5. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y PARCIALES

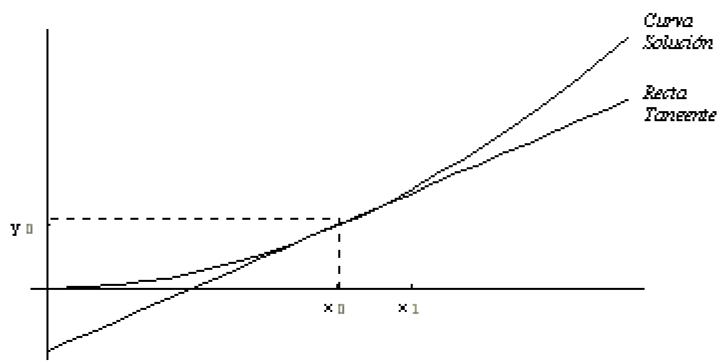
5.1. Fundamentos matemáticos

5.2. Métodos de un paso

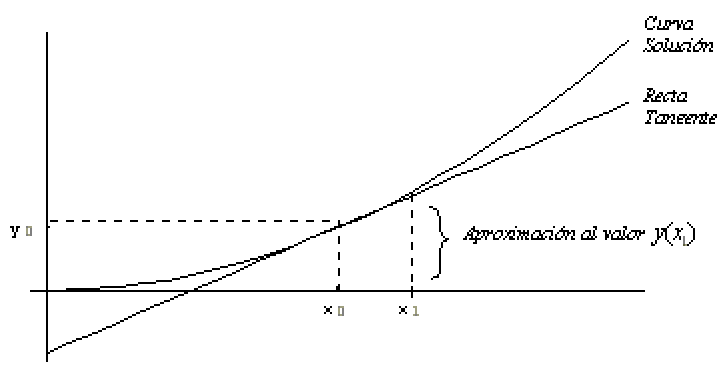
5.2.1. Método de Euler

La idea del método de Euler es muy sencilla y está basada en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado.

Supongamos que tuviéramos la curva solución de la ecuación diferencial y trazamos la recta tangente a la curva en el punto dado por la condición inicial.



Debido a que la recta tangente aproxima a la curva en valores cercanos al punto de tangencia, podemos tomar el valor de la recta tangente en el punto x_1 como una aproximación al valor deseado $y(x_1)$.



Así, calculemos la ecuación de la recta tangente a la curva solución de la ecuación diferencial dada en el punto (x_0, y_0). De los cursos de Geometría Analítica, sabemos que la ecuación de la recta es:

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

donde m es la pendiente. En este caso, sabemos que la pendiente de la recta tangente se calcula con la derivada:

$$m = y'\big|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es :

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$$

Ahora bien, suponemos que x_1 es un punto cercano a x_0, y por lo tanto estará dado como $x_1 = x_0 + h$. De esta forma, tenemos la siguiente aproximación:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx f(x_0, y_0)(\cancel{x_0} + h - \cancel{x_0}) + y_0$$

De aquí, tenemos nuestra fórmula de aproximación:

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Esta aproximación puede ser suficientemente buena, si el valor de *h* es realmente pequeño, digamos de una décima ó menos. Pero si el valor de *h* es más grande, entonces podemos cometer mucho error al aplicar dicha fórmula. Una forma de reducir el error y obtener de hecho un método iterativo, es dividir la distancia $h = |x_1 - x_0|$ en *n* partes iguales (procurando que estas partes sean de longitud suficientemente pequeña) y obtener entonces la aproximación en *n* pasos, aplicando la fórmula anterior *n* veces de un paso a otro, con la nueva *h* igual a $\dfrac{|x_1 - x_0|}{n}$.

En una gráfica, tenemos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & x_0 + h & x_0 + 2h & \cdots x_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
y_0 & y_1 & y_2 & \cdots y_n \\
 & & & (\textbf{\textit{solución}})
\end{array}$$

Ahora bien, sabemos que:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Para obtener y_2 únicamente hay que pensar que ahora el papel de (x_0, y_0) lo toma el punto (x_1, y_1), y por lo tanto, si sustituímos los datos adecuadamente, obtendremos que:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

De aquí se ve claramente que la fórmula recursiva general, está dada por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Esta es la conocida fórmula de Euler que se usa para aproximar el valor de $y(x_1)$ aplicándola sucesivamente desde x_0 hasta x_1 en pasos de longitud *h*.

