5. INTEGRALES MULTIPLES

INDICE 5

5. INTEGRALES MULTIPLES

5.1. Integrales iteradas

Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable (en contraste con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales evaluada con respecto a *diferentes* variables).

Es importante tomar en cuenta en qué posición vienen dados los límites de las integrales en cuestión para saber en qué orden serán ejecutados los procesos de integración simple; es decir, reconocer si se va integrar primero considerando la diferencial *dx* o la diferencial *dy* o viceversa.

Ahora veremos cómo se pueden presentar este tipo e integrales:

$$\int_0^1 2xydx \ ; \qquad \int_0^1\int_0^2 dydx \ ; \qquad \int_0^1\int_y^{3y} dxdy \ ;$$

$$\int_0^1 2xydy \ ; \qquad \int_0^1\int_0^2 dxdy \ ; \qquad \int_0^1\int_{x^2}^{2x} dydx$$

Definición **Integral doble iterada en dominio simple respecto de x.** Sea $D \subset [a,b] \times [c,d]$ un dominio simple respecto de x (como en la definición 2.1.1), y sea $f(x,y)$ continua en D. Se llama *Integral doble iterada de f en el dominio D* al número:

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

que se denota

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

Definición **Integral triple iterada en dominio (tridimensional) simple respecto de x, y o de y, x.**

Sea $D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,h]$ un dominio simple respecto de x,y o de y,x(como en la definición 3.1.1), y sea $f(x,y,z)$ continua en D. Se llama *Integral triple iterada de f en el dominio D* al número:

$$\iint_{D_1} \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

que se denota

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D_1} dxdy \int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Ejemplo:

Resolver $\int_0^1 2xydx$;

Solución

$$2y\int_0^1 xdx = 2y\,\frac{x^2}{2} = \left[yx^2\right]_0^1 = \left[y(1)^2 - y(0)^2\right] = y$$

Ejemplo Calcular

$$\iiint_D xyz\ dxdydz$$

en el dominio sólido D del espacio x, y, z que tiene por ecuaciones:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq 2x,\ x+y \leq z \leq 2x+y\}$$

$$I = \iiint_D xyz\ dxdydz = \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} dy \int_{x+y}^{2x+y} xyz\, dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} \left(xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=x+y}^{2x+y} \right) dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} \left(xy \cdot \frac{(2x+y)^2 - (x+y)^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-x}^{2x} \left(\frac{3}{2}x^3 y + x^2 y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x^3 y^2 + \frac{1}{3}x^2 y^3 \Big|_{y=-x}^{y=2x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x^3 (2x)^2 + \frac{1}{3}x^2 (2x)^3 - \frac{3}{4}x^3(-x)^2 - \frac{1}{3}x^2(-x)^3 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x^5 + \frac{8}{3}x^5 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^5 \right) dx = \int_0^1 (\frac{21}{4}x^5)\, dx = \frac{21}{4} \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{7}{8}$$

5.2. Definición de integral doble: áreas y volúmenes

Definición.- Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, entonces la **integral doble de** f **sobre R** está dada por

$$\int\int_R f(x,y)\, dA = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso f es **integrable** sobre R.

Se debe enfatizar que las condiciones de esta definición son suficientes pero no necesarias para la existencia de la integral doble.
El cálculo del valor de una integral doble directamente de la definición es muy tedioso, por lo que existe un teorema para integrales dobles.

Teorema fundamental para integrales dobles. Si la integral doble $\int\int_R f(x,y)\, dA$ de f en R existe, y si la región R es de alguno de estos dos tipos: acotada cuya frontera es una curva cerrada simple y rectificable, y cada línea que pasa por un punto interior de R y perpendicular al eje x interseca a la frontera de R en solo dos puntos (región R tipo T1) o si cada línea que pasa por un punto interior de R y perpendicular al eje y interseca a la frontera de R solo en dos puntos (región R tipo T2). O si R es la unión de un número finito de regiones del tipo T1 o T2, las integrales iteradas se pueden usar para calcular la integral doble.

