4 **DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA**

4.1. Derivación numérica

La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma.

Por definición la derivada de una función f(x) es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Las aproximaciones numéricas que podamos hacer (para h > 0) serán:
Diferencias hacia adelante:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diferencias hacia atrás:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

La aproximación de la derivada por este método entrega resultados aceptables con un determinado error. Para minimizar los errores se estima que el promedio de ambas entrega la mejor aproximación numérica al problema dado:
Diferencias centrales:

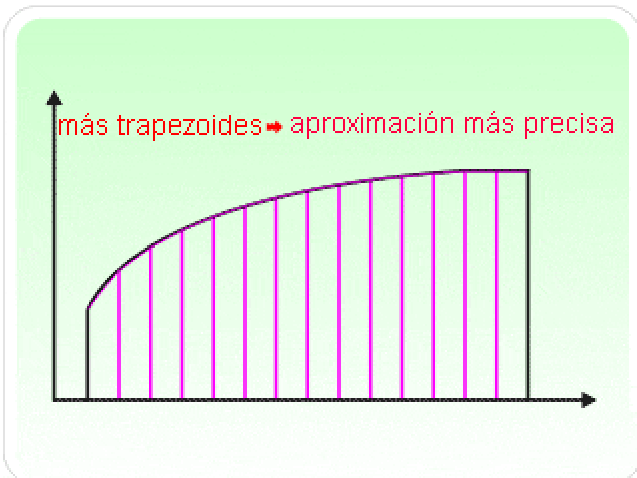
$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

4.2. Integración numérica

4.2.1. Método del trapecio

Método para encontrar el área aproximada bajo una curva, dividiéndola en una serie de secciones con forma trapezoidal, con valores igualmente espaciados de x, con bases que descansan en el eje x, y sumando después las áreas de todos los trapecios.



La regla del trapecio o regla trapezoidal es la primera de las fórmulas cerradas de Newton-Cotes.

Corresponde al caso en donde el polinomio de aproximación es de primer orden.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

En donde f1(x) corresponde a una línea recta que se representa como:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

El área bajo la línea recta es una aproximación de la integral de f(x) entre los límites a y b:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right] dx$$

El resultado de la integración es:

$$\boxed{I = (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}}$$

REGLA TRAPEZOIDAL DE SEGMENTOS MULTIPLES.

Una manera de mejorar la exactitud de la regla trapezoidal sencilla es la de dividir el intervalo de integración desde "a" hasta "b" en conjunto de segmentos y aplicar el método a cada uno de los segmentos.

En seguida se suman las áreas de los segmentos individuales y se obtiene la integral sobre el intervalo completo.

Por consiguiente, hay n segmentos de igual anchura:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Si a y b se igualan a x**0** y a x**n** (puntos base igualmente espaciados), la integral total se representa como:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla trapezoidal para cada una de las integrales, se obtiene:

$$I = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + h \cdot \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \ldots + h \cdot \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

agrupando términos

$$I = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_1) + f(x_n) \right)$$

usando la ecuación en la forma general, se obtiene:

$$I = (b - a) \cdot \frac{f(x_0) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_1) + f(x_n)}{2 \cdot n}$$

4.2.2. Método de Simpson

Cuando se realiza un experimento, generalmente, se obtiene una tabla de valores que se espera, tengan un comportamiento funcional.
Sin embargo, no se obtiene la representación explícita de la función que representa la regla de correspondencia entre las variables involucradas.
En estos casos, la realización de cualquier operación matemática sobre la nube de puntos que pretenda tratarla como una relación funcional, tropezará con dificultades considerables al no conocerse la expresión explícita de dicha relación. Entre estas operaciones se encuentra la integración de funciones.
Además, es conocido que existen relativamente pocas fórmulas y técnicas de integración, frente a la cantidad existente de funciones que se pueden integrar.
Es decir, un gran número de integrales de funciones elementales no puede ser expresada en términos de ellas. Entre estos casos singulares se tienen, a manera de ejemplo:

$$\int e^{x^2} dx, \int \frac{dx}{\ln(x)}, \int \sqrt{1+x^3}\, dx, \int \sin(x^2) dx, \int \sqrt{1+x^4}\, dx, \ldots$$

Para aclarar la contradicción antes señalada, se debe recordar la condición necesaria para que una función sea integrable. Dicha condición se menciona de inmediato, sin demostración:

Proposición 1 (Condición necesaria de Integrabilidad).