<u>Ejemplo 1</u>
Dada la siguiente ecuación diferencial con la condición inicial:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Aproximar $y(0.5)$.

<u>NOTA</u>
Primero observamos que esta ecuación sí puede resolverse por métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, podemos aplicar el método de separación de variables. Veamos las dos soluciones.

***Solución Analítica*.**

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$x = 0 \rightarrow y = 1$$

$$\ln 1 = 0^2 + c$$

$$0 = c$$

Por lo tanto, tenemos que la curva solución real está dada:

$$\ln y = x^2$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2}$$

Y por lo tanto, el valor real que se pide es:

$$y(0.5) = e^{(0.5)^2} = 1.28403$$

Solución Numérica
Aplicamos el método de Euler y para ello, observamos que la distancia entre $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$ no es lo suficientemente pequeña. Si didimos esta distancia entre cinco obtenemos un valor de $h = 0.1$ y por lo tanto, obtendremos la aproximación deseada en cinco pasos.

De esta forma, tenemos los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

Sustituyendo estos datos en la formula de Euler, tenemos, en un primer paso:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_0 + h & = & 0.1 \\ y_1 & = & y_0 + hf(x_0, y_0) & = & 1 + 0.1[2(0)(1)] & = & 1 \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la formula de Euler, tenemos, en un segundo paso:

$$\begin{cases} x_2 & = & x_1 + h & = & 0.2 \\ y_2 & = & y_1 + hf(x_1, y_1) & = & 1 + 0.1[2(0.1)(1)] & = & 1.02 \end{cases}$$

Y así sucesivamente hasta obtener y_5. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	1.02
3	0.3	1.0608
4	0.4	1.12445
5	0.5	1.2144

Concluímos que el valor aproximado, usando el método de Euler es:

$$y(0.5) \approx 1.2144$$

Puesto que en este caso, conocemos el valor verdadero, podemos usarlo para calcular el error relativo porcentual que se cometió al aplicar la formula de Euler. Tenemos que:

$$|\epsilon_v| = \left|\frac{1.28402 - 1.2144}{1.28402} \times 100\%\right| = 5.42\%$$

5.2.2. Método de Euler mejorado

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

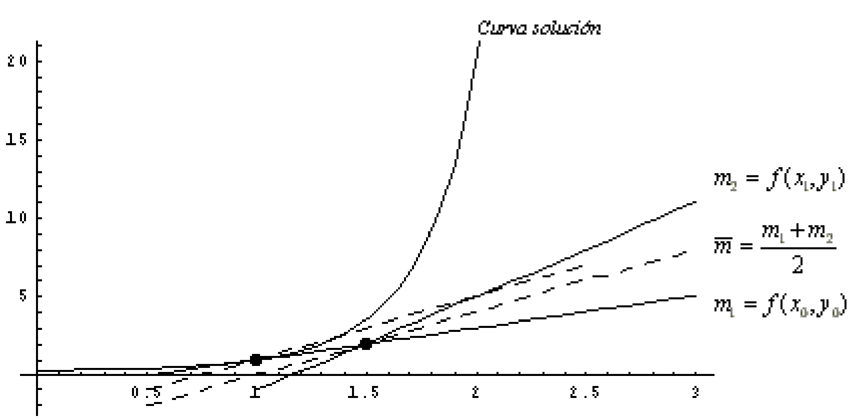
La fórmula es la siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*_{n+1})}{2}\right]$$

donde

$$y^*_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de la aproximación, con base en la siguiente gráfica:



En la gráfica, vemos que la pendiente promedio $\overline{m}$ corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1, y_1), donde y_1 es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condición inicial, y se considera el valor de esta recta en el punto $x = x_1$ como la aproximación de Euler mejorada.

