1. **SOLUCIONES DE ECUACIONES ALGEBRAICAS**

1.1. Teoría de un método iterativo

En matemática computacional, un método iterativo trata de resolver un problema (como una ecuación o un sistema de ecuaciones) mediante aproximaciones sucesivas a la solución, empezando desde una estimación inicial. Esta aproximación contrasta con los métodos directos, que tratan de resolver el problema de una sola vez (como resolver un sistema de ecuaciones Ax=b encontrando la inversa de la matriz A). Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número grande de variables (a veces del orden de millones), donde los métodos directos tendrían un costo prohibitivo incluso con él la potencia del mejor computador disponible.

Tabla de contenidos

1Puntos fijos atractivos

Si una ecuación puede ponerse en la forma f(x) = x, y una solución x es un punto fijo atractivo de la función f, entonces puede empezar con un punto x1 en la base de atracción de x, y sea xn+1 = f(xn) para n ≥ 1, y la secuencia {xn}n ≥ 1 convergerá a la solución x.

Método de Jacobi

Un método iterativo con el cual se resuelve el sistema lineal A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$ comienza con una aproximación inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$a la solución $\boldsymbol{x}$ y genera una sucesión de vectores $\boldsymbol{x}^{(k)}$ que converge a $\boldsymbol{x}$. Los métodos iterativos traen consigo un proceso que convierte el sistema A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{b}$ en otro equivalente de la forma $\boldsymbol{x}$ = T$\boldsymbol{x}$ + $\boldsymbol{c}$ para alguna matriz fija T y un vector $\boldsymbol{c}$.

Luego de seleccionar el vector inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ la sucesión de los vectores de la solución aproximada se genera calculando:

$$x^{(k)} = \mathrm{T}\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{c}$$

para cada k = 1,2,3,....

El método se escribe en la forma $\boldsymbol{x}^{(k)} = T\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{c}$ separando A en sus partes diagonal D y fuera de la diagonal. Sea D la matriz diagonal cuya diagonal es la misma que A, sea -L la parte estrictamente triangular inferior de la parte A y sea -U la parte estrictamente triangular superior de A.

Con esta notación A = D-L-U, entonces transformamos la ecuación $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, o $(D-L-U)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, en

$$D\boldsymbol{x} = (L+U)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

y, si D^{-1} existe, es decir, si $a_{i,i}$ es distinto de cero para cada i, entonces

$$\boldsymbol{x} = D^{-1}(L+U)\boldsymbol{x} + D^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Esto da origen a la forma matricial del método iterativo de Jacobi:

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = D^{-1}(L+U)\boldsymbol{x}^{(k-1)} + D^{-1}\boldsymbol{b},\ k = 1,2,...$$

Al introducir la notación $T_j = D^{-1}(L+U)$ y $\boldsymbol{c_j}$, esta técnica tiene la forma

$$x^{(k)} = T\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{c}$$

Es de mencionar el siguiente teorema: " Si A es estrictamente diagonal dominante, entonces con cualquier elección de la aproximación inicial, el método de Jacobi da una sucesión que converge a la solución única de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$"

Una vista a la ecuación:

$$x_i = \frac{-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(a_{i,j} XO_j\right) + b_i}{a_{i,i}}$$

del método de jacobi, sugiere algunas mejoras al algoritmo; en el sentido de que cuando queremos calcular $x^{(k)}$ utilicemos las componentes de $x^{(k-1)}$ y las recién calculadas de $x^{(k)}$ pues estas probablemente sean una mejor aproximación a la solución.

Así la nueva ecuación es:

$$x_i = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \left(a_{i,j} XO_j\right) + b_i}{a_{i,i}}$$

Es de mencionar el siguiente teorema: " Si A es estrictamente diagonal dominante, entonces con cualquier elección de la aproximación inicial, el método de Jacobi da una sucesión que converge a la solución única de A***x*** = ***b***"

Un método iterativo es el método de Newton que consiste en usar la fórmula de mejora:

Considere el problema de encontrar una raíz a una ecuación cuadrática, por ejemplo:

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

Un método directo para resolverlo es aplicar la fórmula general

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = -1, 2$$

Un método iterativo es el método de Newton que consiste en usar la fórmula de mejora:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{{x_i}^2 - x_i - 2}{2\,x_i - 1}$$

Si tomamos como primera aproximación x0 = 3 (para i = 0), tendremos

$$x_1 = x_0 - \frac{{x_0}^2 - x_0 - 2}{2\,x_0 - 1} = 3 - \frac{3^2 - 3 - 2}{2 \cdot 3 - 1} \approx 2.2$$

2 Sistemas lineales

En el caso de un sistema lineal de ecuaciones, las dos clases principales de métodos iterativos son los métodos iterativos estacionarios y los más generales métodos del subespacio de Krylov

2. Métodos iterativos estacionarios

Los métodos iterativos estacionarios resuelven un sistema lineal con un operador que se aproxima al original; y basándose en la medida de error (el residuo), desde una ecuación de corrección para la que se repite este proceso. Mientras que estos métodos son sencillos de derivar, implementar y analizar, la convergencia normalmente sólo está garantizada para una clase limitada de matrices.

4 Métodos del subespacio de Krylov

Los métodos del subespacio de Krylov forman una base ortogonal de la secuencia de potencias de la matriz por el residuo inicial (la secuencia de Krylov). Las aproximaciones a la solución se forman minimizando el residuo en el subespacio formado. El método prototípico de esta clase es el método de gradiente conjugado. Otros métodos son el método del residuo mínimo generalizado y el método del gradiente biconjugado

5 Convergencia

Dado que estos métodos forman una base, el método converge en N iteraciones, donde N es el tamaño del sistema. Sin embargo, en la presencia de errores de redondeo esta afirmación no se sostiene; además, en la práctica

N puede ser muy grande, y el proceso iterativo alcanza una precisión suficiente mucho antes. El análisis de estos métodos es difícil, dependiendo de lo complicada que sea la función del espectro del operador.

6 Precondicionantes

. El operador aproximativo que aparece en los métodos iterativos estacionarios puede incorporarse también en los métodos del subespacio de Krylov, donde se pasan de ser transformaciones del operador original a un operador mejor condicionado. La construcción de precondicionadores es un área de investigación muy extensa.

Historia

Probablemente, el primer método iterativo apareció en una carta de Gauss a un estudiante. Proponía resolver un sistema 4 por 4 de ecuaciones mediante la repetición de la solución del componente donde el residuo era mayor.

