



SIMULACION DE EVENTOS

CLAVE : LII 210

PROFESOR: MTRO. ALEJANDRO SALAZAR GUERRERO

1. LA SIMULACIÓN DE EVENTOS DISCRETOS.

- 1.1 Definición de Eventos Discretos.
- 1.2 Estructura de la simulación de eventos discretos.
- 1.3 Característica de la simulación de eventos discretos.
- 1.4 Sistemas.
- 1.5 Modelos.
- 1.6 Control.
- 1.7 Mecanismos de tiempo fijo.
- 1.8 Metodología
 - 1.8.1 Formulación del Problema.
 - 1.8.2 Recolección de datos.
 - 1.8.3 Desarrollo del modelo.
 - 1.8.4 Verificación.
 - 1.8.5 Validación.
 - 1.8.6 Experimentación de resultados.
 - 1.8.7 Optimización de resultados.

2. NÚMEROS ALEATORIOS Y PSEUDOALEATORIOS.

- 2.1 Números aleatorios definición propiedades.
 - 2.1.1 Generadores.
 - 2.1.2 Tablas.
- 2.2 Números pseudoaleatorios propiedades.
 - 2.2.1 Técnicas para generar números pseudoaleatorios
 - 2.2.1.1 Métodos de centros al cuadrado.
 - 2.2.1.2 Métodos de congruencia.
 - 2.2.1.3 Multiplicativo.
 - 2.2.1.4 Mixto.
- 2.3 Pruebas de aleatoriedad.
- 2.4 Método de Montecarlo.
 - 2.4.1 Simulación de procesos aleatorios.
 - 2.4.2 Usando números.
 - 2.4.3 Manuales.
 - 2.4.4 Lenguajes de propósito general como.
 - 2.4.4.1 C, C++.
 - 2.4.4.2 Delphi.
 - 2.4.4.3 Visual.
 - 2.4.5 Sistemas productivos.
 - 2.4.6 Calidad.
 - 2.4.7 Inventarios.
 - 2.4.8 Económicos.

3. VARIABLES ALEATORIAS.

- 3.1 Métodos para generar variables aleatorias.
 - 3.1.1 Transformadas Inversas.
 - 3.1.2 Aceptación rechazo.
 - 3.1.3 Convolution.
 - 3.1.4 Directos.

- 3.1.4.1 Generación de variables aleatorias discretas.
- 3.1.4.2 Distribuciones Poisson.
- 3.1.4.3 Binomial.
- 3.1.4.4 Geométrica.
- 3.1.4.5 Generación de variables aleatorias continuas.
- 3.1.4.6 Distribución uniforme.
- 3.1.4.7 Exponencial.
- 3.1.4.8 Normal.
- 3.1.4.9 Erlang.
- 3.1.4.10 Gamma.
- 3.1.4.11 Beta.
- 3.1.4.12 Triangular.
- 3.1.5 Distribuciones empíricas de probabilidad.
- 3.1.6 Simulación de procesos aleatorios manuales.
- 3.1.7 Sistemas productivos.
- 3.1.8 Calidad.
- 3.1.9 Inventarios.
- 3.1.10 Económicos.

4. LENGUAJES DE SIMULACIÓN Y SIMULADORES DE EVENTOS DISCRETOS.

4.1 Lenguajes de simulación y simuladores.

- 4.1.1 Características
- 4.1.2 Aplicación y uso lenguajes
 - 4.1.2.1 SLAM
 - 4.1.2.2 ECSL
 - 4.1.2.3 SIMAN
 - 4.1.2.4 GPSS
- 4.1.3 Simuladores
 - 4.1.3.1 PROMODEL
 - 4.1.3.2 TAYLOR ED
 - 4.1.3.3 ARENA
 - 4.1.3.4 WITNESS

4.2 Aprendizaje y uso de un simulador

- 4.2.1 Características del Software
- 4.2.2 Elementos del modelo
- 4.2.3 Menús principales
- 4.2.4 Construcción del modelo
- 4.2.5 El uso del simulador de problemas aplicados a servicios
- 4.2.6 Sistemas productivos
- 4.2.7 Calidad
- 4.2.8 Inventarios
- 4.2.9 Económicos

CAP. 3. VARIABLES ALEATORIAS.

Métodos para generar variables aleatorias.

Existen varios métodos que nos permiten generar variables aleatorias. Lo normal es que existan varias opciones para generar una misma variable aleatoria. La elección del método adecuado se puede basar en una serie de factores como: Exactitud, se prefiere un método exacto frente a métodos aproximados, como soluciones numéricas.

Velocidad. Uno de los datos que se toma en consideración es el tiempo de generación de la variable.

Espacio. Necesidades de memoria del método utilizado. En general, los métodos no consumen mucha memoria.

Simplicidad.

La mayoría de las técnicas utilizadas para la generación se pueden agrupar en:

Método de la transformada inversa

Método de aceptación-rechazo

Método de composición

Método de convolución

Transformadas Inversas.

Es el método más directo para generar una variable aleatoria. Sea $F(z)$, $a \leq z \leq b$ una función de distribución cuya función de distribución inversa es:

$$F^{-1}(u) := \inf \{z \in [a,b] : F(z) \geq u, 0 \leq u \leq 1\}$$

Sea U una variable aleatoria de $U(0,1)$ se verifica que $Z = F^{-1}(U)$ tiene la función de distribución F .