Ejemplo 1

Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $y(0.5)$ si:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

Solución

Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos $h = 0.1$ y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de y_n^* primero y posteriormente el de y_n.

Para aclarar el método veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:

$$\begin{cases} x_0 & = & 0 \\ y_0 & = & 1 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & 2xy \end{cases}$$

En nuestra primera iteración tenemos:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \\ \therefore y_1 = y_0 + h\left(\dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)}{2}\right) = 1.01 \end{cases}$$

Nótese que el valor de y_1^* coincide con el y_1 (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular y_2^* se usará y_1 y no y_1^*.

Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\ y_2^{*} = y_1 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.0302 \\ y_2 = y_1 + h\left(\dfrac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^{*})}{2}\right) = 1.040704 \end{cases}$$

Nótese que ya no coinciden los valores de y_2 (Euler 1) y el de y_2^{*}. El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

Concluímos entonces que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0.5) \approx 1.28336$$

Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left|\frac{1.28402 - 1.28336}{1.28402} \times 100\%\right| = 0.05\%$$

Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método veremos cómo se reduce aún más este error prácticamente a un 0%!

5.2.3. Método de Runge Kutta de cuarto orden

La convergencia lenta del método de Euler y lo restringido de su región de estabilidad absoluta nos lleva a considerar métodos de orden de convergencia mayor. En clase mencionamos que en cada paso el método de Euler se mueve a lo largo de la tangente de una cierta curva que esta "cerca" a la curva desconocida o buscada. Los métodos Runge-

Kutta extienden esta idea geométrica al utilizar varias derivadas o tangentes intermedias, en lugar de solo una, para aproximar la función desconocida. Los métodos Runge-Kutta más simples se obtienen usando dos de estas derivadas intermedias.

Métodos Runge-Kutta de dos Evaluaciones: Aqui buscamos métodos o fórmulas numéricas de la forma:

$$y_{j+1} = y_j + h[\gamma_1 f(t_j, y_j) + \gamma_2 f(t_j + \alpha h, y_j + \beta h f(t_j, y_j))] \quad , \quad j \geq 0$$

Note que apesar de que en la fórmula se perciven tres f's, el método envuelve solo dos evaluaciones ya que dos de estas f's tienen los mismos argumentos. La idea ahora es determinar los parámetros $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ de modo que el método tenga orden de convergencia lo más alto posible. Un análisis del error local de esta fórmula basado en el Teorema de Taylor muestra que el orden más alto que puede tener esta fórmula es dos y que esto puede ocurrir si y solo si:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad , \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2\gamma_2} \quad , \quad \gamma_2 \neq 0$$

Es decir si $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ cumplen con estas condiciones, entonces $e_j = y(t_j) - y_j = O(h^2)$ para toda j. Algunos casos especiales de estas fórmulas son:

1. <u>Método de Heun</u>: Aqui se toma $\gamma_2 = 1/2$ de modo que el método reduce a:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_j + hf(t_j, y_j))] \quad , \quad j \geq 0$$

   Para propositos de hacer cálculos es mejor escribir esta fórmula como:

$$\begin{cases} y_{j+1}^{*} = y_j + hf(t_j, y_j) \quad , \\ y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_{j+1}^{*})] \quad , \quad j \geq 0 \end{cases}$$

2. <u>Método del Punto Medio</u>: Aqui se toma $\gamma_2 = 1$ de modo que el método reduce a:

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)\right) \quad , \quad j \geq 0$$

5.2.4. Método de Espacio de estado

5.3. Ecuaciones diferenciales de orden "n"

Considérese la siguiente ecuación diferencial

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dt^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