La teoría de métodos estacionarios se estableció sólidamente con el trabajo de D.M. Young, que empezó en la década de 1950. El método del gradiente conjugado se inventó en esa misma década, con desarrollos independientes de Cornelius Lanczos, Magnus Hestenes y Eduard Stiefel, pero su naturaleza y aplicación se malentendieron en esa época. Sólo en la década de 1970 se puso de manifiesto que estos métodos funcionan muy bien para resolver ecuaciones de derivadas parciales, especialmente del tipo elíptico

1.2. Raíz de una ecuación y fundamentos matemáticos

Teoremas principales en la teoría de ecuaciones:

1) Teorema D'Alambert – Gauss (Teorema fundamental del álgebra). Toda ecuación racional y entera en una variable tiene al menos una solución o raíz en el campo de los números complejos.

2) Corolario. Una ecuación racional y entera de grado "n" tiene cuando mas "n" soluciones diferentes.

3) Teorema del Factor. Si r1,r2,r3,..,rn son las raíces de una ecuación entonces esta puede factorizarse en la forma (x – r1)(x – r2)(x-r3)... (x - rn) = 0

Ejemplo: $r1 = 2,\ r2 = -2,\ r3 = 7$

$$(x-2)(x+2)(x-7)=0$$

$$(X^2-4)(x-7)=0$$

$$X^3-7x^2-4x+28=0$$

4) Regla de Ruffini (División sintética). Si ri es la raíz de una ecuación de grado n entonces esta puede degradarse hacia otra de grado n – 1.

Ejemplo:

$$X^3-7x^2-4x+28=0$$

$$Ri = 2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -7 & -4 & 28 \\ \downarrow & 2 & -10 & -28 \\ \hline 1 & -5 & -14 & 0 \end{array}$$

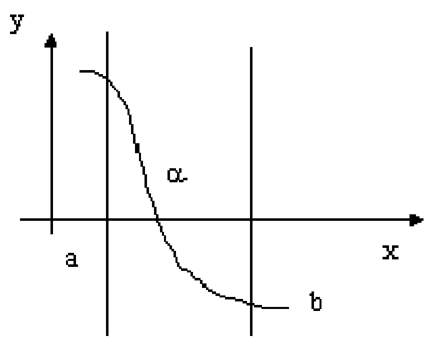
$$X^2-5x-14=0$$

5) Regla de D’escartes. Una ecuación racional y entera no podrá tener más raíces positivas, que cambio de signo en sus términos.

Ejemplo: $X^3-7x^2-4x+28=0$ Tiene 2 raíces positivas.

6) Teorema de Abel – Galois. En general es imposible resolver un número infinito de operaciones racionales, las ecuaciones de grado superior al cuarto.

7) Teorema de Weierstrass – Bolzano. Si f(x) es una función continua en el intervalo (a,b) y ocurre que f(a) f(b) < 0 entonces necesariamente existe un valor a (a,b) tal que f(a) = 0 (alfa es un cero de la función).



Ecuación. Es una proposición abierta que involucra una relación de equivalencia y que no se cumple para cualquier valor de la(s) variable(s).

$X^2 - 5x + 6$ Expresión o polinomio
$X^2 - 5x + 6 > 0$ Inecuación
$F(x) = X^2 - 5x + 6$ Función
$X^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ Identidades
$X^2 - 5x + 6 = 0$ Ecuación

Raíces o soluciones de una ecuación. Es el conjunto de todos los valores que verifiquen la ecuación.

$X^2 - 5x + 6 = 0$ ecuación raíces $\{2,3\}$
$X^2 - 5x + 6$ polinomio ceros $\{2,3\}$
$f(x) = X^2 - 5x + 6$ función ceros $\{2,3\}$

1.3 Métodos de intervalos

El método de la bisectriz es un método numérico sencillo, muy versátil para encontrar una raíz real en un intervalo en el que existe una raíz.

Su singular ventaja consiste en que funciona incluso con funciones no analíticas; sin embargo, sólo se debe utilizar el método después de un análisis gráfico.

Supongáse que hay una raíz de $f(x) = 0$ en un intervalo entre;

$x = a$ y $x = c$,

denotado por [a, c] o, de forma equivalente, por $c\ ^{3}\ x\ ^{3}\ a$.

El método de la bisectriz se basa en el hecho de que, cuando un intervalo [a, c] tiene una raíz, el signo de $y(x)$ en los extremos es distinto, o sea, $f(a)\ f(c) < 0$.

El primer paso de este método consiste en bisectar el intervalo [a, c] en dos mitades: [a, b] y [b, c], donde;

$b = (a + b) / 2$

Si se verifican los signos de $f(a)f(b)$ y $f(b)f(c)$, se sabe en que mitad del intervalo se encuentra la raíz.

De hecho, si $0\ ^{3}\ f(a)f(b)$, el intervalo [a, b], que incluye $x = a$ y $x = b$, contiene a la raíz; de lo contrario, la raíz esta en el otro intervalo, [b, c].

A continuación, se bisecta de nuevo el intervalo que contiene a la raíz.

Al repetir este procedimiento, el tamaño del intervalo que contiene a la raíz se hará cada vez más pequeño.

En cada paso se toma el punto medio del intervalo como la aproximación más actualizada a la raíz.

La iteración se detiene cuando el tamaño de la mitad del intervalo es menor que una tolerancia dada.

El tamaño del intervalo después de *n* pasos de iteración es

$(c_0 - a_0)/2^n$

donde a_0 y c_0 son valores iniciales, de modo que el numerador es el tamaño de intervalo inicial.

La ecuación anterior representa el máximo error que existe cuando se aproxima la raíz con el *n*-ésimo punto medio. Por tanto, si la tolerancia del error es t , el número de pasos de iteración necesarios es el entero n más pequeño que satisface

$t\ ^{3}(c_0 - a_0)/2^n$

De forma equivalente, $n\ ^{3} \log[(c_0 - a_0)/ t\ ]/\log(2)$ donde t es la tolerancia.

a. **Algoritmo:**
   1. Elija valores Iniciales para “a” y “b” de forma tal que lea función cambie de signo sobre el intervalo. Esto se puede verificar asegurandose de que :

f(a)*f(b) < 0

b. La primera aproximación a la raíz se determina con la formula:

x_n = (a + b) / 2

c. Realizar las siguientes evaluaciones para determinar en que subintervalo se encuentra la raíz:

f(a)*f(x_n) < 0 Entonces b = x_n

f(a)*f(x_n) > 0 Entonces a = x_n

f(a)*f(x_n) = 0 Entonces x_n Es la Raíz

d. Calcule la nueva aproximación

x_{n+1} = (a + b) / 2

e. Evaluar la aproximación relativa

| (x_{n+1} - x_n) / x_{n+1} | < Tolerancia

No. (Falso) Repetir el paso 3, 4 y 5

Si . (Verdadero) Entonces x_{n+1} Es la Raíz

1.3.1. Método de bisección

El método de bisección se basa en el siguiente teorema de Cálculo:

Teorema del Valor Intermedio

Sea $f(x)$ contínua en un intervalo $[a,b]$ y supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces para cada z tal que $f(a) < z < f(b)$, existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = z$. La misma conclusión se obtiene para el caso que $f(a) > f(b)$.