$Sea\ F\{(x,y,x)|\ z = F(x,y), (x,y) \in R\}\ una\ función\ que\ es\ continua\ en\ la\ región\ cerrada\ y\ acotada\ R.$

$i.\ Si\ R\ es\ del\ tipo\ T1\ \ y\ \ es\ la\ gráfica\ de\ \{(x,y)|G_1(x) \le y \le G_2(x),\ a \le x \le b\}, donde\ G_1\ \ y\ \ G_2\ \ son\ continuas\ en\ [a,b]\ \ entonces$

$$\iint_R F(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{G_1(x)}^{G_2(x)} F(x,y)\, dydx$$

$ii.\ Si\ R\ es\ del\ tipo\ T2\ \ y\ \ es\ la\ gráfica\ de\ \{(x,y)|H_1(y) \le x \le H_2(y),\ c \le y \le d\}, donde\ H_1\ \ y\ \ H_2\ \ son\ continuas\ en\ [c,d]\ \ entonces$

$$\iint_R F(x,y)\, dA = \int_c^d \int_{H_1(y)}^{H_2(y)} F(x,y)\, dxdy$$

Calculo de áreas:
Consideramos la región R acotada por $a \le x \le b\ \ y\ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)$. El área plana R está dada por la integral

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx$$

1. **Si R está definida por $a \le x \le b$ y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a,b]$, entonces el área de R está dada por**

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$$

2. **Si R está definida por $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ y $c \le y \le d$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c,d]$, entonces el área de R está dada por**

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$$

Nota: En caso de que los cuatro límites de integración sean constantes, la región R es un rectángulo.

Ejemplo

- Utilizar una integral iterada para hallar el área de la región limitada por las gráficas de $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = cos\ x$, entre $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$.

$$\text{Área} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{cos\ x}^{sen\ x} dy\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [y]_{cos\ x}^{sen\ x}\ dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (sen\ x - cos\ x)\, dx = [-cos\ x - sen\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

Calculo de volúmenes:

Definición.- Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy, entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

$$\int\int_R f(x,y)\, dA = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

siempre que el límite exista, en cuyo caso f es **integrable** sobre R.

Nota: Si f es integrable en una región plana R y $f(x,y) \ge 0$ para todo $(x,y) \in$ R, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \int\int_R f(x,y)\, dA$$

Hallar el volumen de la región sólida acotada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy.
Haciendo $z = 0$, se comprueba que el borde de la región sobre el plano xy es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, luego nuestra región de integración la constituyen los puntos sobre la elipse y en el interior de ésta y queda descrita por

$$-2 \le x \le 2, \qquad -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}} \le y \le \sqrt{\frac{4-x^2}{2}}$$

Por lo tanto el volumen pedido es

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} (4 - x^2 - 2y^2)\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} \left[(4-x^2)y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} dx = \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx =$$

efectuando el cambio de variable $x = 2\ sen\ \theta$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16\, cos^4\theta\, d\theta = \frac{128}{3\sqrt{2}} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = 4\sqrt{2}\pi\ u.v.$$

5.3. Integral doble en coordenadas polares

Consideremos la región *A* determinada por las semirrectas $\theta=\beta$, $\theta=\alpha$ y las curvas *r = f1 (θ), r = f2 (θ),* como en la figura 6. Supongamos que *A* queda incluida por completo en el sector

R: " r " a "θ"

Sean *m* y *n* dos enteros positivos y hagamos

$$\Delta r = \frac{a}{m}, \quad \Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

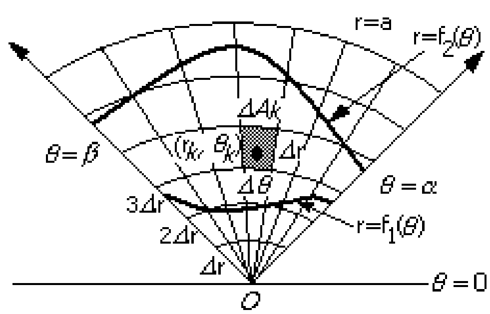


figura 6

Cubrimos ahora *R* por una red de arcos circulares de centro O y radios *r, 2r,….mr* y trazamos rectas desde O tales que el ángulo formado por dos rectas consecutivas cualesquiera sea siempre el mismo e igual a $\Delta\theta$, *R* queda dividido en tres tipos de subregiones:

a) exteriores de *A;*
b) interiores de *A*, y
c) atravesadas por el contorno de *A*.

Prescindimos que todas las del primer tipo e incluimos todas las del segundo. En cuanto a las del tercero podemos, incluir algunas, todas o ninguna. Aquellas que hayan de incluirse se numeraran en cierto orden por 1, 2, 3,…, *N*, eligiendo en cada una de ellas un punto *(rk, k).*

Se multiplica el valor de *F* (función dada, definida sobre la región *A*) en cada punto *(rk, k)* por el área de la correspondiente subregión, y se suman los productos así obtenidos; es decir, consideramos la suma

$$S = \sum_{k=1}^{N} F(r_k, \theta_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} F(r_k, \theta_k) r_k \Delta\theta \Delta A_k$$

$$\Delta A_k = r_k \Delta\theta \Delta r$$

El radio del arco interior que limita *Ak* es *rk-½r;* el del exterior, *rk-½r;* por consiguiente

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}(r_k + \frac{1}{2}\Delta r)^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}(r_k + \frac{1}{2}\Delta r)^2 \Delta\theta$$

Consideremos el límite de las sumas cuando tienden a *0* las diagonales de todas las subregiones.