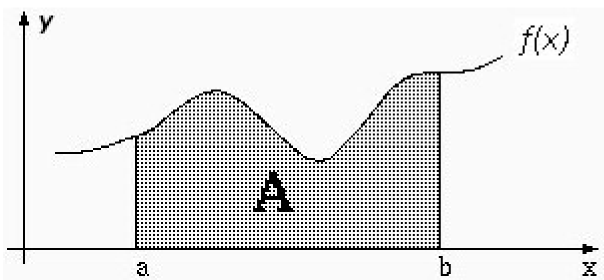
Si una función *f* es continua en el intervalo *[a, b]*, entonces la función *f* es integrable en el intervalo *[a, b]*.

No obstante que las condiciones de la proposición 1 son sumamente generales, no se tiene garantía de que, al aplicar los métodos usualmente conocidos para resolver integrales, se pueda encontrar la antiderivada de una función *f(x)* cualquiera necesaria para obtener la integral definida.
Estos apuntes pretenden ilustrar al lector de forma detallada y lo mas sencillo posible, una de las técnicas básicas que permiten resolver dicha situación, haciendo uso de los métodos o modelos numéricos, a través de la denominada "INTEGRACIÓN APROXIMADA, POR EL MÉTODO DE SIMPSON".

CÁLCULO DE ÁREAS

Uno de los problemas matemáticos más frecuentes es el cálculo del área que se forma entre una función ***f(x),*** el eje ***x*** y los límites ***a*** y ***b***. Por ejemplo, se necesita calcular el área A que aparece en la ***Fig. 1,*** reiterando que dicha área esta por debajo de la función *f(x)* entre los límites *a* y *b*:

Fig. 1



Partiendo del hecho que la función $f(x)$ y los valores ***a*** y ***b*** son conocidos. ***a*** se considera como el limite inferior y ***b*** se considera como límite superior.
En este tipo de problemas se pueden obtener dos tipos de soluciones:

- Soluciones algebraicas: se obtiene una fórmula precisa y exacta para el área solicitada.
- Soluciones numéricas: se calcula numéricamente una estimación del área.

Desde luego, la soluciones algebraicas son mejores que las numéricas, porque son exactas. Pero a veces, la complejidad de las funciones hace imposible (o difícil) obtener la solución algebraica, por lo que una solución numérica permite ahorrar tiempo.

EL MÉTODO DE SIMPSON

Además de aplicar la regla trapezoidal o Rectangular con segmentos o sub áreas cada vez más pequeñas, otra manera de obtener una estimación aún más exacta de una integral, es la de usar polinomios de orden superior para conectar los puntos, en el caso particular del método que usa orden 2, es decir de la forma $ax^2 + bx + c$.
A las fórmulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se les conoce como reglas de Simpson.
En este procedimiento, se toma el intervalo de anchura *2h*, comprendido entre x_i y x_{i+2} , y se sustituye la función *f(x)* por la parábola que pasa por tres puntos

(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), y (x_{i+2}, y_{i+2}). El valor del área aproximada, sombreada en la figura, se calcula con un poco más de trabajo y el resultado es

$$\frac{h}{3}\left[y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}\right]$$

, que se demuestra en seguida.

DESARROLLO DEL MODELO DE SIMPSON:

Para efectos de la demostración del método de Simpson, se asume cada sub área como un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$ con límites así: Limite inferior en –h, limite superior en h, por ende la mitad de la pequeña sub área se encontrará en el Punto 0, tal como se ilustra en Fig. 2.