Básicamente el Teorema del Valor Intermedio nos dice que toda función contínua en un intervalo cerrado, una vez que alcanzó ciertos valores en los extremos del intervalo, entonces debe alcanzar todos los valores intermedios.

En particular, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces un valor intermedio es precisamente $z=0$, y por lo tanto, el Teorema del Valor Intermedio nos asegura que debe existir $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0)=0$, es decir, debe haber *por lo menos* una raíz de $f(x)$ en el intervalo (a,b).

El método de bisección sigue los siguientes pasos:

Sea $f(x)$ contínua,

i) **i)** Encontrar valores iniciales x_a, x_b tales que $f(x_a)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos, es decir,

$$f(x_a)\cdot f(x_b) < 0$$

ii) **ii)** La primera aproximación a la raíz se toma igual al punto medio entre x_a y x_b:

$$x_r = \frac{x_a + x_b}{2}$$

iii) **iii)** Evaluar $f(x_r)$. Forzosamente debemos caer en uno de los siguientes casos:

- $$f(x_a)\cdot f(x_r) < 0$$

  En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen signos opuestos, y por lo tanto la raíz se encuentra en el intervalo $[x_a, x_r]$.

- $$f(x_a)\cdot f(x_r) > 0$$

  En este caso, tenemos que $f(x_a)$ y $f(x_r)$ tienen el mismo signo, y de aquí que $f(x_r)$ y $f(x_b)$ tienen signos opuestos. Por lo tanto, la raíz se encuentra en el intervalo $[x_r, x_b]$.

- $f(x_a) \cdot f(x_r) = 0$

  En este caso se tiene que $f(x_r) = 0$ y por lo tanto ya localizamos la raíz.

El proceso se vuelve a repetir con el nuevo intervalo, hasta que:

$$|\in_a| < \in_s$$

es decir,

$$\left| \frac{x_{actual} - x_{previa}}{x_{actual}} \times 100\% \right| < \in_s$$

Ejemplo

Aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$ hasta que $|\in_a| < 1\%$.

Solución

Sabemos por lo visto en el ejemplo 1 de la sección anterior, que la única raíz de $f(x)$ se localiza en el intervalo $[1,1.5]$. Así que este intervalo es nuestro punto de partida; sin embargo, para poder aplicar el método de bisección debemos checar que $f(1)$ y $f(1.5)$ tengan signos opuestos.

En efecto, tenemos que

$$f(1) = e^{-1} - \ln 1 = e^{-1} > 0$$

mientras que

$$f(1.5) = e^{-1.5} - \ln(1.5) = -0.18233 < 0$$

Cabe mencionar que la función $f(x)$ sí es contínua en el intervalo $[1,1.5]$. Así pues, tenemos todos los requisitos satisfechos para poder aplicar el método de bisección. Comenzamos:

i) Calculamos el punto medio (que es de hecho nuestra primera aproximación a la raíz):

$$x_{r_1} = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$$

ii) Evaluamos $f(1.25) = e^{-1.25} - \ln(1.25) = 0.0636 > 0$

iii) Para identificar mejor en que nuevo intervalo se encuentra la raíz, hacemos la siguiente tabla:

$f(1)$	$f(1.25)$	$f(1.5)$
$+$	$+$	$-$

Por lo tanto, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.5]$.

En este punto, vemos que todavía no podemos calcular ningún error aproximado, puesto que solamente tenemos la primera aproximación. Así, repetimos el proceso con el nuevo intervalo $[1.25, 1.5]$.

Calculamos el punto medio (que es nuestra segunda aproximación a la raíz):

$$x_{r_2} = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

Aquí podemos calcular el primer error aproximado, puesto que contamos ya con la aproximación actual y la aproximación previa:

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{x_{r_2} - x_{r_1}}{x_{r_2}} \times 100\% \right| = 9.09\%$$

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso.

Evaluamos $f(1.375) = e^{-1.375} - \ln(1.375) = -0.06561 < 0$, y hacemos la tabla:

$f(1.25)$	$f(1.375)$	$f(1.5)$
$+$	$-$	$-$

Así, vemos que la raíz se encuentra en el intervalo $[1.25, 1.375]$.

Calculamos el punto medio,

$$x_{r_1} = \frac{1.25 + 1.375}{2} = 1.3125$$

Y calculamos el nuevo error aproximado:

$$\left|\epsilon_a\right| = \left|\frac{x_{r_3} - x_{r_2}}{x_{r_3}} \times 100\%\right| = 4.76\%$$

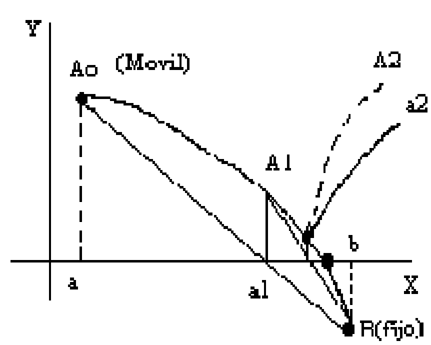
El proceso debe seguirse hasta cumplir el objetivo.

Resumimos los resultados que se obtienen en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1.25	
1.375	9.09%
1.3125	4.76%
1.28125	2.43%
1.296875	1.20%
1.3046875	0.59%

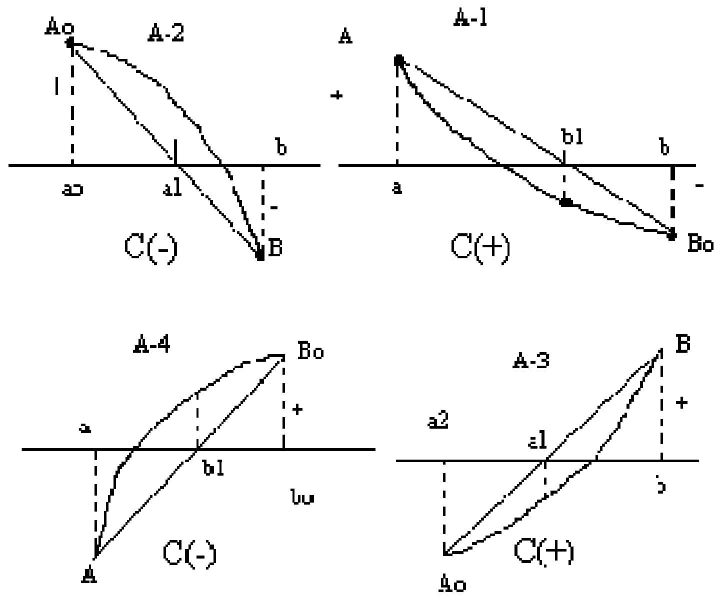
Así, obtenemos como aproximación a la raíz $x_{r_6} = \mathbf{1.3046875}$

1.3.2. Método falsa posición (Método de las cuerdas o de las secantes).



Supongamos una ecuación E(x) = 0 escrita en forma funcional f(x) = E (x) y que cumple el teorema de Bolzano en el intervalo (a, b)

Se presentan cuatro alternativas que finalmente se reducirán a solo dos casos.



