# Curso de Álgebra Lineal

## 1. NÚMEROS COMPLEJOS

### 1.1 Definición, origen y operaciones fundamentales con números complejos

Definición. Un número complejo, z, es una pareja ordenada (a, b) de números reales tales z = (a, b) que cumplen conciertas propiedades.

Origen. Los números complejos tiene su orine en la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Como puede observarse al encontrar la solución para esta ecuación se obtiene que $x= \sqrt{-1}$, pero en los números reales este número no existe, pues no existe un número real cuyo cuadrado sea -1. Es así como fueron desarrollados los números complejos, y a esa raíz se le llamo número imaginario el cual se indica con la letra "i", la cual se define como $i = \sqrt{-1}$.

Operaciones Los números reales a, b se denominan parte real y parte imaginaria, respectivamente, del número complejo z, es decir, a = parte real de z = Re(z), b = parte imaginaria de z = Im(z).

La pareja (x, 0) se identifica con el número real x, mientras que una pareja del tipo (0, y) es un número imaginario puro. La pareja (0,1) se llama unidad imaginaria "i".

Los números complejos $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, son iguales sí y sólo sí sus parte reales $a_1$ y $a_2$ son iguales y sus partes imaginarias $b_1$ y $b_2$ son iguales, en otra palabras, $z_1 = z_2$, sí y sólo sí $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Los números complejos cumplen con las siguientes reglas de operación:

Suma, para cada par de números complejos $z_1$ y $z_2$ existe un número complejo único $z_3$, llamado suma de $z_1$ y $z_2$, denotado por $z_3 = z_1 + z_2$, esto queda definido de la siguiente forma: si $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, entonces $z3 = z1 + z2 = = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

Multiplicación, para cada par de números complejos $z_1$ y $z_2$ existe un número complejo único $z_3$, llamado producto de $z_1$ y $z_2$, denotado por $z_3 = z_1 \cdot z_2$, definido en la forma siguiente: si $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$, entonces $z_3 = z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 \cdot b_1)$.

Ejemplos.

Si $z_1 = (4, -7)$ y $z_2 = (9,3)$. Calcular $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$.

$z_1 + z_2 = (4, -7) + (9, 3) = (4 + 9, -7 + 3) = (13, -4)$

$z_1 \cdot z_2 = (4, -7) \cdot (9,3) = (36 + 21, 12 - 63) = (57, -51)$

## 1.2 Potencias de “i”, módulo o valor absoluto de un número complejo

Los números complejos surgen por la necesidad de encontrar la solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, cuyas soluciones son: $x = \pm \sqrt[2]{-1}$, como puede observarse esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales ya que no existe un número real que elevado al cuadrado de como resultado -1.

Este nuevo número se definió como un número imaginario denotado por la letra i, de manera que $i = \sqrt[2]{-1}$, y es tal que se tienen los siguientes valores o potencias de i.

$I^2 = -1$

$I^3 = -\sqrt[2]{-1}$

$I^4 = 1$

$I^5 = \sqrt[2]{-1}$

$I^6 = -1$

De esta manera surge un nuevo sistema numérico, llamado sistema de los números complejos, que es un sistema numérico más amplio y que contiene totalmente a sistema de los números reales.

Los números complejos se denotan con la letra C, y el valor absoluto de un número complejo se expresa de la siguiente manera. Sea $z = x + i\,y$, un número complejo, el valor absoluto (norma o modulo) para un numero complejo se define como $|z| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

## 1.3 Forma polar y exponencial de un número complejo

Los números naturales, enteros, fraccionarios y reales se pueden representar como puntos de una recta (la recta de los números reales).

Los Números Complejos podemos imaginarlos como puntos de un plano (el plano de los números complejos). En ese plano podemos trazar unos ejes perpendiculares que nos sirvan de referencia para localizar los puntos del plano.

Lo habitual es utilizar las coordenadas del punto (x,y). Cuando representamos un número complejo de esta forma decimos que está en forma cartesiana.

Esta interpretación de los números complejos (considerarlos puntos en un plano) se debe a Gauss y a Hamilton.

También se suele utilizar un vector para localizar el punto.

En un vector con principio en el origen de coordenadas y fin en el punto, identifica el punto de una manera inequívoca.

Ese vector lo podemos descomponer en dos vectores: un vector con principio en el origen de coordenadas y fin el valor de la abscisa del punto (x, y) y otro vector con principio el origen de coordenadas y fin la ordenada del punto (x, y).