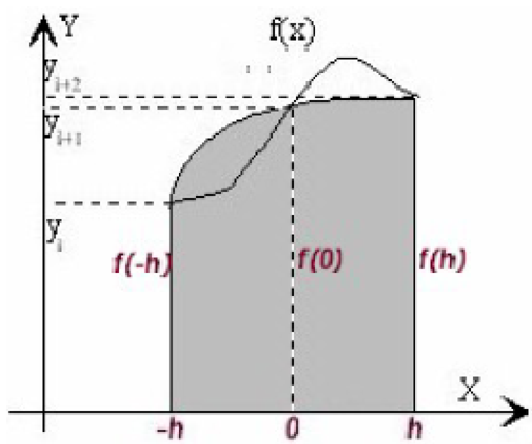


Fig. 2

Se procede a integrar dicho arco de parábola entre los límites descritos se tendrá:

$$\int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)dx = \left.\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right|_{-h}^{h}$$

, reemplazando cada uno de los límites, se tiene:

$$\left[\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch\right] - \left[-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} - ch\right]$$

, ahora destruyendo paréntesis se tendrá:

$$\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch + \frac{ah^3}{3} - \frac{bh^2}{2} + ch = 2\frac{ah^3}{3} + 2ch$$

, simplificando un poco la solución se obtendrá la ecuación 1 que se muestra a continuación.

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx=\frac{h}{3}\left[2ah^2+6c\right] \qquad \textbf{\textit{Ec 1}}$$

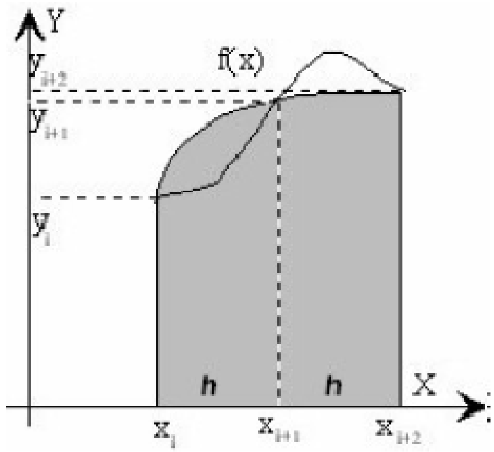


Fig. 3

Observando la Fig 3, en lo que respecta a las notaciones, se puede decir que $f(x_i)=y_i=f(-h)$, $f(x_{i+1})=y_{i+1}=f(0)$, $f(x_{i+2})=y_{i+2}=f(h)$, Entonces se podría obtener el siguiente sistemas de ecuaciones, evaluando la ecuación general de la parábola ax^2+bx+c en cada uno de los puntos de la pequeña sub área **[*-h,0-h*]**:

$f(-h)=ah^2-bh+c$, se puede tomar esta altura como y_0 = $f(x_i)$
$f(0)=c$, se toma esta altura como y_1 = $f(x_{i+1})$
$f(h)=ah^2+bh+c$, y esta altura como y_2 = $f(x_{i+2})$
De lo anterior se puede decir que:

$$y_0+y_2=2ah^2+2c \qquad \textbf{\textit{Ec 2}}$$

$$y_1=c \qquad \textbf{\textit{Ec 3}}$$

Retomando la ***Ec 1*** se puede expresar igualmente de la siguiente manera:

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx=\frac{h}{3}\left[2ah^2+2c+4c\right] \qquad \textbf{\textit{Ec 4}}$$

Reemplazando las ecuaciones 2 y 3 en la ***Ec 4*** se tiene que:

$$\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx=\frac{h}{3}\left[y_0+4y_1+y_2\right]=A_1 \qquad \textbf{Ec 5}$$

Interpretando la ecuación ***Ec 5*** con base en la sub área seleccionada ***A1*** para desarrollar el modelo de Simpson, se diría que el área del segmento es igual a la suma de la altura o función evaluada en el lado izquierdo mas cuatro veces la función evaluada en la parte central de la sub área mas la función evaluada en el lado derecho de la sub área, todo esto multiplicado por el ancho del sub área y dividido por 3.