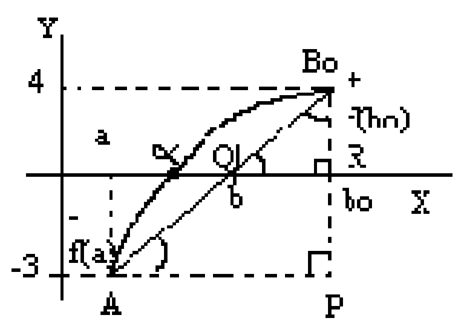
¿ Como determinar C(+), C(-) (La concavidad) ?

C(+) sí f''(x) > 0

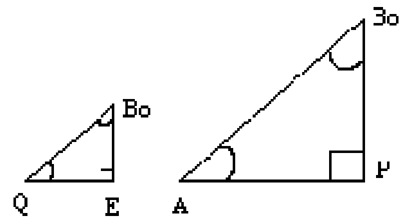
C(-) sí f''(x) < 0

A-1 y 4 bo f(a)f''(x) > 0

A-2 y 3 ao f(a)f''(x) < 0



Las formulas de los dos casos anteriores.



Son semejantes, por lo tanto se cumple el teorema de Thales (lados homólogos proporcionales)

|QR|/|AP| = |RBo|/|PBo|

Por el segundo teorema fundamental de la geometría analítica.

Bo – B1/Bo – a = f(bo) – 0/ f(bo) – f(a) despejando b1

B1 – Bo /A – bo = -f(b)/f(a) – f(b)

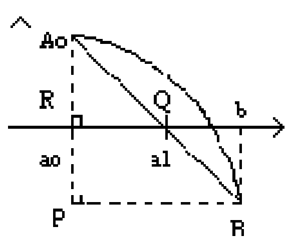
B1 – Bo = - f(bo) (a – bo)/F(a) – f(bo)

B1 = bo – f(bo) (a – bo)/ F(a) – f(bo)análogamente

B2 = b1 – f(b1) (a – b1)/F(a) – f(b1)

$$Bi = bi\text{-}1 - \frac{f(bi\text{-}1)\ (a\text{-}x)}{F(a) - f(bi\text{-}1)}$$

Si x = bi , bi –1



Para Computación

$$X = x - \frac{f(x)\ (a - x)}{F(a) - f(x)}$$

A1 – ao/B – ao = f(ao)/ f(ao) – f(b)

A1 – ao/B – ao = - f(ao)/ f(b) – f(ao)

A1 – a0 = - f(ao) (b – ao)/F(b) – f(ao)

A1 = ao – f(ao) (b – ao)/F(b) – f(ao)

¿ Cuando detenernos ?

Dado un emax. (+) > 0 pequeño, detenerse cuando | Xi – Xi-1| < emax.

Ejemplo: Halla una raíz de la ecuación X� - 5x + 1 + 0 con una precisión tal que emax = 0.001

F(x) = X� – 5x + 1

$$F''(x) = 6x > 0 \ \forall \ X \in (0, 1)$$

$$\begin{array}{ll} F(0) = 1 > 0 \qquad bo & \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ f(a) = 1 \end{array} \right. \\ F(1) = -3 < 0 & \end{array}$$

Sea X = b0 = 1

1. X = 1 – ((-3)(0 – 1) /1+3) = 1 – 0.75 = 0.25

   | Xi – Xi-1| = 0.75 < 0.001 sigue

2. X = 0.25 – ((-0.2344)(0 – 0.25) / 1+ 0.2344) = 0.25 – 0.04747 = 0.2025

   | Xi – Xi-1 |= 0.04747 < 0.001 sigue

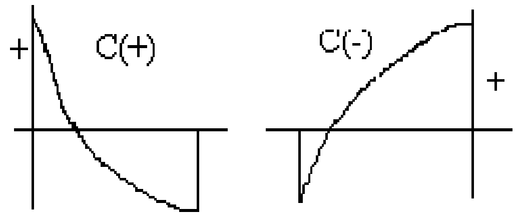
3. X = 0.2025 – ((-0.0042)(0 – 0.2025) / 1 + 0.0042) = 0.2025 – 0.00085 =

| Xi – Xi-1| = 0.00085 < 0.001 Detente y publica x

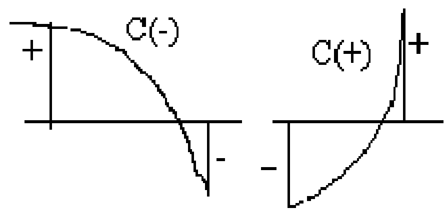
X= 0.20

Tenemos que:

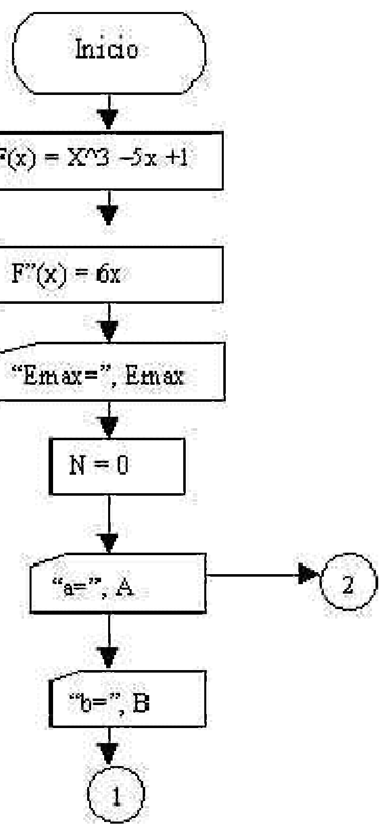
$$X = X - \frac{f(x)\,(a - x)}{F(a) - f(x)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = bo \\ a \text{ fija} \end{array} \right.$$

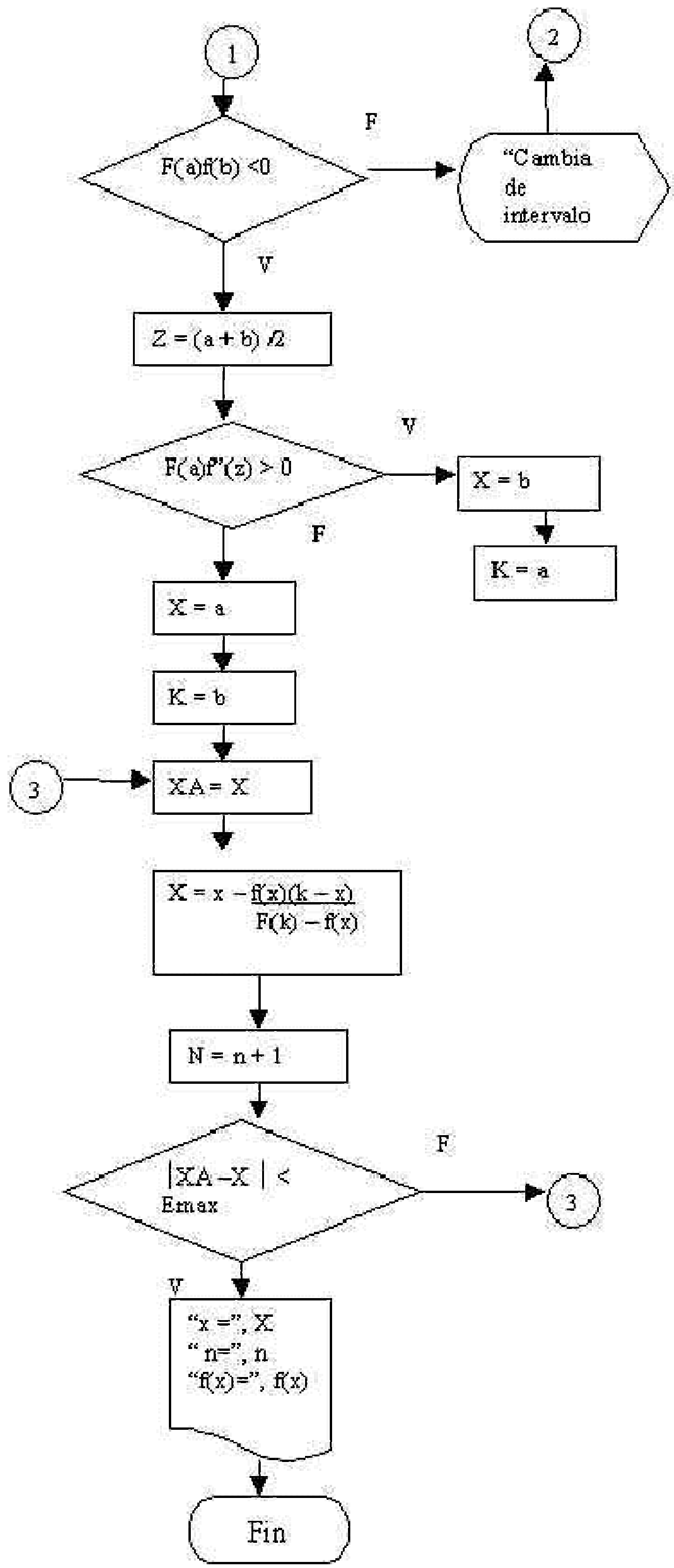


$$X = X - \frac{f(x)\,(b - x)}{F(b) - f(x)} \qquad \begin{cases} x = ao \\ b \text{ fija} \end{cases}$$



Nota: La concavidad la determinaremos según el signo de la segunda derivada.




1
2
F
F(a)f(b) <0
"Cambia
de
intervalo
V
Z = (a + b) /2
V
F(a)f''(z) > 0
X = b
K = a
F
X = a
K = b
3
XA = X
X = x − f(x)(k − x)
F(k) − f(x)
N = n + 1
F
|XA − X| <
Emax
3
V
"x =", X
" n=", n
"f(x)=", f(x)
Fin

Algoritmo 2.4 Método de posición falsa

Para encontrar una raíz real de la ecuación ***f(x) = 0***, proporcionar la función **F(X)** y los

DATOS: Valores iniciales **XY** y **XD** que forman un intervalo en donde se halla una raíz (**F(XI)*F(XD)<0**), criterio de convergencia **EPS**, criterio de exactitud **EPS1** y número máximo de iteraciones **MAXIT**.

RESULTADOS: La raíz aproximada **X** o un mensaje de falla.

PASO 1.- Hacer **I = 1;** **FI=F(XI); FD=F(XD)**

PASO 2.- Mientras **I < MAXIT** repetir los pasos 3 a 8.

PASO 3.- Hacer **XM = (XI*FD - XD*FI)/(FD-FI)**

PASO 4.- Si **ABS(FM) < EPS1** entonces **IMPRIMIR X** y **TERMINAR**. De otro modo **CONTINUAR**.

PASO 5.- Si **ABS(XD-XI) < EPS** entonces hacer **XM=(Xd+XI)/2; IMPRIMIR** "LA RAÍZ BUSCADA ES", **IMPRIMIR XM** y **TERMINAR**.

PASO 6.- Si **FD*FM > 0**, hacer **XD=XM; FD=FM**

PASO 7.- Si **FD*FM < 0**, hacer **XI=XM; FI=FM**

PASO 8.- Hacer **I = I + 1**

PASO 8.- **IMPRIMIR** mensaje de falla "EL MÉTODO NO CONVERGE A UNA RAÍZ" y **TERMINAR**.

1.3.3. División sintética de Horne-

Ahora vamos a calcular las raíces irracionales por medio de un proceso conocido con el nombre de *método de aproximación de Horner. Este m*étodo sólo es aplicable a las ecuaciones enteras, pero tiene la ventaja de que los cálculos necesarios son más sencillos que los usados en el método de la interpolación lineal. La facilidad de cálculo es debida a que cada cifra de la raíz se determina individualmente.

El razonamiento fundamental del método de Horner es muy sencillo. Supongamos que una ecuación entera dada f(x) = 0 tiene una raíz irracional que, correcta con 3 cifras decimales, es 2.124. Para determinar esta raíz primeramente veremos que la ecuación dada tiene una raíz entera. Después disminuiremos las raíces de f(x) = 0 en 2 unidades, obteniendo la nueva ecuación $f_1(x_1)$= 0 que tiene la raíz 0.124. Entonces hacemos ver que $f_1\{X_l\}$ = 0 tiene una raíz entre 0.1 y 0.2 y disminuimos sus raíces en 0.1, obteniendo una nueva ecuación $f_2(x_2)$ = 0 que tiene la raíz 0.024. Repitiendo el paso anterior, mostramos que $f_2(X_2)$ = O tiene una raíz entre 0.02 y 0.03 y disminuimos sus raíces en 0.02, obteniendo una nueva ecuación $f_3(x_3)$ = O que tiene la raíz 0.004. Continuando este proceso, es posible obtener la raíz con el número de cifras decimales correctas que se desee. Los detalles del método los vamos a explicar en el ejemplo que sigue.

