´1.- Tomemos la función del ejemplo anterior, $f(x)=\sqrt{x}$, donde claramente $f \in C^{\infty}$.

Supongamos que queremos calcular $\sqrt{1,5}$ y consideramos los nodos 1; 2; 3; 4.

Solucion:

i	X_i	$F(x_i)$	PDD	SDD	TDD
0	$X_o=1$	$F(x_0)=1$	$F(X_1,X_0)$=-0,414213		
1	$X_1=2$	$F(x_1)=$ 1,414213	$F(X_2,X_1)$=0,3178245	$F(X_2,X_1,X_0)$=-0,04819425	$F(X_3,X_2,X_1,X_0)$=0,00775216
2	$X_2=3$	$F(x_2)$=1,732050	$F(X_3,X_2)$=0,267949	$F(X_3,X_2,X_1)$=-0,02493775	
3	$X_3=4$	$F(x_3)=2$			

El polinomio de Newton de grado tres es:

$$P_3(x)=1+0{,}4142139(x-1)-0{,}04819425(x-1)(x-2)+0{,}007752166(x-1)(x-2)(x-3)$$

Luego tenemos que:

$$P_3(1{,}55)=1+0{,}4142139(1{,}55-1)-0{,}04819425(1{,}55-1)(1{,}55-2)+0{,}007752166(1{,}55-1)(1{,}55-2)(1{,}55-3)$$
$$P_3(1{,}55)=1{,}222062$$

Calculando el error se obtiene:

$$R_n=\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)=\frac{-15/16x^{-7/2}}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Como $f(x)=\sqrt{x}$ entonces $f^{(iv)}(x)=-15/16x^{-7/2}$

Ahora, para algún ξ ϵ (1,1,5) se debe satisfacer la igualdad. Vamos a tomar un ξ muy arbitrario (corriendo el riesgo de que no sea una elección conveniente) hacemos:

$$\xi=\frac{x_0+x}{2}=\frac{1+1{,}5}{2}=1{,}25$$

Es decir trabajamos con el punto medio entre el valor inicial de los datos y el valor a aproximar; por lo tanto

$$R_4=\frac{-15/16(1{,}25)^{-7/2}}{24}(1{,}25-1)(1{,}25-2)(1{,}25-3)(1{,}25-4)=0{,}016141615$$

2.- Con los siguientes datos, halle los polinomios de interpolación de Newton de grado: a)uno b) dos c) tres;

(-2; 21), (0;-1), (1; 12), (4; 147):

Solucion:

i	X_i	$F(x_i)$	PDD	SDD	TDD
0	$X_o=-2$	$F(x_0)=21$	$F(X_1,X_0)=-11$		
1	$X_1=0$	$F(x_1)=-1$	$F(X_2,X_1)=13$	$F(X_2,X_1,X_0)=8$	$F(X_3,X_2,X_1,X_0)=0$
2	$X_2=1$	$F(x_2)=12$	$F(X_3,X_2)45$	$F(X_3,X_2,X_1)=8$	
3	$X_3=4$	$F(x_3)=147$			

Donde las iniciales, PDD= Primera Diferencia Dividida, SDD= Segunda Diferencia Dividida y TDD= Tercera Diferencia Dividida, respectivamente.

Nota: Vemos que la última diferencia dividida de la tabla es cero, por lo tanto la tabla es llamada Tabla Perfecta. Ahora, como observamos que la columna de SDD (segunda diferencia dividida), tiene valores iguales; el polinomio interpolante es de grado 2.

a) El polinomio de grado uno de Newton es:

$$P_1(x) = F(x_0) + F(x_0, x_1)(x - x_0) = 21 + (-11)(x - (-2)) = 21 - 11(x + 2) = 21 - 11x - 22$$
$$luego..P_1(x) = -11x - 1$$

b) El polinomio de grado dos de Newton es:

$$P_2(x) = F(x_0) + F[x_0, x_1](x - x_0) + F[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) = 21 - 11(x + 2) + 8(x + 2)(x - 0)$$
$$.......... = 21 - 11x - 22 + 8x^2 + 16x$$
$$luego..P_2(x) = 8x^2 + 5x - 1$$

c) El polinomio de grado tres de Newton es: No existe.