1.- Aplicar el método de Euler mejorado, para aproximar $y(0.5)$ si:

$$
\begin{aligned}
y' &= 2xy \\
y(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Solución

Vemos que este es el mismo ejemplo 1 del método anterior. Así que definimos $h = 0.1$ y encontraremos la aproximación después de cinco iteraciones. A diferencia del método de Euler 1, en cada iteración requerimos de dos cálculos en vez de uno solo: el de y_n^* primero y posteriormente el de y_n.

Para aclarar el método veamos con detalle las primeras dos iteraciones. Primero que nada, aclaramos que tenemos los siguientes datos iniciales:

$$
\begin{cases}
x_0 & = & 0 \\
y_0 & = & 1 \\
h & = & 0.1 \\
f(x,y) & = & 2xy
\end{cases}
$$

En nuestra primera iteración tenemos:

$$
\begin{cases}
x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.\mathbf{1} \\
y_1^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.1[2(0)(1)] = 1 \\
\therefore\ y_1 = y_0 + h\left(\dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*_1)}{2}\right) = 1.01
\end{cases}
$$

Nótese que el valor de y_1^* coincide con el y_1 (Euler 1), y es el único valor que va a coincidir, pues para calcular y_2^* se usará y_1 y no y_1^*.

Esto lo veremos claramente en la siguiente iteración:

$$
\begin{cases}
x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2 \\
y_2^* = y_1 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.0302 \\
y_2 = y_1 + h\left(\dfrac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^*)}{2}\right) = 1.040704
\end{cases}
$$

Nótese que ya no coinciden los valores de y_2 (Euler 1) y el de y_2^*. El proceso debe seguirse hasta la quinta iteración. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.01
2	0.2	1.040704
3	0.3	1.093988
4	0.4	1.173192
5	0.5	1.28336

Concluímos entonces que la aproximación obtenida con el método de Euler mejorado es:

$$y(0.5) \approx 1.28336$$

Con fines de comparación, calculamos el error relativo verdadero:

$$|\epsilon_v| = \left| \frac{1.28402 - 1.28336}{1.28402} \times 100\% \right| = 0.05\%$$

Vemos que efectivamente se ha obtenido una mejor aproximación con este método, reduciendo el error relativo verdadero de un 5.4% hasta un 0.05%. En nuestro tercer método veremos cómo se reduce aún más este error prácticamente a un 0%!

2.- Usar el metodo de Runge-Kutta para aproximar $y(2.2)$ dada la ecuacion diferencial:

$$y' = x + y$$
$$y(2) = 4$$

Igual que siempre, si se toma: $h = 0.1$ se llega a la aproximacion en dos pasos.

Con esta aclaracion, se tienen los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_0 & = & 2 \\ y_0 & = & 4 \\ h & = & 0.1 \\ f(x,y) & = & x+y \end{cases}$$

Primera Iteracion:

$$x_1 = x_0 + h = 2.1$$

$$k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0.1[2 + 4] = 0.6$$

$$k_2 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1[2.05 + 4.3] = 0.635$$

$$k_3 = h \cdot f(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1[2.05 + 4.3175] = 0.63675$$

$$k_4 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1[2.1 + 4.63675] = 0.673675$$

$$\therefore\ y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 4.6362$$

Segunda iteracion:

$$x_2 = x_1 + h = 2.2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0.1[2.1 + 4.6362] = 0.67362$$

$$k_2 = h \cdot f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1[2.15 + 4.973011] = 0.7123$$

$$k_3 = h \cdot f(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1[2.15 + 4.99235] = 0.71424$$

$$k_4 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.1[2.2 + 5.35044] = 0.75504$$

$$\therefore\ y_2 = y_1 + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = 5.34982$$

entonces que el valor buscado es:

$$y(2.2) \approx 5.34982$$