Ejemplo. Demostrar que la ecuación

(1) $f(x) = x^3 + 5x^2 - x - 9 = 0$

tiene una raíz entre 1 y 2, Y calcularla con 3 cifras decimales por medio del método de Horner.

SOLUCION: Por división sintética encontramos *f(l)* = -4 Y *f(2)* = 17 lo que significa que la ecuación (1) tiene una raíz entre 1 y 2. Ahora disminuimos las raíces de la ecuación (1) en 1.

$$
\begin{array}{llll|l}
1 & +5 & -1 & -9 & \underline{1} \\
 & +1 & +6 & +5 & \\
\hline
1 & +6 & +5 & \multicolumn{1}{|l}{-4} & \\
 & +1 & +7 & & \\
\hline
1 & +7 & \multicolumn{1}{|l}{+12} & & \\
 & +1 & & & \\
\hline
1 & \multicolumn{1}{|l}{+8} & & & \\
\end{array}
$$

La ecuación transformada

(2) $f(x) = x_1^3 + 8x_1^2 + 12x_1 - 4 = 0$

tiene una raíz entre O y 1 que procederemos a determinar entre dos décimas sucesivas. Ya que la raíz de (2) es pequeña, su cubo y cuadrado son aún más pequeños, por lo que, para una primera aproximación, podemos despreciar los términos en X_1^3 y X_1^2, obteniendo así la *ecuación modificada 12x1-* 4 = O que tiene la solución $X_1 = 0.3^+$. Ya que esto es sólo una aproximación, debemos probarla en la ecuación (2). Por división sintética encontramos *f1(0.3)* = 0.347 Y *f1(0.2)* = -1.272. Por tanto, la ecuación (2) tiene una raíz entre 0.2 y 0.3. A continuación disminuimos las raíces de la ecuación (2) en 0.2. Al efectuar esta operación conviene dejar espacio suficiente para las decimales necesarias, como se indica:

1	+ 8.0	+ 12.00	— 4.000	|0.2
	+ 0.2	+ 1.64	+ 2.728	
1	+ 8.2	+ 13.64 |	—1.272	
	+ 0.2	+ 1.68 |		
1	+ 8.4 |	+15.32		
	+ 0.2 |			
1 |	+8.6			

La ecuación transformada: (3) $f_2(X_2) = X_2^3 + 8.6x_2^2 + 15.32x_2 - 1.272 = O$, tiene una raíz entre O y 0.1 que procederemos a localizar entre dos centésimas sucesivas. De los últimos dos términos de (3), obtenemos la ecua ción modificada $15.32x_2 - 1.272 = 0$ que tiene la solución $x_2 = 0.08+$. Por división sintética encontramos $f_2(0.08) = 0.009152$, $f_2(0.07) =$

-0.157117. Por tanto, la ecuación (3) tiene una raíz entre 0.07 y 0.08. Ahora disminuimos las raíces de (3) en 0.07:

1	+ 8.60	+ 15.3200	— 1.272000	|0.07
	+ 0.07	+ 0.6069	+ 1.114883	
1	+ 8.67	+ 15.9269 |	—0.157117	
	+ 0.07	+ 0.6118 |		
1	+ 8.74 |	+16.5387		
	+ 0.07 |			
1 |	+8.81			

La ecuación transformada es

(4) $f_3(x_3) = x_3^3 + 8.81x_3^2 + 16.5387x_3 - 0.157117 = 0$

tiene una raíz entre 0 y 0.01 la cual debemos localizar entre dos milésimas sucesivas. De los últimos dos términos de (4), tenemos la ecuación modificada $16.5387\,X_3 - 0.157117 = 0$, con la, solución $X_3 = 0.009+$. Por división sintética encontramos $f_3(0.009) = -10.007554361$ y $f_3(0.01) = 0.009152$. Por tanto, la ecuación (4) tiene una raíz entre 0.009 y *0.011*

Ahora disminuimos las raíces de la ecuación (4) en 0.009. Se deja como un ejercicio mostrar que la ecuación transformada es

(5) $f_4(x_4) = x_4^3 + 8.837x_4^2 + 16.697523x_4 - 0.007554361 = 0$.

De la ecuación modificada $16.697523x_4. - 0.007554361 = O$, obtenemos la solución $x_4. = 0.0004+$. En este punto, ya que la raíz de (5) es muy pequeña, la solución de la ecuación modificada es suficientemente precisa. Por: tanto, la raíz buscada es

$x = 1 + 0.2 + 0.07 + 0.009 + 0.0004 = 1.2794$

y, con precisión de 3 decimales, es 1.279.

NOTAS.

1. Por motivos de exposición, la resolución del ejemplo anterior se ha descrito en forma más extensa de lo necesario. En la práctica se puede hallar la solución en forma más breve, mostrando solamente las operaciones de disminución de las

raíces y omitiendo las ecuaciones transformadas de cuyos coeficientes ya se dispone.

2. Es muy importante probar cada cifra sucesiva de la raíz buscada para asegurarse de que la raíz de cada ecuación transformada está entre dos valores sucesivos.

3. Conforme se avanza en la determinación de aproximaciones por el método de Horner, las raíces de las ecuaciones transformadas se hacen más y más pequeñas por lo que las ecuaciones modificadas se hacen más y más precisas y a menudo pueden usarse para obtener cifras decimales adicionales.

4. Para hallar una raíz negativa de *f(x)* = O por el método de Horner, se calcula la raíz positiva correspondiente de *f (-x)* = O Y se le cambia el signo.

1.4. Métodos de punto fijo

Jamshid al-Kashi (1390-1450), el famoso matemático astrónomo de Samarkanda que para construir una tabla de funciones trigonométricas usó una iteración de punto fijo para hallar sin 1o. Construyó una tabla de senos y tangentes en intervalos de minuto de arco, dando los valores con 5 bloques sexagesimales. El valor sexagesimal de sin 1^o que encontró es

sin 1^o=1;2,49,43,11,14,44,16,26,7

que equivale al decimal

sin 1^o= 0.017452406437283571

1.4.1. Método de aproximaciones sucesivas

El método de las aproximaciones sucesivas es uno de los procedimientos más importantes y más sencillos de codificar. Supongamos la ecuación

$$f(x) = 0$$

donde *f(x)* es una función continua que se desea determinar sus raíces reales. Se sustituye *f(x)* por la ecuación equivalente

$$x = \varphi(x)$$

Se estima el valor aproximado de la raíz x_0, y se sustituye en el segundo miembro de la ecuación para obtener x_1.