Una ecuación diferencial expresada a través de la Ecuación (1) se llama de *orden n*
debido a que el orden más elevado de derivación de la función *y* es *n*, y ordinaria debido a que aparecen sólo derivadas totales (esto es, no hay derivadas parciales presentes, o, alternativamente, la variable dependiente *y* sólo es función de una variable independiente *t*).
Una función *y(t)* que satisface a la Ecuación (1), lo cual implica que *y(t)* es
n veces derivable, se llama *solución de la ecuación diferencial*.
Para obtener una única solución de la Ecuación (1) (en general existen muchas funciones que la satisfacen), es necesario suministrar algún tipo de información adicional, por ejemplo, valores de *y(t)* y/o de sus derivadas en valores específicos de *t*. Para determinar una solución única de la *ecuación diferencial*

ordinaria de orden n, normalmente es suficiente con especificar *n* condiciones (n integraciones de la ecuación diferencial). Si todas las condiciones se especifican en
t = t0 , entonces al problema se lo llama de *condiciones iniciales*. Cuando está involucrado más de un valor de *t*, el problema se llama de *condiciones de contorno*.
Una EDO (ecuación diferencial ordinaria) de orden *n* puede escribirse como
un sistema de n ecuaciones diferenciales de 1er. orden, definiendo *(n-1)* nuevas variables. Por ejemplo, consideremos la ecuación de Bessel (ecuación diferencial ordinaria de 2do. orden):

$$t^2 \frac{d^2y}{dt} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - p^2)\,y = 0 \qquad (2)$$

donde *p* es una constante. Definamos una nueva variable:

$$y_1 = \frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

entonces se cumple que:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Por lo tanto, la EDO de 2do. orden puede reescribirse como un par de EDOs de 1er.
orden, con *y1* e *y* como funciones incógnitas,

$$y_1 - \frac{dy}{dt} = 0 \qquad (4a)$$

$$t^2 \frac{dy_1}{dt} + t\,y_1 + (t^2 - p^2)\,y = 0 \qquad (4b)$$

Dado que la mayoría de las EDOs de órdenes superiores pueden escribirse en forma similar, sólo se describirá la solución numérica de EDOs de 1er. orden.

Serie de Taylor

Los métodos de Taylor provienen de la aproximación a la función y(t) a través de la serie de Taylor. Sea el problema de valor inicial:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t_0) = k$$

Encontremos una aproximación de orden n a y(t) a través de la serie de Taylor:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i) + h^2y''(t_i)/2! + h^3y'''(t_i)/3! + ... + h^ky^{(k)}(t_i)/k!$$

donde $h = t_{i+1}-t_i$

Tomemos en cuenta que $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$, así entonces $y''(t_i) = f\,'(t_i, y(t_i))$, $y'''(t_i) = f\,''(t_i, y(t_i))$, y asi sucesivamente. De aqui que la iteración del método de Taylor de orden k para aproximar nuestra ecuación diferencial es:

$$y(t_0) = k$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + h^2f\,'(t_i, y(t_i))/2! + h^3f\,''(t_i, y(t_i))/3! + ... + h^k f^{(k)}(t_i, y(t_i)))/k!$$

Bibliografía

1. Skoog, West y Hollard: (1994) **Química Analítica**. Edit. Mc. Graw Hill.

2. L. V. Atkinson y P. J. Harley. *An Introduction to Numerical Methods with Pascal*. Adison-Wesley, 1983.
3. R. L. Burden y J. D. Faires. *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1985.
4. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *Maple V Language Reference Manual*. Springer-Verlag, 1991.
5. B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, B. L. Leong, M. B. Monagan, y S. Watt. *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V*. Springer-Verlag, 1992.
6. Francis Sheid Rosa Elena Di Costanzo. *Métodos Numéricos*. McGraw Hill, 1989.
7. Stanley I. Grossman. *Algebra Lineal*. Grupo Editorial Iberoamericana, 1987.
8. Thomas Richard McCalla. *Introduction to Numerical Methods and FORTRAN Programming*. Wiley, 1967.
9. Antonio Nieves y Federico C. Domínguez. *Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería*. CECSA, 1995.
10. Ben Noble y James W. Daniel. *Algebra Lineal*. Prentice Hall, tercera edition, 1989.
11. W. Allen Smith. *Análisis Numérico*. Prentice Hall, 1988.

Actividades complementarias

1.- Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $y(0.5)$ si:

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

2.- Usar el metodo de Runge-Kutta para aproximar $y(2.2)$ dada la ecuacion diferencial:

$$y' = x + y$$
$$y(2) = 4$$

Igual que siempre, si se toma: $h = 0.1$