La prueba se sigue de la observación de que $\text{pr}(Z \leq z) = \text{pr}[F^{-1}(U) \leq z] = \text{pr}[U \leq F(z)] = F(z)$

Esto sugiere inmediatamente el siguiente esquema de generación:

Algoritmo del método de la transformada inversa

Propósito: Generar Z aleatoriamente de $F(z)$, $a \leq z \leq b$

Entrada: Capacidad para evaluar $F^{-1}(u)$. $0 \leq u \leq 1$

Salida: Z

Método: Generar aleatoriamente U de $U(0,1)$

$$Z \leftarrow F^{-1}(U)$$

Devolver Z .

Aceptación rechazo.

Cuando $f(x)$ es una función acotada y x tiene un rango finito, como $a \leq x \leq b$, se utiliza este método para encontrar los valores de las variables aleatorias. El método consiste en normalizar el rango de f mediante un factor de escala c , luego definir a x como una función lineal de r , después se generan parejas de números aleatorios r_1 , r_2 y por último si el número encontrado se elige al azar dentro del rango (a, b) y $r \leq cf(x)$, se utiliza este método para encontrar los valores de las variables aleatorias. El método consiste en normalizar el rango de f mediante un factor de escala c , luego definir a x como una función lineal de r , después se generan parejas de números aleatorios r_1 , r_2 y por último si el número encontrado se elige al azar dentro del rango (a, b) y $r \leq cf(x)$ se acepta, en caso contrario se rechaza. El problema de este método es la cantidad de intentos que se realizan antes de encontrar una pareja exitosa

Convolución.

Permite generar una distribución a partir de la suma de distribuciones más elementales o mediante la transformada z

Directos.

Generación de variables aleatorias discretas.

La generación de cualquier variable aleatoria se va a basar en la generación previa de una distribución uniforme $(0,1)$, visto en el tema anterior. En este capítulo vamos a estudiar ciertas transformaciones o algoritmos que nos van a transformar dichos números generados en valores de otras distribuciones.

Buscamos métodos que nos permitan obtener valores de variables aleatorias que sigan determinadas distribuciones de probabilidad a partir de los números aleatorios generados, que siguen la distribución Uniforme en el intervalo $(0,1)$.

Hay cuatro métodos generales de generación de variables aleatorias y una serie de métodos particulares de las distintas distribuciones. La facilidad de aplicación de dichos métodos, así como el coste computacional asociado a los mismos, varía mucho según la familia de variables aleatorias a las que se apliquen.

Normalmente existen varios algoritmos que se pueden utilizar para generar valores de una determinada distribución, y diferentes factores que se pueden considerar para determinar qué algoritmo utilizar en un caso particular. Desafortunadamente dichos factores suelen entrar en conflicto unos con otros y a veces se ha de llegar a una solución de compromiso.

Algunos de estos factores son los siguientes:

Exactitud: se han de obtener valores de una variable con una precisión dada. A veces se tiene suficiente con obtener una aproximación y otras no.

Eficiencia: el algoritmo que implementa el método de generación tiene asociado un tiempo de ejecución y un gasto de memoria. Elegiremos un método que sea eficiente en cuando al tiempo y a la cantidad de memoria requeridos.

Complejidad: Buscamos métodos que tengan complejidad mínima, siempre y cuando se garantice cierta exactitud.

Robustez: el método tiene que ser eficiente para cualquier valor que tomen los parámetros de la distribución que siga la variable aleatoria.

Facilidad de implementación.

Distribuciones Poisson.

En teoría de probabilidad y estadística, la **distribución de Poisson** es una distribución de probabilidad discreta. Expresa la probabilidad de un número k de eventos ocurriendo en un tiempo fijo si estos eventos ocurren con una frecuencia media conocida y son independientes del tiempo transcurrido desde el último evento.

Fue descubierta por Siméon-Denis Poisson, que la dio a conocer en 1838 en su trabajo *Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civile* (Investigación sobre la probabilidad de los juicios en materias criminales y civiles).

La función de densidad de la distribución de Poisson es

$$f(k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!},$$

Donde λ es un parámetro positivo que representa la frecuencia esperada del fenómeno modelado por la distribución.

Binomial.

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que mide el número de éxitos en una secuencia de n ensayos independientes de Bernoulli con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos.

Un experimento de Bernoulli se caracteriza por ser dicotómico, esto es, sólo son posibles dos resultados. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro, fracaso, con una probabilidad $q = 1 - p$. En la distribución binomial el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente, y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos. Para $n = 1$, la binomial se convierte, de hecho, en una distribución de Bernoulli.

Para representar que una variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p , se escribe:

$$X \sim B(n, p)$$

La distribución binomial es la base del test binomial de significación estadística.

Su función de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Donde $x = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, siendo $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ las combinaciones de n en x (n elementos tomados de x en x)

Geométrica.