Entonces el punto se representaría como una suma de vectores a + b.

Si definimos unos vectores unitarios sobre el Eje X o Real, ya que en el representamos la Parte Real del número complejo y sobre el eje Y o Eje Imaginario, representamos la parte Imaginaria. Entonces podemos representar el número de esta forma xr + yi.

Los vectores r e i tienen módulo 1, además el vector i se define cumpliendo esta condición: i2 = -1.

Cómo r tiene módulo 1 y sus potencias también son 1, no se escribe, quedando por lo tanto el número en la forma x + yi. Esta forma de representar un número complejo se llama Forma Binaria.

Se puede representar un número complejo cualquiera $z = a + bi$ en forma polar, dando su módulo y su argumento. Esta forma también se llama forma trigonométrica.

El módulo de un número complejo z es la longitud del vector que lo representa.

$$|z| = r$$

**El Argumento** de un complejo es el ángulo que forma el vector con el eje real.

$$\arg(z) = a$$

Por lo cual z = r (cos ð + *i* sen α)

Forma Binomial

Forma binomial $z = a + bi$

1.4 Teorema de Moivre, potencias y extracción de raíces de un número complejo

El teorema de Moivre afirma que para un ángulo arbitrario "α" y cualquier número entero n, (cos α ± i sen nα). En particular, si n es un número natural, entonces, $(\cos\alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha)^n = \cos n\alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha$ y

$(\cos\alpha \pm i \operatorname{sen} n\alpha)^n = \cos(-n\alpha) \pm i \operatorname{sen}(-n\alpha)$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

El presente curso trata sobre álgebra lineal. Al buscarla palabra "lineal" en un diccionario se encuentra, entre otras definiciones la siguiente: lineal, perteneciente en lo relativo a línea, sin embargo, en matemáticas la palabra lineal tiene un significado más amplio. Esto implica que nuestro estudio está en relación con las propiedades de la recta, por lo cual veremos algunas propiedades de esta.

1. Pendiente, m, de una recta que pasa por los puntos ($x_1$, $y_1$) y ($x_2$, $y_2$) está dada por: m = $\frac{y2-y1}{x2-x1}$, si $x_1 \neq x_2$.

2. Sí $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 - y_1 \neq 0$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es indefinida.

3. Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente ordenada al origen y = mx + b, donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada al origen (el valor de *y* en donde cruza al eje vertical).

4. Dos rectas distintas son paralelas sí y sólo sí tienen la misma pendiente.

5. Si la ecuación de la recta se escribe en la forma ax + by +c = 0, ($b \neq 0$), entonces se puede calcular fácilmente la pendiente m, como m = - $\frac{a}{b}$

6. Si m1 es la pendiente de la recta $l_1$ y $m_2$ es la pendiente de la recta $l_2$, $m_1 \neq 0$ y $l_1$ y $l_2$ son perpendiculares, entonces $m_2 = 1/m_1$.

7. Las rectas paralelas al eje x tiene pendiente cero.

8. Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

## 2.1 Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x, y:

$$a_1x + b_1y + c = 0$$

$$a_2x + b_2y + d = 0$$

Donde a1, b1, a2, b2, son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales(x, y) que satisface el sistema anterior se le llama *solución*. Algunas propiedades que tienen los sistemas de ecuaciones lineales son las siguientes:

1. Si a = b y c = d, entonces a +c = b + d.

2. Si a = b y c es cualquier número real, entonces ca = cb.

La propiedad 1 establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación que es válida, la propiedad 2 establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante se obtiene una segunda ecuación que también es válida.

Un sistema de ecuaciones lineales tiene o bien una solución o bien no tiene solución o bien un número infinito de soluciones, veamos algunos ejemplos de sistema con una solución, con un número infinito de soluciones y sin solución.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales o simultáneas:

$$3x - 2y - 4 = 0$$

$$5x + 2y - 12 = 0$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por la propiedad 1, la siguiente ecuación:

$$8x - 16 = 0, \text{ por tanto, } x = 2.$$

Entonces, si se despeja de la segunda ecuación,

$$2y = 12 - 5x = 12 - 10 = 2$$

Queda, por tanto que: y = 1.

De esta manera el par (2,1) satisface el sistema anterior y la manera en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace, por lo que el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 2: sistema con un número infinito de soluciones

$$x – y – 7 = 0$$

$$2x – 2y -14 = 0$$

Como puede observarse las ecuaciones que forman el sistema son equivalentes, es decir, una es múltiple de la otra. Es decir, cualesquiera dos números, x *y* y que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda y viceversa. Esto se puede comprobar fácilmente si se multiplica la primera ecuación por 2, esto nos lo permite, de acuerdo con la propiedad 2, al ser la ecuaciones equivalentes, lo único que podemos hacer es despejar una incógnita en términos de cualquiera otra de las dos ecuaciones. Entonces $x – y = 7$ o $y = x – 7$, de modo que el par $(x, x – 7)$ es una solución del sistema anterior para cualquier número real x, en otras palabras, el sistema tiene un número infinito de soluciones, así algunas de las soluciones serán (7, 0), (0, -7), (8, 1), (1, -6), (3, -4) y (-2, -9).

Ejemplo 3: sistema sin solución

$$x – y – 7 = 0$$

$$2x – 2y -13 = 0$$

Si se multiplica la primera ecuación por - 2, se obtiene la ecuación $- 2x + 2y + 14 = 0$, que sumada con la segunda ecuación nos queda que $1 = 0$, lo cual es una contradicción, por lo cual el sistema no tiene solución.

## 2.2 Gráficas de sistemas de ecuaciones lineales

Para graficar un sistema de ecuaciones lineales o simultáneas se realizade la sigueinte manera.

Supóngase que se desa graficar el siguiente sistema usando el método de derterminantes:

$$3x +6y -18 = 0$$

$$-7x +14y -21 = 0$$

Usando el método de tabulación

$x = - 1, 0, 1$

y = 21/6, 3, 15/6

y = 1, 3/2, 2

## 2.3 Propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales

a) Un sistema es inconsistente si no tiene solución

b) Dos sistemas son equivalentes si uno es un múltiplo del otro

c) El sistema

$$a_1x + b_1y + c = 0$$

$$a_2x + b_2y + d = 0$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y, no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones, es decir, tiene solución y es única, sí y sólo sí $a_1b_2 – b_1a_2 = 0$.

## 2.4 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

Existen el álgebra diferentes métodos para encontrar la solución de un sistema e ecuaciones lineales, a continuación veremos el método de igualación.

Supóngase que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales o simultáneas.

$$6x + 3y – 5 = 0$$

$$-4x – 5y + 9 = 0$$

Y se desea encontrar la solución del sistema por el método de igualación. Entonces se procede de la siguiente manera.

1. Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones:

y = (- 6x + 5) / 3     y = (4x – 9) / - 5

2. Se igualan ambas expresiones:

y = 17 / 9

(- 6x + 5) / 3 = (4x – 9) / - 5

3. Se resuelve la ecuación, dando que:

x = - 1 / 9

Esta es la solución para x.

4. Se sustituye este valor de x para encontrar y:

y = (- 6(-1/9) +5)) / 3

y = 17 / 9 esta es la solución para y, por tanto, el punto

x = - 1 / 9, y = 17 / 9, es la solución del sistema.

## 3. MATRICES Y DETERMINANTES

### 3.1. Definiciones

Matrices

Una matriz es un arreglo en forma de renglón o columna de los coeficientes de un sistema de ecuaciones simultáneas, de cualquiera de las siguientes formas.

Vector renglón de n componentes, se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x1 \quad x2 \ldots \quad xn)$$

Vector columna de n componentes, se define como un conjunto ordenado de n números, escritos de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ . \\ . \\ . \\ xn \end{bmatrix}$$

A cada $x_i$ se les llama componente del vector, primera componente, segunda componente, etc.

Determinantes

El determinante, A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$, de una matriz o espacio vectorial se calculan de la siguiente manera: a11 a12 – a21a22, y se denota por.

$$\det A = det \begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix} = a11\ a12 - a21a22$$

## 3.2. Operaciones entre matrices

Las operaciones entre matrices se definen y calculan, de manera análoga a las operaciones aritméticas.

a) La operación suma. Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$, y se desean realizar las siguientes operaciones.

A + B, A – B, entonces se hace lo siguiente.