La simple inspección visual de esta figura y la que describe el procedimiento de los trapecios o los rectángulos, confirma que el método de Simpson deberá ser mucho más exacto que los procedimientos mencionados.

Si a y b se denominan como x_0 y x_2, y $f(x_i)$ se representa mediante un polinomio de Lagrange de segundo orden, entonces la integral es:

$$I=\int_{x0}^{x2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\\ \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\\ \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)\end{array}\right]dx$$

Después de integrar y de reordenar los términos, resulta la siguiente ecuación:

$$I=(b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} \qquad \textbf{Ec 5a}$$

Si se toma $(b-a)/6\approx h/3$, $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, y $f(x_2)=y_2$, entonces se tiene como solución de la sub área $I=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$, que sería lo mismo mostrado en la ecuación 5.

Ahora, se sabe que el área que se desea encontrar sería la sumatoria de todas las sub áreas que se calculen. Al igual que los métodos de la regla trapezoidal y de la regla rectangular, entre mas sub áreas tenga la integral a calcular, mas exacto será el valor encontrado. El área aproximada en el intervalo *[a, b]* es:

$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$, ahora dejando esta ecuación en términos de la ecuación 5 se tendrá:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Simplificando $h/3$ y sumando los términos se tendrá:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \quad ,$$

donde ***n*** sería el número de sub áreas en el cual se ha dividido el área que se desea calcular.

A manera de ejemplo, si el área a calcular se hubiera dividido en 4 Sub áreas entonces en términos de y la solución seria:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8)$$

Bien, dependiendo como se agrupen los términos se llegaría a expresar la solución de dos maneras:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right] \qquad \textbf{\textit{Ec 6}}$$

ó

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 - y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right] \qquad \textbf{\textit{Ec 7}}$$

Los primeros términos del paréntesis, contienen los valores de la evaluación de la función en los extremos, el segundo, la suma de los términos de índice impar, y el tercero la suma de los términos de índice par.

Las dos ecuaciones se pudieran representar en términos de sumatorias de la siguiente manera.

La ***Ec 6***:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right] \qquad \textbf{\textit{Ec 8}}$$

La *Ec 7*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 - y_{2n} + \sum_{i=1}^{n}\left[4y_{2i-1} + 2y_{2i}\right]\right] \qquad \textit{Ec 9}$$

Para efectos de programación y en lo que respecta a mi concepto personal, es mejor la solución representada como ***Ec 9*** y con ella se continúa el trabajo. Hay que tener en cuenta que ***n*** es el número de sub áreas en la que se divide el área total a calcular y $h = dx/2$.

Ahora lo que se conoce en un momento determinado, cuando se desea calcular el valor de la integral definida, son los siguientes términos:

$a =$ Límite inferior

$b =$ Límite Superior

$n =$ Número de sub áreas

$f(x)$ La función sobre la cual se desea integrar.

En necesario entonces dejar la ecuación en términos de $f(x)$, a , b y dx ó h así:

Los primeros términos: $y_0 = f(a)$ y $y_{2n} = f(b)$

Analizando ahora los términos impares: $y_1 = f(a + 1dx/2)$, $y_3 = f(a + 3dx/2)$,

$y_5 = f(a + 5dx/2)$

,

, por tanto se tendría de manera general:

$y_{2i-1} = f(a + (2i-1)dx/2)$	ó	$y_{2i-1} = f(a + (2i-1)h)$		***Ec 10***

Analizando ahora los términos pares: $y_2 = f(a + 1dx)$, $y_4 = f(a + 2dx)$, $y_6 = f(a + 3dx)$, por tanto se tendría de manera general:

$y_{2i} = f(a + idx)$	ó	$y_{2i} = f(a + 2ih)$		***Ec 11***

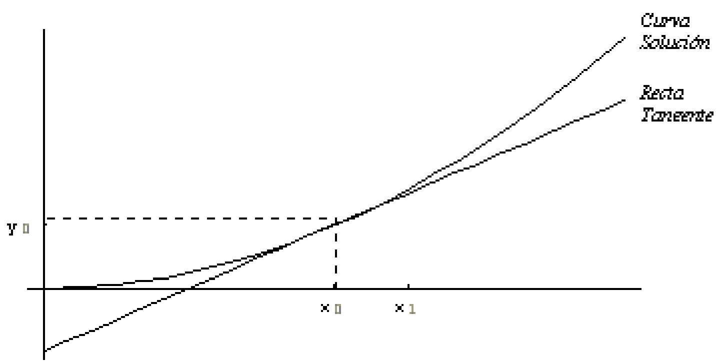
Dejando la ecuación *Ec 9* en términos de lo expresado en las ecuaciones *Ec 10* y *Ec 11* se tendrá en forma definitiva la solución así:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) - f(b) + \sum_{i=1}^{n}\left[4f(a + (2i-1)dx/2 + 2f(a + idx)\right]\right] \qquad \textit{Ec 12}$$

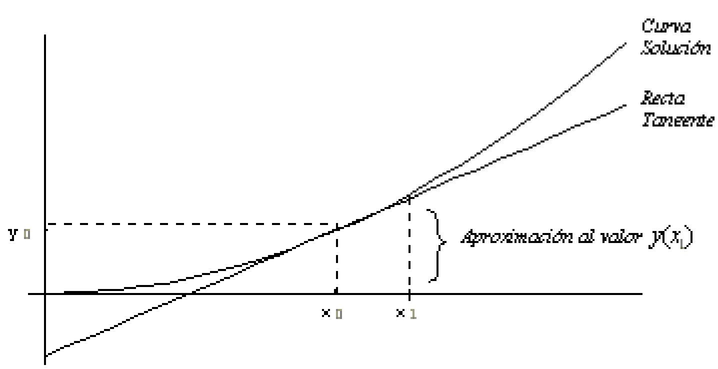
4.2.3. Método de Euler

La idea del método de Euler es muy sencilla y está basada en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.



Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.



Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0). De los cursos de Geometría Analítica, sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'\big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0, y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de *h* es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de *h* es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en n partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en n pasos, aplicando la fórmula anterior n veces de un paso a otro, con la nueva h igual a $\dfrac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & x_0 + h & x_0 + 2h & \cdots x_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
y_0 & y_1 & y_2 & \cdots y_n \\
 & & & (\textbf{\textit{solución}})
\end{array}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1), y por lo tanto, si sustituimos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud *h*.

Ejemplo 1
Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0.5)$.

NOTA
Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

***Solución Analítica*.**

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

Solución Numérica
Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si dividimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0.1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la formula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0,y_0) & = & 1 + 0.1[2(0)(1)] & = & 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la formula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 + h & = & 0.2 \\ y_2 & = & y_1 + hf(x_1,y_1) & = & 1 + 0.1[2(0.1)(1)] & = & 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluímos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la formula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_v| = \left|\frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\%\right| = 5.42\%$$

4.2.4. Método de Romberg

Sea $I(h)$ el valor de la integral que aproxima a $I = \int_a^b f(x)dx$, mediante una partición de subintervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$ y usando la regla del trapecio. Entonces,

$$I = I(h) + E(h)$$

donde $E(h)$ es el error de truncamiento que se comete al aplicar la regla.

El *método de extrapolación de Richardson* combina dos aproximaciones de integración numérica, para obtener un tercer valor más exacto.

El algoritmo más eficiente dentro de éste método, se llama *Integración de Romberg,* la cual es una fórmula recursiva.
Supongamos que tenemos dos aproximaciomnes : $I(h_1)$ e $I(h_2)$

$$\therefore \left.\begin{matrix} I = I(h_1) + E(h_1) \\ I = I(h_2) + E(h_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

Se puede demostrar que el error que se comete con la regla del trapecio para *n* subintervalos está dado por las siguientes fórmulas:

$$E(h_1) \approx -\frac{(b-a)}{12} h_1^2 \overline{f}''$$

$$E(h_2) \approx -\frac{(b-a)}{12} h_2^2 \overline{f}''$$

donde $\overline{f}''$ es un promedio de la doble derivada entre ciertos valores que pertenecen a cada uno de los subintervalos.

