SESIÓN 9. VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

OBJETIVO:

Conocer los conceptos de valores y vectores propios, así como investigar las propiedades de los vectores y valores propios de una transformación lineal.

9.1. Definición de valores propios

VALORES PROPIOS

El escalar que se obtiene de la operación anterior recibe el nombre **Valor Propio**. Por lo regular, una transformación lineal queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios.

VECTORES PROPIOS

De un operador lineal son aquellos vectores que son no nulos y que cuando son transformados por dicho operador, se obtiene un múltiplo escalar de sí mismos, con la propiedad de que no cambia la dirección del vector.

ESPACIO PROPIO

Un Espacio Propio o espacio fundamental asociado al valor propio es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

9.2. Polinomio y ecuación característica

Sea A una matriz de n x n. Entonces λ es un valor característico de A sí y sólo sí:

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

A la ecuación anterior se le llama ecuación característica de A, y al término $p(\lambda)$, se le denomina polinomio característico de A.

Ejemplo. Calcular el polinomio característico de A si A = $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

El escalar que se obtiene de la operación anterior recibe el nombre **Valor Propio**. Por lo regular, una transformación lineal queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios.

Sea T: V → W una transformación lineal. Lo que se desea es encontrar un vector v en V tal que T**v** y **v** sean paralelos, en otras palabras, se busca un vector **v** y un escalar λ tal que sean paralelos, es decir, T**v** = λ **v.**

SI **v** ≠ 0 y λ satisface la expresión anterior, entonces a λ se le llama vector propio de T, y al vector **v** se le llama vector propio de T.

Ejemplo

Sea A = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$, entonces A$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así $\lambda_1 = 1$ es un valor característico de A cuyo vector característico v_1 = $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Análogamente A$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ = = $\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ = -2$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, de modo que λ_2 = -2 es un valor característico de A con el correspondiente vector característico v_2 = $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9.3. Polinomio y ecuación característica

Sea A una matriz de n x n. Entonces λ es un valor característico de A sí y sólo sí: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. A esta ecuación se le llama ecuación característica de A y a $p(\lambda)$ se le llama polinomio característico de A.

9.3. Determinación de los valores y vectores propios de una matriz cuadrada

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6)$, tiene por valores característicos $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$.

Para λ_1

$(A - I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tiene por vector característico V1 = $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Análogamente para v_2 y v_3, se tiene que $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y para

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9.4. DETERMINACIÓN DE LOS VALORES Y VECTORES

Las formas cuadráticas surgen como medios para obtener información sobre las secciones cónicas en R^2 (circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas), describir superficies cuadráticas.

Definición

Una ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales es una ecuación de la forma:

$ax^2 + bxy + cy^2 = d$

Donde $|a|+|b| + |c| \neq 0$. Esto es, al menos uno de los números a, b o c es diferente de cero.

Definición

Una forma cuadrática en dos variables es una expresión e la forma

$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Donde $|a|+|b| + |c| \neq 0$.