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

b) La operación de multiplicación

A * B = $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -30 \\ 26 & 12 \end{pmatrix}$

## 3.2 Matriz Inversa

Supóngase que se tienen dos matrices A y B de n x n. Suponga que

AB = BA = I

Entonces B se llama la inversa de A y se denota por $A^{-1}$, y así de esta manera se tiene que:

$A\ A^{-1} = A^{-1}\ A = I.\ A^{-1}\ A$

## 3.3. Definición y propiedades de un determinante

Sea A = la siguiente matriz de 2 x 2, entonces se define el determinante de A de la manera siguiente:

A = $\begin{vmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{vmatrix}$ = a11 a22 – a12 a21

Ejemplo calcular el determinante de $\begin{vmatrix} 2 - 6 \\ 3 \quad 5 \end{vmatrix}$, entonces los determinantes al igual que las matrices, en particular, y que los números reales en general se restan las multiplicaciones diagonales.

det $\begin{vmatrix} 2 - 6 \\ 3 \quad 5 \end{vmatrix}$ = 10 + 18 = 28

# 5. TRANSFORMACIONES LINEALES

## OBJETIVO

Aprender la definición de transformación lineal e interpretarlo como una generalización del concepto de función.

Conocer los conceptos fundamentales, como núcleo e imagen de una transformación lineal, así como en el concepto de isomorfismo.

## INTRODUCCIÓN

A continuación se estudiará un caso especial de función denominada *transformación lineal* que aparecen continuamente en el estudio del álgebra lineal.

## 5.1. Definición de transformación lineal, núcleo o kernel

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector **v** ϵ V un vector único T**v** ϵ W y que satisface, para cada **u** y **v** y cada escalar α:

$$T(u + v) = Tu + Tv$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

Aclaremos el concepto de transformación lineal mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Proyección sobre el eje x

En $R^2$ se define una función T mediante la fórmula $T\binom{x}{y} = \binom{x}{-y}$. El significado geométrico del presente ejemplo es que se trata de una transformación T que toma un vector en $R^2$ y lo refleje al eje x.

Ejemplo 2: Transformación lineal de $R^2$ en $R^2$

Sea T: $R^2 \rightarrow R^3$, definida de la siguiente manera $T\binom{x}{y} = T\begin{pmatrix} & x+y \\ x - & y \\ & 3y \end{pmatrix}$.

$$T\left[\binom{x1}{y1} + \binom{x2}{y2}\right] = T\binom{x1+x2}{y1+y2} = \begin{pmatrix} x1+x2+y1+y2 \\ x1+x2+y1+y2 \\ 3y1+3y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1+y1 \\ x1-y1 \\ 3y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2+y2 \\ x2-y2 \\ 3y2 \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x1+y1 \\ x1-y1 \\ 3y1 \end{pmatrix} = T\binom{x1}{y1} \text{ y } \begin{pmatrix} x2+y2 \\ x2-y2 \\ 3y2 \end{pmatrix} T\binom{x2}{y2}$$

Así que

$$T\left[\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

De manera similar

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - \alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

<u>Ejemplo 3: La transformación cero</u>

Sean V y W dos espacios vectoriales y definida T: V → W por T**v** = **0** para todo **v** en V. Entonces $T(v_1 + v_2) = 0 = 0 + 0 = Tv_1 + Tv_2$, y a su vez T(α**v**) = 0 = α**0** = αT**v**.

<u>Ejemplo 4: La transformación identidad</u>

Sea V un espacio vectorial y definida I: V → V por I**v** = **v**, para todo **v** en V. Claramente I es una transformación lineal, la cual se denomina transformación identidad.

Pasemos a las definiciones de Núcleo o kerrnel y de la imagen de una transformación lineal.

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea T: V → W una transformación lineal. Entonces

El núcleo o kernel de una transformación lineal, T, está dado por

nuc (T) = {**v** є V: T**v** = **0**}

5. 2. La imagen de una transformación lineal

La imagen de una transformación lineal, se define como:

$$\text{Im } T = \{\mathbf{w} \in W: \mathbf{w} = T\mathbf{v}, \text{ para alguna } \mathbf{v} \text{ en } V\}$$

Ejemplo 5: Núcleo e imagen de la transformación cero

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$ en V (T es la transformación cero). Entonces nuc T = **V e Im** T = {**0**}

Ejemplo 6: Núcleo e imagen de la transformación identidad

Sea Tv = v para toda v en V (T es la transformación identidad). Entonces el núcleo de una transformación lineal se define como

$$\text{nu } T = \{\mathbf{0}\} \text{ e Im } T = \mathbf{V}.$$

5.3. Matriz de una transformación lineal y representación matricial de una transformación lineal.

Sea $T: R^n \to R^m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única m x n, $A_T$, tal que

$$T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x}, \text{ para toda } \mathbf{x} \text{ en } R^n.$$

A la matriz $A_T$ se le llama matriz de transformación o representación matricial de T.

Ejemplo7: Representación matricial de una transformación de $R^3$ en $R^4$.

Sea T: $R^3$ en $R^4$ definida como $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x-y-z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$. Encontrar

a) La matriz de la transformación lineal

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de modo que

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nótese que $T\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x-y-z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$, es la matriz de la transformación

b) El núcleo de la transformación lineal.

La forma escalonada por renglones de

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ por lo tanto un T = $\{\mathbf{0}\}$

c) La imagen de la transformación

$ImT = 3$

5.4. Transformaciones y sistemas de ecuaciones lineales

5.5. Álgebra de las transformaciones lineales

Sea $T_1$ y $T_2$ dos transformaciones lineales, entonces

1. $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$

2. Para toda transformación lineal existe una transformación nula, denotada por $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ tal que $T + \mathbf{0} = \mathbf{0} + T = T$

3. Para toda transformación lineal existe su inversa, denotada por $-T$, tal que $T + (-T) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

4. Si $T_1$, $T_2$, $T_3$ son tres transformaciones lineales, entonces:

$T_1(T_2 + T_3) = (T_1 T_2) + (T_1 T_3)$

6. VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

OBJETIVO:

Conocer los conceptos de valores y vectores propios, así como investigar las propiedades de los vectores y valores propios de una transformación lineal.

6.1. Definición de valores propios

VALORES PROPIOS

El escalar que se obtiene de la operación anterior recibe el nombre **Valor Propio**. Por lo regular, una transformación lineal queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios.

VECTORES PROPIOS

De un operador lineal son aquellos vectores que son no nulos y que cuando son transformados por dicho operador, se obtiene un múltiplo escalar de sí mismos, con la propiedad de que no cambia la dirección del vector.

ESPACIO PROPIO

Un Espacio Propio o espacio fundamental asociado al valor propio es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

6.2. Polinomio y ecuación característica

Sea A una matriz de n x n. Entonces $\lambda$ es un valor característico de A sí y sólo sí:

$$p(\lambda) = \det (A - \lambda I) = 0$$

A la ecuación anterior se le llama ecuación característica de A, y al término $p(\lambda)$, se le denomina polinomio característico de A.

Ejemplo. Calcular el polinomio característico de A si A = $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

El escalar que se obtiene de la operación anterior recibe el nombre **Valor Propio**. Por lo regular, una transformación lineal queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios.

Sea T: V → W una transformación lineal. Lo que se desea es encontrar un vector v en V tal que T**v** y **v** sean paralelos, en otras palabras, se busca un vector **v** y un escalar λ tal que sean paralelos, es decir, T**v** = λ **v.**

SI **v** ≠ 0 y λ satisface la expresión anterior, entonces a λ se le llama vector propio de T, y al vector **v** se le llama vector propio de T.

Ejemplo

Sea A = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, entonces A$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así $\lambda_1$ = 1 es un valor característico de A cuyo vector característico $v_1$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Análogamente A$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ = = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ = -2$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de modo que $\lambda_2$ = -2 es un valor característico de A con el correspondiente vector característico $v_2$ = $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

## 6.2. Polinomio y ecuación característica

Sea A una matriz de n x n. Entonces λ es un valor característico de A sí y sólo sí: p(λ) = det (A – λI) = 0. A esta ecuación se le llama ecuación característica de A y a p(λ) se le llama polinomio característico de A.

## 6.3. Determinación de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada

Sea A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces det (A – λI) = det $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ = - ($\lambda^3$ - $2\lambda^2$ - 5λ + 6), tiene por valores característicos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Para $\lambda_1$

(A –I)**v** = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tiene por vector característico V1 = $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Análogamente para $v_2$ y $v_3$, se tiene que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y para

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## 6.3. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES Y VECTORES

Las formas cuadráticas surgen como medios para obtener información sobre las secciones cónicas en $R^2$ (circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas), describir superficies cuadráticas.

Definición

Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

Donde $|a|+|b| + |c| \neq 0$. Esto es, al menos uno de los números a, b o c es diferente de cero.

Definición

Una forma cuadrática en dos variables es una expresión e la forma

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

Donde $|a|+|b| + |c| \neq 0$.