Ahora bien, si suponemos que el valor de f'' es constante, entonces :

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{\frac{-(b-a)}{12} h_1^2 \overline{f}''}{\frac{-(b-a)}{12} h_2^2 \overline{f}''} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

$$\therefore\ E(h_1) \approx E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Sustituyendo esto último en nuestra primera igualdad, tenemos que:

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \approx I(h_2) + E(h_2)$$

$$\therefore\ I(h_1) - I(h_2) \approx E(h_2) - E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

$$= E(h_2)\left[1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right]$$

De aquí podemos despejar $E(h_2)$:

$$E(h_2) \approx \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

$$\therefore I = I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}$$

En el caso especial cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$ (que es el algoritmo de Romberg), tenemos :

$$I \approx I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - 2^2}$$

$$\therefore I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{I(h_1)}{3}$$

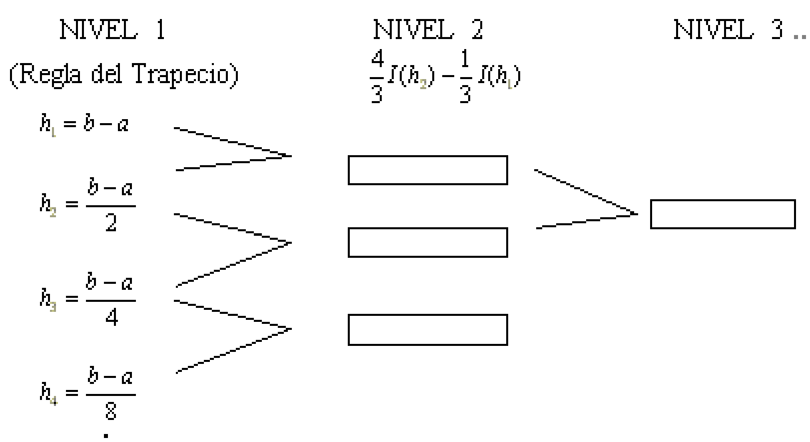
Esta fórmula es solo una parte del algoritmo de Romberg. Para entender el método, es conveniente pensar que se trabaja en niveles de aproximación. En un primer nivel, es cuando aplicamos la regla del Trapecio, y para poder usar la fórmula anterior, debemos de duplicar cada vez el número de subintervalos: así, podemos comenzar con un subintervalo, luego con dos, cuatro, ocho, etc, hasta donde se desee.

Posteriormente, pasamos al segundo nivel de aproximación, que es donde se usa la fórmula anterior, tomando las parejas contiguas de aproximación del nivel anterior, y que corresponden cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$.

Después pasamos al nivel tres de aproximación, pero aquí cambia la fórmula de Romberg, y así sucesivamente hasta el último nivel, que se alcanza cuando solo contamos con una pareja del nivel anterior.

Desde luego, el número de niveles de aproximación que se alcanzan, depende de las aproximaciones que se hicieron en el nivel 1. En general, si en el primer nivel, iniciamos con *n* aproximaciones, entonces alcanzaremos a llegar hasta el nivel de aproximación *n*.