Si la función *F* es continúa y la región *A* esta limitada por curvas continuas rectificables, las sumas tienen como límite la integral doble de *F* extendida a *A:*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(r_k, \theta_k) r_k \Delta\theta \Delta r = \int_A \int F(r, \theta) dA$$

Este límite puede calcularse utilizando la siguiente integral iterada:

$$\int_A \int F(r, \theta) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} F(r, \theta) r \, dr \, d\theta$$

Es posible utilizar primero coordenadas cartesianas para escribir la integral doble y transformarla después a coordenadas polares.

Cambio de variables: coordenadas polares

En una integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede efectuar un cambio de variable $x = g(u)$, con lo que $dx = g'(u)\,du$, y obtener

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[g(u)]\,g'(u)\,du$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Nótese que el proceso de cambio de variable introduce en el integrando un factor adicional, $g'(u)$. Esto también ocurre en el caso de integrales dobles

$$\int\int_R f(x,y)\,dA = \int\int_S f[g(u,v),h(u,v)]\,\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right|\,du\,dv$$

donde el cambio de variables $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$ introduce un factor llamado **jacobiano.**

Definición.- Si $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$, entonces el **jacobiano** de x e y con respecto de u y v, denotado por $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

Hallar el jacobiano para el cambio de variables que nos lleva de las coordenadas cartesianas a las polares. Es decir

$$x = r\ cos\ \theta \quad \text{e} \quad y = r\ sen\ \theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\ \theta & -r\ sen\ \theta \\ sen\ \theta & r\ cos\ \theta \end{vmatrix} = r\ cos^2\theta + r\ sen^2\theta = r$$

5.4. Aplicaciones de la integral doble (geométricas y físicas)

Las integrales dobles tienen multiples aplicaciones en física y en geometría. A continuación damos una relación de alguna de ellas.

1. El área de una región plana R en el plano xy viene dada por una integral doble.

$$area(R) = \iint_R dxdy$$

2. El volumen V encerrado entre una superficie $z = f(x,y)(>0)$ y una región R en el plano xy es

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy$$

3. Sea $f(x,y)$ la función de densidad (=masa por unidad de área) de una distribución de masa en el plano xy. Entonces la masa total de un trozo plano R es

$$M = \iint_R f(x,y)dxdy$$

4. El centro de gravedad de la masa del trozo plano R anterior tiene coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ donde:

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)dxdy, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)dxdy$$

5. Los momentos de inercia I_x e I_y de la masa de R con respecto a los ejes x e y respectivamente son:

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dxdy; \quad I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dxdy$$

5.5. Definición de integral triple

Una integral triple es una generalización de una integral doble en el mismo sentido que una doble es una generalización de una integral sencilla.

Esto es, una integral triple extiende el concepto de una integral al caso en que F es una función de tres variables independientes cuyo dominio es una región cerrada acotada en el espacio de 3 dimensiones.

En este tipo de espacio los conceptos de conjunto abierto, conjunto cerrado, región, punto frontera, punto interior, región cerrada, y región cerrada acotada son definidos por extensiones de las definiciones en el espacio de dos dimensiones, con una adaptación de la terminología.

Supongamos que

$$F = \{(x,y,z;u) |\ u = F(x,y,z), (x,y,z) \in R^3\}$$

Es una función de tres variables independientes cuyo dominio es una región cerrada acotada R^3. Sea N_k^3 una red de R^3, sea

$$T_k^3 = \{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),..,(x_i,y_i,z_i),...,(x_k,y_k,z_k)\} \ \ con \ \ (x_i,y_i,z_i) \in R_i^3 |$$

un aumento de N_k^3, formemos la suma

$$\sum_{i=1}^{k} F(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i$$

Si existe un número I con la propiedad de qué dado un número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{k} F(x_i, y_i, z_i), \Delta V_i - I\right| < \varepsilon$$

para todas las redes N_k^3 y aumentos T_k^3 con forma $N_k^3 < \delta$, entonces este único número es la triple integral (Riemann) de F sobre la región R^3, y la representamos

$$I = \iiint\limits_{R^3} F(x, y, z) dV$$

La existencia de una integral triple sobre una región R^3 depende no sólo de la naturaleza de F sino también de la naturaleza de R^3.