Esta distribución es un caso especial de la Binomial, ya que se desea que ocurra un éxito por primera y única vez en el último ensayo que se realiza del experimento, para obtener la fórmula de esta distribución, haremos uso de un ejemplo. Ejemplo: Se lanza al aire una moneda cargada 8 veces, de tal manera que la probabilidad de que aparezca águila es de $2/3$, mientras que la probabilidad de que aparezca sello es de $1/3$, Determine la probabilidad de que en el último lanzamiento aparezca un águila. Solución: Si nosotros trazamos un diagrama de árbol que nos represente los 8 lanzamientos de la moneda, observaremos que la única rama de ese árbol que nos interesa es aquella en donde aparecen 7 sellos seguidos y por último una águila; como se muestra a continuación:

S S S S S S S A

Sí denotamos;

x = el número de repeticiones del experimento necesarias para que ocurra un éxito por primera y única vez = 8 lanzamientos

p = probabilidad de que aparezca una águila = $p(\text{éxito}) = 2/3$

q = probabilidad de que aparezca un sello = $p(\text{fracaso}) = 1/3$

Entonces la probabilidad buscada sería;

$$P(\text{aparezca una águila en el último lanzamiento}) = p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(S)*p(A) = q*q*q*q*q*q*q*p = q^{x-1}p$$

Luego, la fórmula a utilizar cuando se desee calcular probabilidades con esta distribución sería;

$$p(X) = q^{x-1}p$$

Donde:

$p(x)$ = probabilidad de que ocurra un éxito en el ensayo x por primera y única vez

p = probabilidad de éxito

q = probabilidad de fracaso

Resolviendo el problema de ejemplo;

$x = 8$ lanzamientos necesarios para que aparezca por primera vez una águila

$p = 2/3$ probabilidad de que aparezca una águila

$q = 1/3$ probabilidad de que aparezca un sello

$p(x=8) = (1/3)^{8-1}(2/3) = 0.0003048$

Generación de variables aleatorias continuas.

Distribución uniforme.

En estadística la distribución uniforme es una distribución de probabilidad cuyos valores tienen la misma probabilidad. La distribución uniforme es la que corresponde a una variable que toma todos sus valores, x_1, x_2, \dots, x_k , con igual probabilidad; el espacio muestral debe ser finito.

Si la variable tiene k posibles valores, su función de probabilidad sería:

$$\forall x \in S \quad u(x, k) = \frac{1}{k}$$

Exponencial.

Es un caso particular de la distribución gamma cuando $\alpha = 1$. Su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \beta > 0$$

Su parámetro es β .

Normal.

La distribución normal fue definida por De Moivre en 1733 y es la distribución de mayor importancia en el campo de la estadística.

Una variable es normal cuando se ajusta a la ley de los grandes números, es decir, cuando sus valores son el resultado de medir reiteradamente una magnitud sobre la que influyen infinitas causas de efecto infinitesimal.

Las variables normales tienen una función de densidad con forma de campana a la que se llama campana de Gauss.

Su función de densidad es la siguiente:

$$n(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad -\infty < x < \infty \quad \begin{cases} \pi = 3,14159... \\ e = 2,71828... \end{cases}$$

Los parámetros de la distribución son la media y la desviación típica, μ y σ , respectivamente. Como consecuencia, en una variable normal, media y desviación típica no deben estar correlacionadas en ningún caso (como desgraciadamente ocurre en la inmensa mayoría de las variables aleatorias reales que se asemejan a la normal).

La curva normal cumple las siguientes propiedades:

- 1) El máximo de la curva coincide con la media.
- 2) Es perfectamente simétrica respecto a la media ($g_1 = 0$).
- 3) La curva tiene dos puntos de inflexión situados a una desviación típica de la media. Es convexa entre ambos puntos de inflexión y cóncava en ambas colas.

Erlang.

Distribución que es la suma de un número de variables aleatorias independientes que poseen la misma distribución exponencial. Se aplica en modelos de sistemas de servicio masivo, ejemplo: En situaciones donde el servicio tiene que realizar dos operaciones c/u con tiempo de servicio exponencial. Un generador de valores aleatorios con distribución de Erlang, para el caso de la suma de N variables puede ser:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{Para } x > 0$$

Gamma.

La distribución gamma se define a partir de la función gamma, cuya ecuación es:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} \cdot dx \quad \alpha > 0 \quad x > 0$$

La función de densidad de la distribución gamma es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \alpha > 0 \text{ y } \beta > 0$$

α y β son los parámetros de la distribución.

Beta.

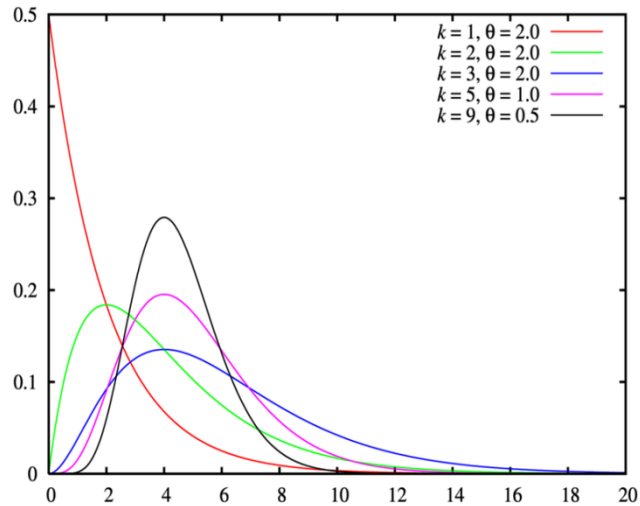
En estadística la **distribución gamma** es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros k y λ cuya función de densidad para valores $x > 0$ es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

Aquí e es el número e y Γ es la función

gamma. Para valores k entera la aquella es

$\Gamma(k) = (k - 1)!$ (el factorial de $k - 1$). En este caso - por ejemplo para describir un proceso de Poisson - se llaman la distribución Erlang con un parámetro $\theta = 1 / \lambda$.



Triangular.

Esta distribución tiene 3 parámetros, a (límite inferior de la variable); b (el modo) y c (límite superior de la variable).

$$f(x) = \frac{2(c-x)}{(c-a)(c-b)} \text{ si } b \leq x \leq c$$

$$f(x) = \frac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)} \text{ si } a \leq x \leq b$$

Distribuciones empíricas de probabilidad.

Los percentiles empíricos se calculan a partir de la función de distribución empírica definida por los valores de la serie con la que se trabaja ordenada desde el valor menor al mayor, y asignando a cada valor ordenado su probabilidad calculada según la expresión:

$$\text{Prob}(X \leq x_i) = i / (N + 1).$$

Donde "i" representa el número de orden que ocupa el valor "x" en la serie de datos ordenada en orden creciente y "N" el número total de datos. La probabilidad correspondiente al 20, 40, 50, 60 ó 80 por ciento se obtienen por interpolación lineal, considerando las probabilidades asignadas a cada dato ordenado.

Ejemplo. Se pide calcular los valores de los percentiles 20 y 40 mediante la función de distribución empírica, de la siguiente serie de valores:

102.2 96.3 377.7 119.9
221.1 32 153.8 199
261.9 58.7 160 209.8
270 60.4 171.9 142
138.3 83.5 172.1 148.5
13.5 289.4 183.6 269.4
18.1 299.9 197.9
118 110.5 300.7

Solución.

Se deben ordenar los datos de precipitación en orden creciente, y asignar a cada valor de precipitación su probabilidad empírica en función del orden de situación del valor y del número de datos. Así para los dos primeros valores y para los dos últimos tendremos:

Nº orden Precipitación Probabilidad

1 (primero) 13.5 mm Prob (C£13.5) = $i/(N + 1) = 1/(30+1) = 0.03226$ (3.226 %)

2 (segundo) 18.1 mm Prob (C£18.1) = $i/(N + 1) = 2/(30+1) = 0.06452$ (6.452 %)

...

29 (vigésimo nono) 300,7 mm Prob (C£300,7) = $i/(N + 1) = 29/(30+1) = 0.9354$ (93,55 %)

30 (trigésimo) 377, 7 mm Prob (C£377,7) = $i/(N + 1) = 30/(30+1) = 0.9677$ (96,77 %)

Los valores de precipitación ordenados desde el menor al mayor para los treinta años de la serie y los valores de probabilidad asignados son:

<u>Nº orden</u>	<u>Prob %</u>	<u>Prec (mm)</u>
1	3.226	13.5
2	6.452	18.1
3	9.677	32
4	12.9	58.7

5	16.13	60.4
6	19.35	83.5
7	22.58	96.3
8	25.81	102.2
9	29.03	110.5
10	32.26	118
11	35.48	119.9
12	38.71	138.3
13	41.94	142
14	45.16	148.5
15	48.39	153.8
16	51.61	160
17	54.84	171.9
18	58.06	172.1
19	61.29	183.6
20	64.52	197.9
21	67.74	199
22	70.97	209.8
23	74.19	221.1
24	77.42	261.9
25	80.65	269.4
26	83.87	270
27	87.1	289.4
28	90.32	299.9
29	93.55	300.7
30	96.77	377.7

El percentil 20 se obtiene por interpolación sabiendo que será un volumen de precipitación entre el valor que está en la posición sexta (19,35 %) y el valor que está en la posición séptima (22,58 %)

P19.35	83.5	P20	86.07
P22,58	96.3		

El percentil 40 se obtiene por interpolación sabiendo que será un volumen de precipitación entre el valor que está en la posición duodécima (38,71 %) y el valor que está en la posición decimotercera (41,94 %)

P38.71	138.3	P40	139.78
P41.94	142		

Simulación de procesos aleatorios manuales.

Para llevar a cabo esta forma de simulación, se establece la proporción de elementos de acuerdo a la distribución de probabilidad de la que se van a extraer. Se elabora un modelo físico, ya sea una caja, una tómbola o lo que permita simular la realidad de los eventos que se presentan en forma aleatoria.

Algunos problemas pueden analizarse empleando modelos de probabilidad:

Sistemas productivos.

En un supermercado el 70% de las compras las realizan las mujeres; de las compras realizadas por estas, el 80% supera \$ 2000, mientras que de las compras realizadas por hombres sólo el 30% supera esa cantidad.

- a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere las 2000?
- b) Si se sabe que el ticket de compra no supera las 2000 ¿cuál es la probabilidad de que la compra haya sido hecha por una mujer?

En este caso, la probabilidad obtenida, permite obtener una proporción de los eventos que pueden emplearse en la planeación de la producción o en la elaboración de planes estratégicos.

Calidad.

Una de las áreas de la actividad humana en la que la aplicación de técnicas estadísticas ha tenido gran difusión y al mismo tiempo un enorme éxito, es en la de aquellos aspectos que se relacionan con el control de calidad de producción de bienes y suministro de servicios. En los años 80 la aplicación de la filosofía y técnicas del control de calidad en la producción supuso un enfoque revolucionario y tremendamente competitivo, que fue aprovechado sobre todo por la industria japonesa para colocarse a la cabeza del mercado mundial, lo que resulta curioso, siendo americanos los "padres" del control de calidad, puesto que la industria americana sólo se subió al carro del control de calidad una vez que la presión ejercida en el mercado por la superioridad de los productos japoneses les obligó a considerar las bondades de la nueva filosofía, en la que la calidad constituye un concepto global que no sólo se aplica al producto sino a todo el proceso de fabricación, incluyendo el control de costes, precios y beneficios, gestión de los suministros y plazos de entrega.

Aunque inicialmente el control de calidad se aplicó solo a la fabricación industrial, enseguida se extendió su radio de acción a la prestación de servicios, donde también podemos incluir el área de salud, aunque dentro del entorno médico hay sectores que por sus características, más asimilables a la industria, tienen una mayor tradición en el empleo del control de calidad; como son los laboratorios de análisis clínicos (hematología, bioquímica o microbiología), o los bancos de sangre. Sin embargo las técnicas han sido utilizadas también en otros entornos, como puede ser por ejemplo en la monitorización de fallos en operaciones quirúrgicas, y su campo de aplicación está limitado tan sólo por nuestra imaginación, ya que cualquier actividad humana es susceptible de ser cuantificada y por tanto monitorizada para mejorar su calidad, desde el tiempo de espera de un paciente que acude a consulta, hasta el porcentaje de pacientes que cumplen adecuadamente el tratamiento prescrito, o el mismo registro de datos en la historia clínica del paciente.

Un elemento fundamental en la filosofía del control de calidad moderno es la utilización generalizada de procedimientos científicos, incluidos los métodos estadísticos, en la planificación, recogida de datos y análisis de los mismos, de tal forma que las decisiones no se sustenten en meras conjeturas.

Aunque en un sistema sanitario fundamentalmente público, como es el español, la competencia no constituye el principal acicate para la incorporación de sistemas de control de calidad, no cabe ninguna duda de que sin embargo existen múltiples razones para incorporar estas técnicas en la gestión de los servicios de atención sanitaria, como lo corrobora el hecho del aumento de su difusión y aplicación en este entorno, razones en las que de momento no vamos a entrar, por ser la línea argumental de estos artículos fundamentalmente estadística.

En este documento vamos a echar un vistazo a lo que se conoce como Control estadístico de procesos, metodología que utilizando fundamentalmente gráficos permite monitorizar la estabilidad (calidad) de un proceso de producción o de suministro de un servicio, de forma que se detecte, cuanto antes, cualquier situación inadecuada; lo que permitirá eliminar las causas especiales de variabilidad en la obtención del resultado final.

Inventarios.

Una tienda de cámaras tiene en almacén un modelo especial de cámara que se puede ordenar cada semana. Sean D_1, D_2, \dots las demandas de esta cámara durante la primera, segunda, ... , semana, respectivamente. Se supone que las D_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen una distribución de probabilidad conocida. Sea X_0 el número de cámaras que se tiene en el momento de iniciar el proceso, X_1 el número de cámaras que se tienen al final de la semana uno, X_2 el número de cámaras al final de la semana dos, etc. Suponga que $X_0 = 3$. El sábado en la noche la tienda hace un pedido que le entregan el lunes en el momento de abrir la tienda. La tienda hace un pedido que le entregan el lunes en el momento de abrir la tienda. La tienda usa la siguiente política $(s, S)^1$ para ordenar : si el número de cámaras en inventario al final de la semana es menor que $s = 1$ (no hay cámaras en la tienda), ordenar (hasta) $S=3$. De otra manera, no coloca la orden (si se cuenta con una o más cámaras en el almacén, no se hace el pedido). Se supone que las ventas se pierden cuando la demanda excede el inventario. Entonces, $\{X_t\}$ para $t = 0, 1, \dots$ es un proceso estocástico de la forma que se acaba de describir. Los estados posibles del proceso son los enteros 0, 1, 2, 3 que representan el número posible de cámaras en inventario al final de la semana

Económicos.

En esta área del conocimiento, el uso de las herramientas matemáticas ha causado gran polémica a lo largo de la historia. Diversas teorías se han desarrollado a la luz de la implementación de modelos matemáticos, mientras que otros han criticado su alcance aduciendo las significativas limitaciones que pueden surgir de su empleo.

Una crítica a la hipótesis de expectativas racionales y de los resultados de la nueva economía clásica ha sido realizada desde el campo de la economía postkeynesiana. De acuerdo con este punto de vista, las distribuciones de probabilidad no son la base para comprender el comportamiento del mundo real bajo incertidumbre. Para los postkeynesianos se producen muchas situaciones importantes en las que existe la "verdadera" incertidumbre con respecto a las consecuencias futuras que tendrán las decisiones realizadas hoy. En estos casos de verdadera incertidumbre, los individuos que toman decisiones presentes creen que ningún gasto de recursos para analizar datos pasados, o señales del mercado actuales pueden proporcionar estadísticas fiables o pistas intuitivas con respecto a las perspectivas futuras.

La crítica postkeynesiana considera que, en una teoría general del comportamiento económico, todas las decisiones económicas pueden ocurrir bajo una de las tres situaciones mutuamente excluyentes:

- 1) el estado de probabilidad objetiva;
- 2) el estado de probabilidad subjetiva;
- 3) el estado de verdadera incertidumbre.

En el estado de probabilidad objetiva, los individuos que toman decisiones creen que el pasado es estadísticamente fiable, y, por tanto, una guía insesgada del futuro. Esta es la hipótesis de expectativas racionales, donde el conocimiento de las consecuencias futuras de las decisiones actuales implica la confluencia de probabilidades subjetivas y objetivas.

En el estado de probabilidad subjetiva, la mente del individuo o lo que Savage denomina probabilidad personal respecto a acontecimientos futuros en el momento de la elección gobiernan los resultados futuros. Estas probabilidades subjetivas no tienen que coincidir con distribuciones objetivas, incluso si existen distribuciones objetivas bien definidas. Este marco proporciona la base para una teoría de la elección, que puede expresarse en lenguaje de la teoría de la utilidad esperada. Así, en la teoría de la utilidad esperada, de acuerdo con Sugden (1987:2), "se define una prospectiva como una lista de consecuencias con una lista asociada de probabilidades, una para cada consecuencia, de forma que estas probabilidades sumen la unidad... [y] las preferencias de un individuo se definen sobre el conjunto de todas las perspectivas concebibles".

En el estado de verdadera incertidumbre, los agentes económicos creen que durante el tiempo que transcurre entre el momento de la elección y el futuro, se producirán acontecimientos imprevisibles, con independencia de si han existido en el pasado frecuencias relativas objetivas y/o existen hoy probabilidades subjetivas. Para la economía postkeynesiana, esta es la incertidumbre en el sentido dado al término por Keynes (1937: 113), cuando escribió que con la incertidumbre no quería "simplemente distinguir lo que se conoce como seguro de lo que es sólo probable. El juego de la ruleta no está sujeto, en este sentido, a incertidumbre... El sentido en el que estoy usando el término es que... no existe base científica sobre la que formar cualquier probabilidad calculable. Sencillamente no sabemos".

Asimismo, Keynes (1936, p. 148-50, 161) señaló que algunas consecuencias futuras no podían tener probabilidades asignadas hoy. Por ello, si los economistas no poseen, nunca ha tenido, y conceptualmente nunca tendrán un conjunto de mundos macroeconómicos, entonces puede afirmarse que las estructuras de probabilidades objetivas no existen, y que una función de distribución de probabilidades no puede definirse. La aplicación de la teoría matemática de los procesos estocásticos a los fenómenos macroeconómicos sería discutible, si no un principio no válido. (Davidson 1991:132).

La economía postkeynesiana rechaza dos supuestos implícitos en la hipótesis de expectativas racionales. Primero, el mundo de probabilidad objetiva. Segundo, el supuesto de ergodicidad. Hay que señalar que la aceptación del supuesto de un marco económico ergódico se racionaliza a menudo por la necesidad de desarrollar la economía como una ciencia con base empírica (Lucas y Sargent, 1981 p. xi-xii). Samuelson (1969, p.184) también acepta la hipótesis ergódica como el "sine qua non" del método científico en economía, para sacar a la economía del "campo de la historia genuina" y mantenerlo en el "campo de la ciencia".

El mundo de probabilidad objetiva asociado con la hipótesis de expectativas racionales supone no sólo que las distribuciones de probabilidad sobre fenómenos históricos han existido, sino también que las mismas probabilidades que determinaron los resultados pasados gobernarán los acontecimientos futuros. En el contexto de formación de expectativas racionales que no exhiben errores persistentes, se mantiene que las medias temporales calculadas a partir de datos pasados convergirán con las medias estadísticas calculadas a partir de cualquier serie temporal futura. El conocimiento del futuro implica simplemente proyectar medias basadas en realizaciones pasadas o actuales a acontecimientos futuros. La economía postkeynesiana rechaza esta concepción de incertidumbre, ya que como señala Davidson (1991:134), "No puede existir desconocimiento de los acontecimientos futuros para aquellos que creen que el pasado proporciona una información estadística fiable e insesgada sobre el futuro, y este conocimiento se puede obtener si uno simplemente está dispuesto a gastar los recursos para examinar el pasado!".

Además, la economía postkeynesiana rechaza un segundo supuesto implícito en la hipótesis de expectativas racionales, señalando que para que esta hipótesis proporcione una teoría de formación de expectativas sin errores persistentes, no sólo deben ser iguales las funciones de distribución objetiva y subjetiva en cualquier punto del tiempo, sino que además estas funciones deben derivarse de lo que se llaman procesos estocásticos "ergódicos". Por definición, un proceso estocástico ergódico quiere decir que las medias calculadas a partir de observaciones pasadas no pueden diferir persistentemente de la media temporal de acontecimientos futuros. Como ha señalado Vercelli, "sólo en este caso el proceso estocástico convergirá hacia un estado estacionario, asegurando... el aprendizaje y la convergencia hacia una distribución de probabilidad completamente fiable. Cuando el proceso estocástico es estacionario pero no ergódico estamos en el mundo de incertidumbre". Es decir, como señala Davidson (1991: 132), "En la circunstancia de ergodicidad de las distribuciones de probabilidad objetivas, la probabilidad es conocimiento, no incertidumbre".