Hacemos un diagrama para explicar un poco más lo anterior._

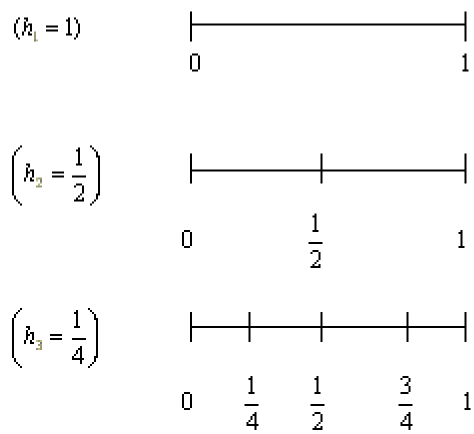


<u>Ejemplo 1</u>.
Usar el algoritmo de Romberg, para aproximar la integral

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

usando segmentos de longitud $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

***Solución*.**
Primero calculamos las integrales del nivel 1, usando la regla del trapecio para las longitudes de segmentos indicadas:



Con estos datos, tenemos:

$$I(h_1) = \frac{1-0}{2}\left[e^{0^2} + e^{1^2}\right] = 1.859140914$$

$$I(h_2) = \frac{1-0}{4}\left[e^{0^2} + 2e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{1^2}\right] = 1.571583165$$

$$I(h_3) = \frac{1-0}{8}\left[e^{0^2} + 2\left[e^{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\right] + e^{1^2}\right] = 1.490678862$$

Ahora pasamos al segundo nivel de aproximación donde usaremos la fórmula que se dedujo anteriormente:

$$\frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

donde $I(h_1)$ es la integral menos exacta (la que usa menos subintervalos) e $I(h_2)$ es la más exacta (la que usa el doble de subintervalos).

En un diagrama vemos lo siguiente:

$$
\begin{array}{l}
1.859140914 \\
\qquad \searrow \\
\qquad \quad \frac{4}{3}(1.571583165)-\frac{1}{3}(1.859140914)=1.475730582 \\
\qquad \nearrow \\
1.571583165 \\
\qquad \searrow \\
\qquad \quad \frac{4}{3}(1.490678862)-\frac{1}{3}(1.571583165)=1.463710761 \\
\qquad \nearrow \\
1.490678862
\end{array}
$$

Para avanzar al siguiente nivel, debemos conocer la fómula correspondiente. De forma similar a la deducción de la fórmula,

$$\frac{4}{3}I(h_2)-\frac{1}{3}I(h_1)$$

se puede ver que la fórmula para el siguiente nivel de aproximación (nivel 3) queda como sigue:

$$\frac{16}{15}I_m-\frac{1}{15}I_l$$

donde:

I_m es la integral más exacta

I_l es la integral menos exacta

En el siguiente nivel (nivel 4) se tiene la fórmula

$$\frac{64}{63}I_m-\frac{1}{63}I_l$$

En el ejemplo anterior, obtenemos la aproximación en el nivel 3 como sigue:

$$\frac{16}{15}(1.463710761)-\frac{1}{15}(1.475730582)=1.46290944$$

Así, podemos concluir que el valor de la aproximación, obtenido con el método de Romberg en el ejemplo 1, es:

$$2. \quad \int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1.46290944$$

4.2.1. Combinación de los métodos

Bibliografía

1. Skoog, West y Hollard: (1994) **Química Analítica**. Edit. Mc. Graw Hill.
2. L. V. Atkinson y P. J. Harley. *An Introduction to Numerical Methods with Pascal*. Adison-Wesley, 1983.
3. R. L. Burden y J. D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
4. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *Maple V Language Reference Manual*. Springer-Verlag, 1991.
5. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V*. Springer-Verlag, 1992.
6. Francis Sheid Rosa Elena Di Costanzo. *Métodos Numéricos*. McGraw Hill, 1989.
7. Stanley I. Grossman. *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.
8. Thomas Richard McCalla. *Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming*. Wiley, 1967.
9. Antonio Nieves y Federico C. Domínguez. *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. CECSA, 1995.
10. Ben Noble y James W. Daniel. *Algebra Lineal*. Prentice Hall, tercera edition, 1989.
11. W. Allen Smith. *Análisis Numérico*. Prentice Hall, 1988.

Actividades complementarias

1 .-Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

2.- Usar el algoritmo de Romberg para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Agregando a la tabla anterior $I(h_4)$ donde $h_4 = \frac{1}{8}$.