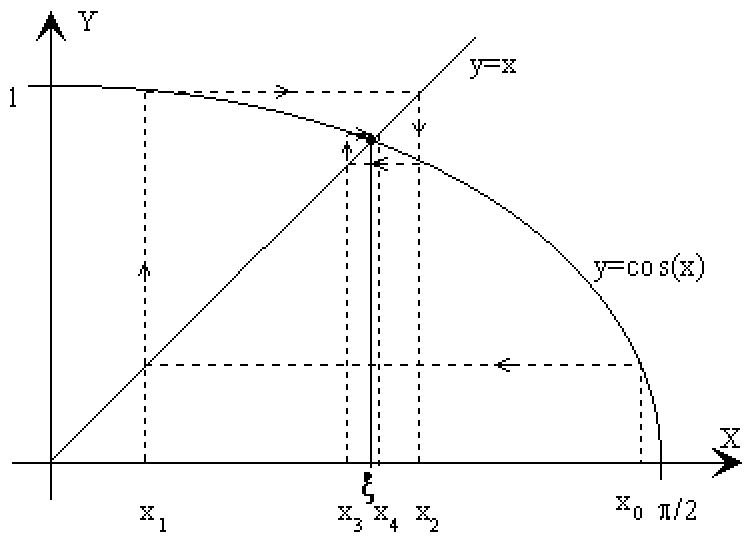
$x_1 = \varphi(x_0)$

Poniendo x_1 como argumento de $\varphi(x)$, obtendremos un nuevo número x_2, y así sucesivamente. Este proceso se puede sintetizar en la fórmula.

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \quad (1)$$

Si esta secuencia es convergente es decir, tiende hacia un límite, la solución ξ es

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$$



El método de iteración se explica geométricamente mediante el gráfico de la figura. Se dibuja la curva $y=\varphi(x)$, y la recta $y=x$, bisectriz del primer cuadrante. La abscisa ξ del punto de intersección es la raíz buscada.

Un ejemplo típico es la de encontrar la raíz de la ecuación

$$x = \cos(x)$$

Para encontrar la raíz, se comienza en el punto cualquiera de abscisa x_0 dentro del intervalo (0, π/2), y se traza la línea vertical hasta que interseca la curva, luego, desde este punto, se traza una línea horizontal hasta que se alcanza la recta bisectriz, este punto tendrá por abscisa x_1. Se traza de nuevo, una línea vertical hasta encontrar a la curva, y otra línea horizontal hasta encontrar la línea recta, el punto de intersección tiene de abscisa x_2 , y así sucesivamente. Como podemos apreciar en la figura, la sucesión x_1, x_2, x_3... tiende hacia la raíz ξ de la ecuación buscada.

Tal como nos sugiere la representación gráfica de la función en la figura, la raíz buscada está en el intervalo *0* a $\pi/2$. Tomamos una aproximación inicial a la raíz x_0, en dicho intervalo y aplicamos la fórmula (1), su codificación no presenta grandes dificultades.

```
double x=0.5;
while(true){
    x=Math.cos(x);
}
```

La condición de finalización

Primero, introducimos el valor inicial *x*, la primera aproximación, calculamos el valor del coseno de *x*, el valor devuelto (segunda aproximación), lo guardamos de nuevo en la variable *x*, y repetimos el proceso indefinidamente. El código aunque correcto, necesita terminarse en algún momento, cumpliendo una determinada condición. Cuando el valor absoluto del cociente entre la diferencia de dos términos consecutivos de la sucesión y uno de los términos, sea menor que cierta cantidad ε.

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\right|<\varepsilon$$

Este criterio, no es completamente riguroso, pero es un buen punto de partida para el estudio de este método. Volvemos a escribir el código incluyendo la condición de terminación y dentro de una función denominada *raiz*, a la que se le pasa el valor inicial y que devuelve la raíz buscada

```
final double ERROR=0.001;
double raiz(double x0){
    double x1;
    while(true){
        x1=Math.cos(x0);
        if(Math.abs((x1-x0)/x1)<ERROR)   break;
        x0=x1;
    }
    return x0;
}
```

En primer lugar, fijamos el valor de la constante ε o *ERROR*. Introducimos la primera aproximación a la raíz, y la guardamos en la variable x_0, calculamos su coseno y obtenemos la segunda aproximación, la guardamos en la variable x_1. Verificamos si se cumple la condición de terminación. En el caso de que no se cumpla, x_0 toma el valor de x_1 y se repite el proceso. En el momento en que se cumpla la condición de terminación, se sale del bucle y la función devuelve la raíz buscada. Como podemos observar las variables x_0 y x_1 guardan dos términos consecutivos de la sucesión que tiende hacia la raíz de la función.

La clase que describe el procedimiento

Queremos que el procedimiento numérico sea independiente de la función *f(x)* cuya raíz deseamos averiguar. Para ello, creamos una clase base abstracta denominada *Ecuación* con una función miembro *raíz* que defina el procedimiento numérico, y que deje sin definir la función *f(x)*, declarándola abstracta, dejando a las clases derivadas de *Ecuación* la definición de la función *f(x)* particular.

```
public abstract class Ecuacion {
    protected static final double ERROR=0.001;

    public double raiz(double x0){
        double x1;
        while(true){
            x1=f(x0);
            if(Math.abs(x1-x0)<ERROR)   break;
            x0=x1;
        }
        return x0;
    }

    abstract public double f(double x);
}
```

1.4.2. Método de la secante

Método de la Secante

Un problema del método de Newton-Raphson es el de la evaluación de la derivada, ésta se puede aproximar mediante el uso de una línea secante, en donde:

$$f'(x_n) = (f(x_{n-1}) - f(x_n))/(x_{n-1} - x_n)$$

Esta aproximación de la derivada se puede sustituir en la ecuación de Newton Raphson.

1.- Escoger un número inicial (x0)

2.- Calcular la siguiente aproximación de x1 utilizando la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

3.- **Si** | xn-xn+1 | < e **entonces** xn+1 es una raíz

De otra forma pasar al punto 2

El m_etodo de la secante es casi idéntico al de regula falsi salvo por un detalle: no se tiene en cuenta el signo de la función para estimar el siguiente punto. Se procede independientemente de los signos de la función.
Esto, como veremos, mejora el orden de convergencia pero hace que la convergencia del método sea más incierta.
En definitiva, el método de la secante consiste en considerar

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

a partir de ciertos valores x_0 y x_1 dados. El algoritmo deberá parar cuando $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que la precisión requerida.