Para la economía postkeynesiana, si prevalecen las verdaderas condiciones de incertidumbre en ciertas áreas de toma de decisiones, pueden existir procesos económicos en los que las expectativas basadas en funciones de distribución de probabilidad pasadas pueden diferir persistentemente de las medias temporales que se irán generando conforme el futuro se despliega y se convierte en hechos históricos. La posibilidad de existencia de verdadera incertidumbre, indica que mientras las probabilidades objetivas y la hipótesis de expectativas racionales pueden ser una aproximación razonable en algunas áreas de la toma de decisiones económicas, no pueden considerarse como una teoría general.

Para los postkeynesianos, las probabilidades subjetivas, y no las objetivas, bastan para comprender que las fuerzas que guían el desempleo a largo plazo y la no neutralidad del dinero o de la política monetaria- incluso en un mundo de precios flexibles - es la incertidumbre. Los compromisos contractuales nominales, son un método para hacer frente a la verdadera incertidumbre siempre que el proceso económico se expande a lo largo de un amplio período de tiempo. Así, por ejemplo, en esta situación se puede mostrar - por ejemplo, Davidson y Davidson (1988) - como la existencia de contratos denominados en términos nominales (y no reales) crea un entorno monetario que no es neutral, incluso en el largo plazo. En este mismo sentido se expresa Tobin (1985:108-9), cuando asocia el rechazo keynesiano del supuesto de neutralidad del dinero con el énfasis de Keynes en la "esencial impredecibilidad, incluso en un sentido probabilístico" del futuro.

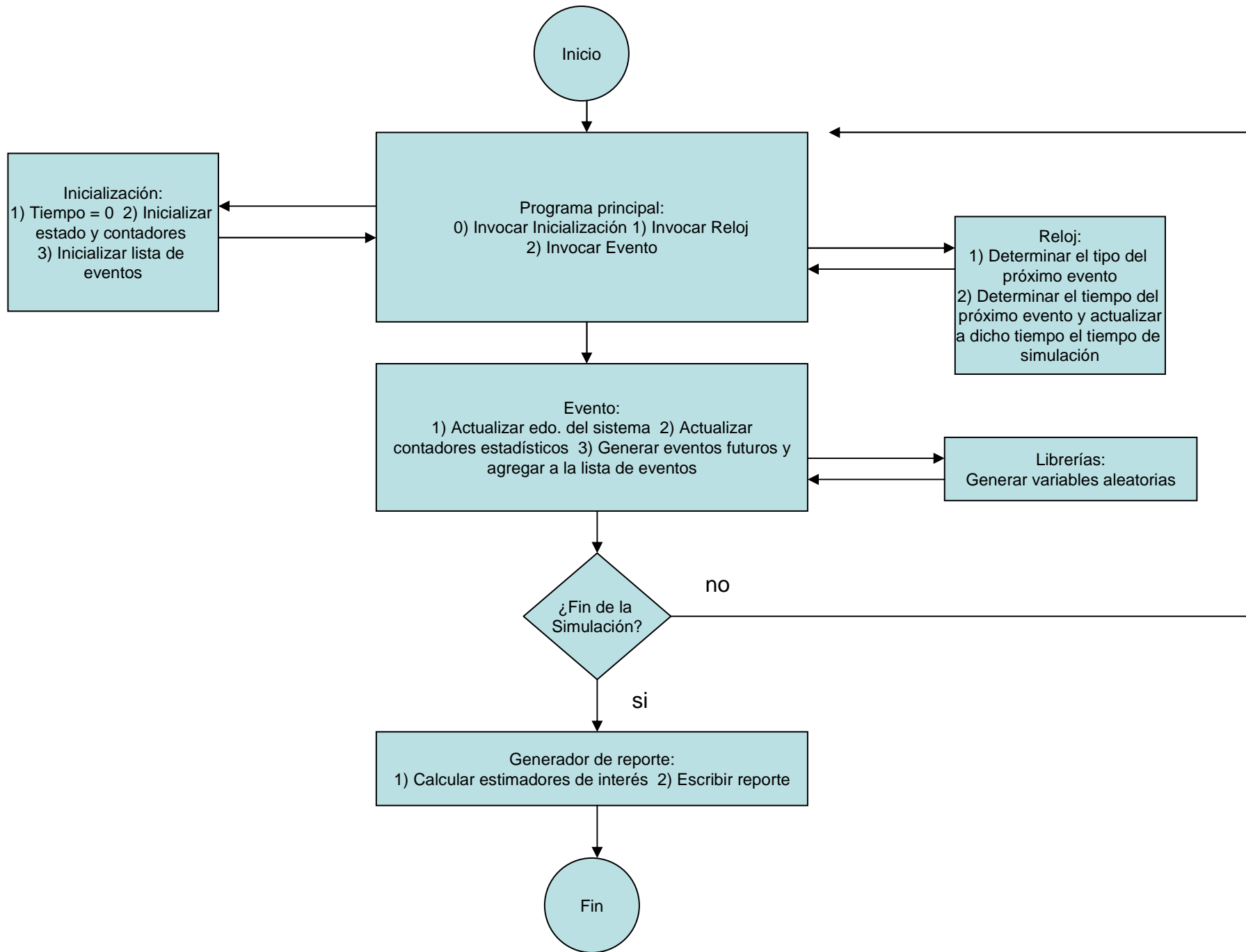
Simulación de eventos discretos

La simulación de eventos discretos se refiere a la modelación computacional de sistemas que evolucionan en el tiempo mediante cambios instantáneos en las variables de estado. Los cambios ocurren en puntos separados del tiempo.

