1.- Aplicar el método de Euler para aproximar $y(1.3)$, dada la ecuación diferencial.

$$y' = x^2 + 0.5y^2$$

$$y(1) = 2$$

Solución

Nuevamente vemos que nos conviene dividir en pasos la aproximación. Así, elegimos nuevamente $h = 0.1$ para obtener el resultado final en tres pasos. Por lo tanto, aplicamos el método de Euler con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & x^2 + 0.5y^2 \end{cases}$$

En un primer paso, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 1.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 2 + 0.1\left[1^2 + 0.5(2)^2\right] & = & 2.3 \end{cases}$$

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.1	2.3
2	1.2	2.6855
3	1.3	3.1901

De lo cual, concluímos que la aproximación buscada es:

$$y(1.3) \approx 3.1901$$

$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$

2.- Usar el algoritmo de Romberg para aproximar la integral:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Agregando a la tabla anterior $I(h_4)$ donde $h_4 = \frac{1}{8}$.

***Solución*.**
Calculamos $I(h_4)$ con la regla del trapecio:

$$I(h_4) = \frac{1-0}{16}\left[e^{0^2} + 2\left[e^{\left(\frac{1}{8}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{3}{8}\right)^2} + e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + e^{\left(\frac{5}{8}\right)^2} + e^{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + e^{\left(\frac{7}{8}\right)^2}\right] + e^{1^2}\right]$$

$$I(h_4) = 1.469712276$$

Tenemos entonces la siguiente tabla:

1.859140914			
	147573082		
1.571583165		1.46290944	
	1.463710761		1.462653593
1.490678862		1.462657591	
	1.462723414		
1.469712276			

De donde concluímos que la aproximación buscada es:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1.462653593$$

<u>Ejemplo 3</u>.
Aproximar la siguiente integral:

$$\int_1^2 e^x \ln x dx$$

usando el método de Romberg con segmentos de longitud

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{2}, \quad h_3 = \frac{1}{4}, \quad h_4 = \frac{1}{8}$$

***Solución*.**
Igual que arriba, primero usamos la regla del trapecio (con los valores de *h* indicados) para llenar el nivel 1. Tenemos entonces que:

$$I(h_1) = \frac{2-1}{2}\left[e^1 \ln 1 + e^2 \ln 2\right] = 2.560851701$$

$$I(h_2) \frac{2-1}{4}\left[e^1 \ln 1 + 2e^{1.5} \ln 1.5 + e^2 \ln 2\right] = 2.189010122$$

$$I(h_3)=\frac{2-1}{8}\left[e^1\ln 1+2\left(e^{\frac{5}{4}}\ln\frac{5}{4}+e^{\frac{3}{2}}\ln\frac{3}{2}+e^{\frac{7}{4}}\ln\frac{7}{4}\right)+e^2\ln 2\right]=2.09430857$$

$$I(h_4)=\frac{2-1}{16}\left[e^1\ln 1+2\left[e^{\frac{1}{8}}\ln\frac{1}{8}+e^{\frac{2}{8}}\ln\frac{2}{8}+\cdots+e^{\frac{7}{8}}\ln\frac{7}{8}\right]+e^2\ln 2\right]=2.070524501$$

A continuación, usamos las fórmulas de Romberg para cada nivel y obtenemos la siguiente tabla:

2.560851701			
	2.065062929		
2.189010122		2.062586615	
	2.062741385		2.062586821
2.094308569		2.062586818	
	2.062596478		
2.070524501			

De donde concluímos que la aproximación buscada es:

$$\int_1^2 e^x \ln x\,dx \approx 2.062586821$$

Podemos escribir una fórmula general para calcular las aproximaciones en cada uno de los niveles como sigue: