(a+tv)$ es derivable en $t = 0$. En particular, si $v = e_i$ se obtiene la i–ésima derivada parcial de f.

De entre las infinitas direcciones que podemos considerar para una función f en un punto $a \in \mathbb{R}^3$, tres de las derivadas direccionales coincidirán con $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

Ejemplo

Para la función $g(x,y) = 4\,x^3 + 3\,x^2\,y - 2\,x\,y^2 - 5\,x + y^3 + 7$ consideramos la condición de que su derivada direccional pase por el punto $(0,0)$ y tenga la dirección del vector unitario $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Definimos la derivada direccional de g en el punto $(0,0)$ y en la dirección del vector $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ como la derivada de la función de una variable, $u(t) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, -\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$ evaluada en $t = 0$. En concreto:

$$u(t) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, -\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) = \left(\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)t^3 - \frac{5\sqrt{2}}{2}t + 7.$$

Por lo tanto:

$$u'(t) = 3\left(\frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4}\right)t^2 - \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$u'(0) = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)0 - \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

La derivada direccional es $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$, lo cual nos indica que el corte vertical (y, en consecuencia, la función g) decrece a partir de $(0,0)$, si nos movemos en la dirección del vector $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (Recordemos que una derivada negativa indica que la función es decreciente).

Al calcular una derivada direccional, los vectores que consideramos siempre deben tener longitud 1. Así, por ejemplo, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es unitario, debido que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$. El motivo por el cual se han escogido siempre vectores unitarios es que, de esta manera, se pueden comparar dos derivadas direccionales en direcciones diferentes.

En general, si $a \in \mathbb{R}^3$ y v es un vector unitario, la derivada direccional de f en a según la dirección v se puede calcular como la derivada en cero de $u(t) = f(a + tv)$. Es decir, $D_v f(a) = u'(0)$.

GRADIENTE

El vector gradiente, se utiliza en diferentes situaciones. Las dos más importantes son: en el cálculo de derivadas direccionales y en el cálculo de extremos de funciones.

Para considerar el gradiente en un punto es necesario que en este la función admita derivadas parciales. Recordemos ahora que:

Si $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, entonces el gradiente de f, que se denota mediante $\nabla f(x_1, \ldots, x_n)$, es el vector:

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

El método práctico para calcular la derivada direccional de una función es el siguiente:

$$D_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v,$$

donde v es un vector unitario, es decir, $||v|| = 1$.

1) La dirección de máximo crecimiento de una función f en un punto arbitrario (x, y) viene dada por $\nabla f(x, y)$ y el valor máximo de $D_u f(x, y)$ es $||\nabla f(x, y)|| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ con $u = \frac{\nabla f(x,y)}{||\nabla f(x,y)||}$.

2) La dirección de máximo decrecimiento de una función f viene dada por $-\nabla f(x, y)$ y el valor mínimo de $D_u f(x, y)$ es $-||\nabla f(x, y)|| =$ $= -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ con $u = -\frac{\nabla f(x,y)}{||\nabla f(x,y)||}$.

3) La derivada direccional de una función f en (x, y), en la dirección del vector u, es nula si, y sólo si, el vector u es perpendicular al vector gradiente $\nabla f(x, y)$.

El gradiente de una función de dos variables es una **función vectorial** de dos variables. Tiene múltiples aplicaciones (como la *divergencia* y el *rotacional*).
No se asigna valor alguno al símbolo ∇ en sí mismo. Es un operador, en el mismo sentido que lo es *d/dx*: Cuando ∇ opera sobre *f (x, y)* produce el vector ∇ *f (x, y)*.

DIVERGENCIA
Otra importante función definida sobre un campo vectorial es la divergencia, que es una función escalar.

La divergencia de F(x, y) = (M, N) es

$$div\ F(x,y) = \nabla \cdot F(x,y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \qquad\qquad Plano$$

La divergencia de F(x, y, z) = (M, N, P) es

$$div\ F(x,y,x) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\ \ \frac{\partial P}{\partial z} \qquad Espacio$$

Si div F = 0 se dice que F es de divergencia nula.

ROTACIONAL
El rotacional de F(x, y, z) = (M, N, P) es

$$rot\ F(x,y,z) = \nabla \times F = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) i - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

4.11. Aplicaciones geométricas y físicas de los operadores vectoriales

Los operadores vectoriales que veremos son el gradiente, divergencia y rotacional.

GRADIENTE
Interpretación geométrica:
De forma geométrica el gradiente es un vector que se encuentra normal a una superficie o curva en el espacio.

Aplicaciones físicas.
El Gradiente posee innumerables aplicaciones en física, especialmente en electromagnetismo y mecánica de fluidos. En particular, existen muchos campos vectoriales que puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar.

Uno de ellos es el campo electrostático, que deriva del potencial eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

Todo campo que pueda escribirse como el gradiente de un campo escalar, se denomina potencial, conservativo o irrotacional. Así, una fuerza conservativa deriva de la energía potencial como

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Los gradientes también aparecen en los procesos de difusión que verifican la ley de Fick o la ley de Fourier para la temperatura. Así, por ejemplo, el flujo de calor en un material es proporcional al gradiente de temperaturas

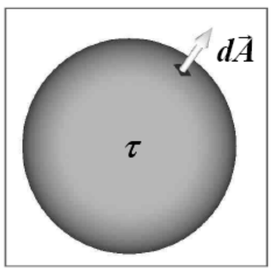
$$\vec{q} = -k\nabla T$$

Siendo k la conductividad térmica.

DIVERGENCIA

La aplicación central de la divergencia, es que esta proporciona el flujo por unidad de volumen.

- **T. de Gauss:**



Superficie cerrada

$$\boxed{\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\; d\tau = \underbrace{\oint_A \vec{v}\cdot d\vec{A}}_{\text{Flujo de } \mathbf{v} \text{ a través de A}}}$$

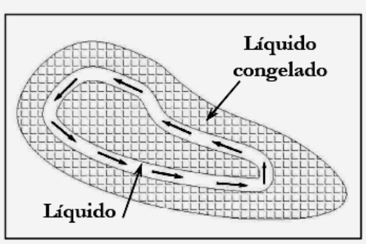
Interpretación de la divergencia: $\nabla\vec{v}$ es el flujo por unidad de volumen.

ROTACIONAL

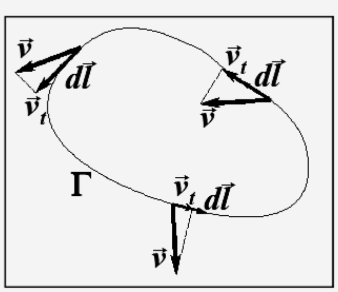
El rotacional da la circulación por unidad de superficie.

- Circulación:

- Imaginemos que tenemos un líquido que se está moviendo arbitrariamente.



- Congelamos instantáneamente todo el líquido salvo un tubo. Si la velocidad del líquido está organizada de modo coherente en el tubo, existe una circulación de líquido por el tubo.



- Matemáticamente se define la circulación a lo largo de una trayectoria G como:

$$\boxed{C = \oint_\Gamma \vec{v}\cdot d\vec{l}}$$

(se suma la componente tangencial del campo a lo largo de la trayectoria)