En términos más matemáticos, diríamos que los cambios del sistema ocurren en un conjunto **contable** de puntos del tiempo.

Se muestra en la siguiente figura un diagrama de flujo general para una simulación de eventos discretos. El programa principal llama a las rutinas de Inicialización, Reloj y Evento. La rutina Inicialización asigna valores iniciales a las variables de estado, contadores, listas de eventos y tiempo. La rutina Reloj determina el tipo y tiempo del próximo evento y actualiza el tiempo de simulación a dicho instante. La rutina Evento actualiza el estado del sistema y los contadores estadísticos. Luego mediante generadores de números aleatorios, determina el tiempo del próximo evento de su tipo y lo añade a la lista de eventos.

El estado del sistema se caracteriza mediante valores en los **atributos** de diferentes **entidades**. Entidades con propiedades en común se agrupan en **listas**. En el sistema M/M/1 por ejemplo, las entidades son el servidor y los clientes en el sistema. El servidor tiene un atributo de estado, que puede valer ocupado o vacío. Los clientes tienen el atributo “tiempo de llegada”. Los clientes de la fila pueden agruparse juntos en una lista.



Simulación del sistema M/M/1. Estimadores de interés.

Previamente a entrar en los detalles de la simulación del sistema M/M/1, veamos como obtener medidas de algunas cantidades que son útiles para caracterizar el sistema.

- 1) El valor esperado del tiempo que un cliente permanece en la fila (retardo esperado), $d(n)$.

Notemos que una ejecución de la simulación representa una muestra de tamaño 1 de todos los posibles caminos que pueden seguir las variables de estado bajo las mismas condiciones a partir del mismo estado inicial. A esta muestra se le llama **realización**. Si se promedian los tiempos en cola de cada uno de los n clientes en una realización, se obtiene un estimador del retardo esperado. Dicho estimador es en sí mismo una variable aleatoria. El estimador se calcula mediante

$$\hat{d}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$

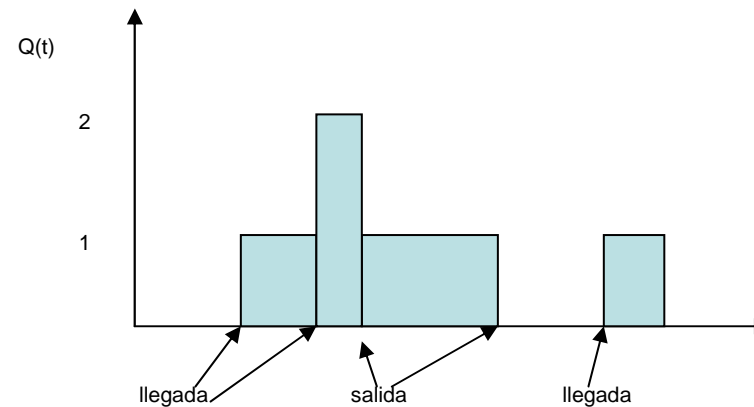
donde las variables D_i son los retardos individuales. Es importante tomar en la suma a los clientes que entran inmediatamente en el servicio, es decir, los retardos de cero, para dar una estimación correcta (¿porqué?).

2) El número esperado de clientes en la fila, $q(n)$.

Esta cantidad se estima promediando sobre el tiempo que dura el proceso simulado, es decir, desde $T = 0$ hasta el tiempo en que el último cliente es servido, $T(n)$. El número de clientes en la fila es una cantidad que varía de forma continua en el tiempo. La denotamos por $Q(t)$. El estimador buscado se escribe entonces como:

$$\hat{q}(n) = \frac{\int_0^{T(n)} Q(t) dt}{T(n)}$$

¿Cómo calcular una integral a partir de la simulación discreta? Recordemos que la integral puede interpretarse como el área bajo la curva $Q(t)$. La curva $Q(t)$ es una secuencia de rectángulos cuyas bases y alturas cambian cada vez que ocurre un evento, como en la siguiente figura:



Por lo tanto, para calcular el estimador basta con actualizar una suma de áreas cada vez que ocurre un evento. Las áreas a sumar se obtienen restando el tiempo del evento actual del tiempo del evento anterior y multiplicando dicha resta por el número de clientes en cola en el tiempo del evento actual.

3) Utilización esperada del servidor, $u(n)$. Es la fracción esperada de tiempo que el servidor se encuentra ocupado. Introduciendo la función de utilización

$$B(t) = \begin{cases} 1, & \text{ocupado en el intervalo } t + dt \\ 0, & \text{vacío en el intervalo } t + dt \end{cases}$$

escribimos el estimador para $u(n)$ como

$$\hat{u}(n) = \frac{\int_0^{T(n)} B(t) dt}{T(n)}$$

Ejercicio: explicar como se calcula el estimador anterior en la simulación. Dibujar un gráfico explicativo.