La llamada a la rutina del método de la secante será como sigue:

```
it=secante(x0,x1,funci,epsi);
```

donde x_0 y x_1 son los valores iníciales para el método.

1.4.3. Método Newton Raphson

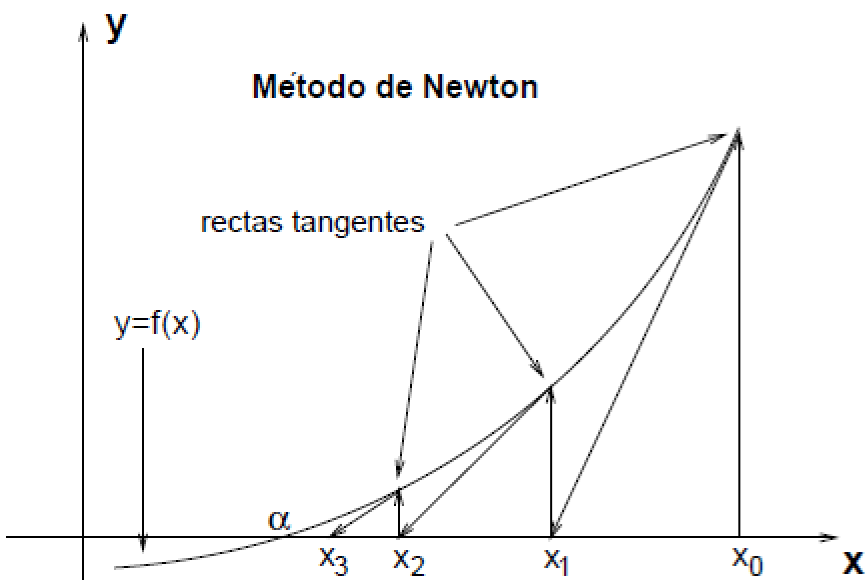
Si en el método de la secante x_n y x_{n-1} estuviesen muy próximos tendríamos que

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(x_n)$$

Esto da pie a considerar el siguiente método para resolver f(x) = 0:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Este es el llamado método de Newton, que requiere de un solo punto x_0 para iniciarse. La interpretación grafica del método es la correspondiente a la siguiente figura



Como criterio de parada, podemos considerar el mismo que para la secante: pararemos cuando $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que la precisión requerida.

Escribiremos un programa newton.m, para resolver ecuaciones f(x) = 0, con la sintaxis

```
it=newton(x0,funci,epsi);
```

Donde x_0 es el valor inicial para el método, *funci* es la función f(x)=f $_0$(x) y *epsi* la precisión requerida.
Compararemos el funcionamiento del método de Newton y de la secante considerando los ejemplos de la anterior práctica. Se pide, en cada caso, obtener

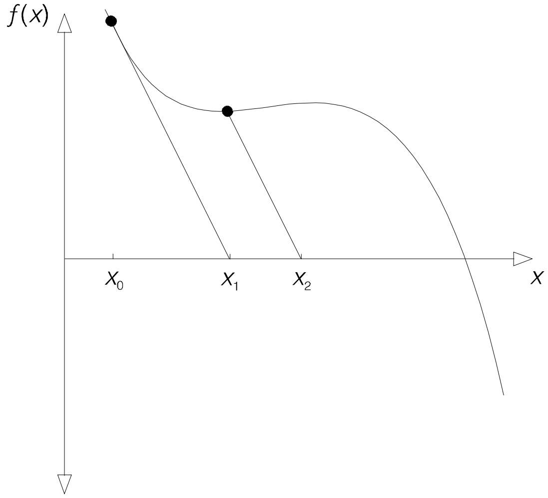
1. El número de iteraciones necesario para una precisión absoluta $\varepsilon = 10^{-15}$
2. Dibujar la diferencia $it(i) - \alpha$, siendo it(i) la sucesivas aproximaciones x_i que da el método y siendo α la raíz exacta.
3. Grafica de los órdenes de convergencia

   Consideraremos las siguientes ecuaciones f(x) = 0 y valores iníciales
   1. $f(x) = x^2 - 4$, $x_0 = 3$ (y $x_1 = 3.01$ para secante)
   2. $f(x) = \tan(x - 2)$, $x_0 = 3$ (y $x_1 = 3.01$ para secante)
   3. $f(x) = x - \sin(x) - 5 = 0$, $x_0 = 6$ (y $x_1 = 6.01$ para secante)
   4. $f(x) = x - \sin(x) - 5 = 0$, $x_0 = 4$ (y $x_1 = 4.01$ para secante)

En los dos últimos casos, tomaremos como α, como hicimos en la anterior practica, el último valor obtenido de it.

1.5.- Otros Métodos

1.5.1. Von misses



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

ventajas

++Rápido

++ Soluciona el problema de los máximos y mínimos locales

++ Aplicable a raíces complejas

++ Sólo necesita una aproximación inicial

Desventajas

– – Más lento que Newton-Raphson

– – Necesita calcular la derivada inicial

1.5.2. NEWTON BAILEY

.

Este es una mejora de el método de Newton-Raphson, sin embargo la segunda derivada de la función debe ser conocida.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)}}$$

Bibliografía

1. Skoog, West y Hollard: (1994) **Química Analítica**. Edit. Mc. Graw Hill.
2. L. V. Atkinson y P. J. Harley. *An Introduction to Numerical Methods with Pascal*. Adison-Wesley, 1983.
3. R. L. Burden y J. D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
4. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *Maple V Language Reference Manual*. Springer-Verlag, 1991.
5. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V*. Springer-Verlag, 1992.
6. Francis Sheid Rosa Elena Di Costanzo. *Métodos Numéricos*. McGraw Hill, 1989.
7. Stanley I. Grossman. *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.
8. Thomas Richard McCalla. *Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming*. Wiley, 1967.
9. Antonio Nieves y Federico C. Domínguez. *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. CECSA, 1995.
10. Ben Noble y James W. Daniel. *Algebra Lineal*. Prentice Hall, tercera edition, 1989.
11. W. Allen Smith. *Análisis Numérico*. Prentice Hall, 1988.

Actividades complementarias

1.-Obten por la regla de ruffini las raíces de la siguiente expresión:

$X^3-7x^2-4x+28=0$

2. del ejemplo anterior de acuerdo a la regla de descartes ¿Cuántas raíces positivas tiene el problema?

3.- ¿explica el método jacobi?

4.- Explica el método de división sintética de horner.