Teorema. Si F es continua sobre una región cerrada acotada R^3 cuya frontera consiste de la unión de un número finito de superficies uniformes entonces

$$\iiint\limits_{R^3} F(x, y, z) dV \quad existe$$

5.6. Integral triple en coordenadas cilíndricas y esféricas

Cálculo de integrales triples en coordenadas cilíndricas

A continuación deseamos calcular una integral triple dada en coordenadas rectangulares

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z) dV$$

en coordenadas cilíndricas.

Para ello, si f(x, y, z) es una función continua y si definimos

$$g(r, \theta, z) = f(rcos\theta, rsen\theta)$$

tenemos la siguiente relación entre las integrales:

$$\iiint\limits_{R} f(x, y, z) dV = \iiint_U g(r, \theta, z) r \, dV$$

Donde la integral triple se calcula mediante integrales iteradas según convenga el orden de integración.

Ejemplo:

Plantee la integral $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 \mathbf{z\,dz\,dy\,dx}$ en coordenadas cilíndricas.

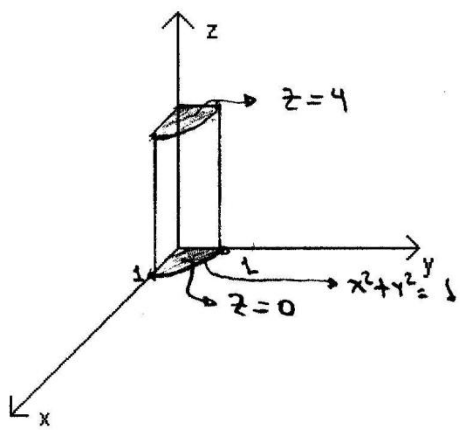
Solución:

Observe que:

$$0 \leqslant z \leqslant 4; \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \text{y} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Usando las ecuaciones de transformación, se tiene para describir el sólido sobre el cual se integra:

$$0 \leqslant z \leqslant 4 \;;\quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$



Luego,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 z\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^4 z\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^4 z\,r\,dz\,d\theta\,dr$$

Cálculo de integrales triples en coordenadas esféricas
A continuación deseamos calcular una integral triple dada en coordenadas rectangulares

$$\iiint_R f(x,y,z)dV$$

en coordenadas esféricas.

Para ellos, si f(x, y, z) es una función continua y si definimos

$$g(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho cos\theta sen\varphi, \rho sen\theta sen\varphi, \rho cos\varphi)$$

tenemos la siguiente relación entre las integrales:

$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_U f(\rho cos\theta sen\varphi, \rho sen\theta sen\varphi, \rho cos\varphi)\rho^2 sen\varphi dV$$

Donde la integral triple se calcula mediante integrales iteradas.

Ejemplos

Plantee la integral $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz\,dy\,dx$ **en coordenadas esféricas.**

Solución:

Observe que:

$$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{9-x^2-y^2}\ ;\quad -\sqrt{9-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{9-x^2} \quad \text{y} \quad -3 \leqslant x \leqslant 3$$

Es decir, la región de integración corresponde al sólido limitado por el casquete superior de la esfera centrada en el origen de radio 3.

Usando las ecuaciones de transformación, se tiene que, para describir el sólido sobre el cual se integra:

$$0 \leqslant \rho \leqslant 3 \quad ; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \Phi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Luego,

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}(\rho\cos\Phi\,\rho)\rho^2\,\text{sen}\,\Phi\,d\rho\,d\theta\,d\Phi$$

5.7. Aplicaciones de la integral triple

1. Volumen de un sólido

El volumen de un sólido (S) cualquiera, viene dado por:

$$\text{Volumen}(S) = \int\int\int_S 1\,dxdydz$$

2. Masa, momentos respecto a los planos coordenados y centro de masa de un sólido

Denotamos por $d: R \in \mathbb{R}^3 2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ (continua) la densidad del sólido S.

- La masa viene dada por,

$$m = \int\int\int_S d(x,y,z)\,dxdydz$$

- Los momentos respecto de los planos coordenados se definen como
  - $M_{xy} = \int\int\int_S z\, d(x,y,z)\, dxdydz$
  - $M_{xz} = \int\int\int_S y\, d(x,y,z)\, dxdydz$
  - $M_{yz} = \int\int\int_S x\, d(x,y,z)\, dxdydz$
- El centro de masa es: $\left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right)$

3. Momentos de inercia de un sólido

Los momentos de inercia respecto de los ejes vienen dados por:

- $I_x = \int\int\int_S (y^2 + x^2)\, d(x,y,z)\, dxdydz$
- $I_y = \int\int\int_S (x^2 + z^2)\, d(x,y,z)\, dxdydz$
- $I_z = \int\int\int_S (x^2 + y^2)\, d(x,y,z)\, dxdydz$